Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Ван дер Мей, В. Н. Пивоварчик, Обратная задача Штурма–Лиувилля с зависящими от спектрального параметра краевыми условиями, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 4, 74–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa222>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:21:11

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Многочленом Гегенбауера степени n* называется гиперболический многочлен вида $x^n - x^{n-2} + \dots$, который делится на свою вторую производную (для $n \geq 3$ существует единственный такой многочлен; он является четным при четном n и нечетным при нечетном n). Следовательно, для $n \geq 4$ многочлен Гегенбауера определяет переопределенный страт размерности 0 в семействе $P|_{a_1=0, a_2=-1}$, поскольку он полностью определяется тем, что делится на свою вторую производную, а имеется дополнительное условие, что $P^{(n-1)} = n!x$ делит все его производные, являющиеся многочленами нечетной степени.

Для $n = 3$ (соответственно $n = 4$, $n = 5$) *многочлен Гегенбауера равняется* $x^3 - x$ (соответственно $x^4 - x^2 + 5/36$ (см. точку B на рис. 1), $x^5 - x^3 + 21x/100$ (см. точку Φ в теореме 2)). Интегрируя многочлены, задающие переопределенные страты, можно получать переопределенные страты более высокой размерности в семействах многочленов более высокой степени. В случае Pol_n следует проверить, для каких значений постоянной интегрирования получаемый многочлен гиперболичен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson B. Amer. Math. Monthly, **100**, 864–866 (1993).
2. Арнольд В. И. Функц. анализ и его прил., **20**, вып. 2, 52–53 (1986).
3. Арнольд В. И. Труды Тбилисс. унив., **232/233**, 23–29 (1982).
4. Givental A. B. УМН, **42**, вып. 2, 221–222 (1987).
5. Kostov V. P. Serdica Math. J., **28**, No. 2, 117–152 (2002); Prépublication No. 620 de l'UNSA, juin 2001.
6. Kostov V. P. Proc. Roy. Soc. Edinb., **112**, No. 3–4, 203–211 (1989).
7. Kostov V. P. Serdica Math. J., **25**, No. 1, 47–70 (1999).
8. Kostov V. P., Shapiro B. Z. Bull. Sci. Math., Vol. 126 No. 1, pp. 45–60 (January 2002); Prépublication No. 19 de l'Université de Nice, Juin 2001.
9. Meguerditchian I. Math. Z., **211**, 449–460 (1992).
10. Meguerditchian I. Géométrie du discriminant réel et des polynômes hyperboliques. Thèse de doctorat, Univ. de Rennes I, 1991.
11. Ruskey F. J. Comb. Theory, **52**, 77–101 (1992).
12. Thrall M. Michigan Math. J., **1**, 81–88 (1952).

Université de Nice-Sophia Antipolis,
Laboratoire de Mathématiques
e-mail: kostov@math.unice.fr

Поступило в редакцию
12 ноября 2001 г.

УДК 517.43+517.9

Обратная задача Штурма–Лиувилля с зависящими от спектрального параметра краевыми условиями*

© 2002. К. ВАН ДЕР МЕЙ, В. Н. ПИВОВАРЧИК

В [1] была рассмотрена следующая краевая задача:

$$y'' + \lambda^2 y - i\lambda p y - qy = 0, \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad (2)$$

$$y'(a) + (-m\lambda^2 + i\alpha\lambda + \beta)y(a) = 0, \quad (3)$$

где λ — спектральный параметр, $a > 0$, $p > 0$, $m > 0$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, а вещественная функция $q(x)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^2(0, a)$. Задача о

*Исследования первого автора выполнены при частичной финансовой поддержке INdAM-GNCS и MURST, а второго — при частичной финансовой поддержке Автономной области Сардинии.

малых поперечных колебаниях неоднородной гладкой струны в среде с вязким трением (здесь p пропорционально коэффициенту вязкого трения) может быть приведена с помощью преобразования Лиувилля (ср. с [2]) к системе (1)–(3). Подразумевается, что левый конец струны закреплен, а правый несет сосредоточенную массу (пропорциональную m) и может двигаться с вязким трением (пропорциональным α) в направлении, перпендикулярном равновесному положению струны (см. [1] и систему (5)–(7) ниже). Спектр такой задачи состоит только из нормальных собственных значений, сгущающихся к бесконечности.

В [1] обратная задача восстановления набора $\{a, q, p, m, \alpha, \beta\}$ по спектру задачи (1)–(3) решена при весьма ограничительном условии отсутствия чисто мнимых собственных значений, что соответствует слабой демпфируемости соответствующего квадратичного операторного пучка (см. [3]). Для случая $m = p = 0$ обратная задача с учетом чисто мнимых собственных значений была решена в [4]. В настоящей работе, используя метод работы [4], получено полное (с учетом чисто мнимых собственных значений) решение обратной задачи для системы (1)–(3) с $m, p > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность комплексных чисел $\{\lambda_k\}_{0 \neq k \in \mathbb{Z}}$ будем называть *правильно занумерованной*, если

- 1) $\operatorname{Re} \lambda_k \geq \operatorname{Re} \lambda_l$ для всех $k > l$;
- 2) $\lambda_{-k} = -\bar{\lambda}_k$ для всех не чисто мнимых λ_k ;
- 3) кратность каждого элемента последовательности конечна.

В остальном такая нумерация произвольна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть κ — неотрицательное целое число. Будем говорить, что правильно занумерованная последовательность $\{\lambda_k\}_{0 \neq k \in \mathbb{Z}}$ *принадлежит $\mathcal{SHB}_\kappa^-$* , если

- 1) все элементы последовательности, кроме, возможно, κ элементов, лежат в открытой верхней полуплоскости;
- 2) все элементы, лежащие в замкнутой нижней полуплоскости, чисто мнимые и однократные; если $\kappa \geq 1$, то будем обозначать их через $\lambda_{-j} = -i|\lambda_{-j}|$ ($j = 1, \dots, \kappa$), предполагая, что $|\lambda_{-j}| < |\lambda_{-(j+1)}|$ ($j = 1, \dots, \kappa - 1$);
- 3) если $\kappa \geq 1$, то числа $i|\lambda_{-j}|$ ($j = 1, \dots, \kappa$) (за исключением λ_{-1} , если $\lambda_{-1} = 0$) не являются элементами последовательности $\{\lambda_k\}_{0 \neq k \in \mathbb{Z}}$;
- 4) если $\kappa \geq 2$, то в каждом из интервалов $(i|\lambda_{-j}|, i|\lambda_{-(j+1)}|)$ ($j = 1, \dots, \kappa - 1$) находится нечетное число элементов последовательности $\{\lambda_k\}_{0 \neq k \in \mathbb{Z}}$;
- 5) если $|\lambda_{-1}| > 0$, то интервал $(0, i|\lambda_{-1}|)$ либо не содержит элементов последовательности, либо содержит четное число ее элементов;
- 6) если $\kappa \geq 1$, то интервал $(i|\lambda_{-\kappa}|, i\infty)$ содержит нечетное число элементов последовательности;
- 7) если $\kappa = 0$, то последовательность не содержит чисто мнимых элементов с положительной мнимой частью или содержит четное число таких элементов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Обозначим через $\mathcal{B}_\mp$ класс таких наборов $\{a, q, p, m, \alpha, \beta\}$, что $a > 0$, $p > 0$, $m > 0$, $\pm(\alpha - pm) > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, функция q вещественная и принадлежит $L_2(0, a)$ и самосопряженный оператор A , определенный формулами

$$Af = -f'' + qf, \quad D(A) = \{f \in W_2^2(0, a) : f'(a) + \beta f(a) = 0, f(0) = 0\},$$

строго положителен. Если к тому же q принадлежит пространству Соболева $W_2^2(0, a)$, то будем говорить, что набор $\{a, q, p, m, \alpha, \beta\}$ принадлежит $\mathcal{B}_\mp^0$. Более

того, если $\{a, q, p, t, \alpha, \beta\}$ принадлежит $\mathcal{B}_+$ (соответственно $\mathcal{B}_+^0$) и $\alpha > 0$, то будем говорить, что набор $\{a, q, p, t, \alpha, \beta\}$ принадлежит $\widehat{\mathcal{B}}_+$ (соответственно $\widehat{\mathcal{B}}_+^0$).

В рамках прямой задачи нами получены следующие две теоремы, являющиеся усилениями теоремы 3.1 из [1].

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\{a, q, t, p, \alpha, \beta\} \in \mathcal{B}_-^0$. Тогда спектр задачи (1)–(3) удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\{\lambda_k\}_{0 \neq k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{SHB}_0^-$;
- 2) $\{\lambda_k - (ip/2)\}_{0 \neq k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{SHB}_\kappa^-$ для некоторого $\kappa \geq 0$;
- 3) справедливы следующие (асимптотические при $k \rightarrow \pm\infty$) равенства:

$$\lambda_k = \frac{\pi(k-1)}{a} + \frac{ip}{2} + \frac{p_0}{k-1} + \frac{ip_1}{(k-1)^2} + \frac{p_2}{k^3} + \frac{b_k}{k^3}, \quad (4)$$

где $p_0, p_2 \in \mathbb{R}$, $p_1 > 0$ и $\sum_{0 \neq k \in \mathbb{Z}} |b_k|^2 < \infty$.

Отметим, что число κ в утверждении 2) теоремы 4 равно числу неположительных собственных значений самосопряженного оператора

$$A_1 f = -f'' + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) f,$$

$$D(A_1) = \left\{ f \in W_2^2(0, a) : f'(a) + \left(\beta - \frac{\alpha p}{2} + \frac{mp^2}{4}\right) f(a) = 0, f(0) = 0 \right\}.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\{a, q, t, p, \alpha, \beta\} \in \mathcal{B}_+^0$. Тогда утверждение 3) теоремы 4 справедливо с $p_1 < 0$, а вместо утверждения 2) выполняется утверждение

2') $\{(ip/2) - \lambda_k\}_{0 \neq k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{SHB}_\kappa^-$, где κ — число неположительных собственных значений оператора A_1 .

Более того, если $\{a, q, t, p, \alpha, \beta\} \in \widehat{\mathcal{B}}_+^0$, то утверждение 1) теоремы 4 также справедливо.

Рассмотрим теперь обратную задачу восстановления набора $\{a, q, t, p, \alpha, \beta\}$ по спектру задачи (1)–(3).

ТЕОРЕМА 6. Пусть последовательность $\{\lambda_k\}_{0 \neq k \in \mathbb{Z}}$ комплексных чисел удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\{\lambda_k\}_{0 \neq k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{SHB}_0^-$;
- 2) $\{\lambda_k - (ip/2)\}_{0 \neq k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{SHB}_\kappa^-$ для некоторого $\kappa \geq 0$;
- 3) выполняется условие 3) теоремы 4.

Тогда существует единственный набор $\{a, q, p, t, \alpha, \beta\} \in \mathcal{B}_-$, такой, что $\{\lambda_k\}_{0 \neq k \in \mathbb{Z}}$ является спектром задачи (1)–(3), порожденной набором $\{a, q, p, t, \alpha, \beta\}$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть последовательность $\{\lambda_k\}_{0 \neq k \in \mathbb{Z}}$ такова, что $\{-\lambda_k + (ip/2)\}_{0 \neq k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{SHB}_\kappa^-$ для некоторого $\kappa \geq 0$ и справедливо равенство (4). Тогда существует единственный набор $\{a, q, p, t, \alpha, \beta\} \in \mathcal{B}_+$, такой, что $\{\lambda_k\}_{0 \neq k \in \mathbb{Z}}$ является спектром задачи (1)–(3), порождаемой этим набором.

Положим

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi n}{\lambda_n}, \quad p = -2i \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\lambda_n - \frac{\pi(n-1)}{a} \right), \quad \chi(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{1 \leq |k| \leq n} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right).$$

Введем обозначение

$$B_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{2\pi n} \chi(\theta_n) \right), \quad \text{где } \theta_n = \frac{ip}{2} + \sqrt{\left(\frac{(4n-3)\pi}{2a} \right)^2 - \frac{p^2}{4}}.$$

Тогда $B_0 \neq 0$. Положим также

$$B_1 = -i \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{B_0} \chi(\theta_n) - \frac{\pi(4n-3)}{2a} \right).$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть последовательность $\{\lambda_k\}_{0 \neq k \in \mathbb{Z}}$ удовлетворяет условиям теоремы 7, и пусть $B_1 < p$. Тогда существует единственный набор $\{a, q, p, t, \alpha, \beta\} \in \hat{B}_+$, такой, что $\{\lambda_k\}_{0 \neq k \in \mathbb{Z}}$ является спектром задачи (1)–(3), порождаемой набором $\{a, q, p, t, \alpha, \beta\}$.

В качестве приложения рассмотрим следствия из теорем 4 и 6. Обозначим через S_l , где $l > 0$, класс наборов $\{A(s), p, \nu, \mu\}$, удовлетворяющих следующим условиям: $A(s) \in W_2^2(0, l)$ — вещественная функция, $A(s) \geq \varepsilon > 0$, а $p > 0$, $\mu > 0$, $\nu > p\mu$ — постоянные. Обозначим через S_l^0 подкласс класса S_l в котором $A(s) \in W_2^4(0, l)$.

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть $\{A(s), p, \mu, \nu\} \in S_l^0$. Тогда для спектра задачи

$$\frac{d}{ds} \left(A(s) \frac{dv}{ds} \right) + \lambda^2 v - i\lambda p v = 0, \quad (5)$$

$$v(0) = 0, \quad (6)$$

$$v'(l) + i\lambda \nu v(l) - \lambda^2 \mu v(l) = 0 \quad (7)$$

справедливы утверждения теоремы 4.

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть последовательность $\{\lambda_k\}_{0 \neq k \in \mathbb{Z}}$ комплексных чисел удовлетворяет условиям теоремы 6. Тогда для любого числа $l > 0$ существует единственный набор $\{A(s), p, \mu, \nu\} \in S_l$, такой, что $\{\lambda_k\}_{0 \neq k \in \mathbb{Z}}$ является спектром задачи (5)–(7), порождаемой этим набором.

При доказательстве использованы результаты из [5–7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Pivovarchik V. N. J. Operator Theory, **42**, 189–220 (1999).
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. I. Гостехиздат, М., 1951.
3. Крейн М. Г., Лангер Г. В кн.: Труды международного симпозиума по приложениям теории функций в механике сплошной среды. Т. 2. Наука, М., 1965, с. 283–322. См. также: Krein M. G., Langer H. Integral Equations and Operator Theory, **1**, No. 4, 539–566 (1978).
4. Van der Mee C., Pivovarchik V. N. Inverse Problems, **17**, 1831–1845 (2001).
5. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев, Наукова Думка, 1977.
6. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. ГТИЗ, М., 1956.
7. Левин Б. Я., Островский И. В. Изв. АН СССР, сер. матем., **43**, вып. 1, 87–110 (1979).

Dipartimento di Matematica, Università di Cagliari, Italy
e-mail: cornelis@bugs.unica.it

Поступило в редакцию
10 декабря 2001 г.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры
e-mail: v.pivovarchik@paco.net, vnp@ntp.odessa.ua