Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Орлов, Нормальные разложения операторных пространств над ЛВП, *Функци. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 4, 78–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa223>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:30:00

УДК 517.98

Нормальные разложения операторных пространств над ЛВП

© 2002. И. В. Орлов

В основе предлагаемого метода лежит понятие нормального индекса линейного оператора, действующего в локально выпуклых пространствах (ЛВП), который характеризует тип непрерывности оператора в терминах индексов соответствующих преднорм. Группировка операторов по их нормальным индексам приводит к нормальным разложениям операторных пространств в индуктивные шкалы ЛВП. Нормальные индексы линейных непрерывных функционалов были введены в работах [1–3] и подробно изучены в [4]. Общие свойства нормальных индексов отображений ЛВП рассмотрены в [5].

Всюду далее $\mathbb{K}$ — поле скаляров, а E, E_i, F, F^j — ЛВП с соответствующими определяющими системами преднорм $\{\|\cdot\|_s\}_{s \in S}, \{\|\cdot\|_{s_i}\}_{s_i \in S_i}, \{\|\cdot\|^t\}_{t \in T}, \{\|\cdot\|^{t_j}\}_{t_j \in T_j}$, индуктивно упорядоченными в соответствии с возрастанием преднорм. Через $(E; F)$ обозначено пространство линейных непрерывных операторов, действующих из E в F , а через $(E_1, E_2; F)$ — пространство билинейных непрерывных операторов, действующих из $E_1 \times E_2$ в F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $A \in (E; F)$. Для любого $t \in T$ положим

$$n_A(t) = \left\{ s \in S : \|A\|_s^t := \sup_{\|x\|_s \leq 1} \|Ax\|^t < +\infty \right\}. \quad (1)$$

Многозначное отображение n_A назовем *нормальным индексом* оператора A .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\text{gau}(S)$ — множество всех *лучей* в S , т.е. таких подмножеств S , которые вместе с каждым своим элементом содержат все следующие за ним элементы из S . Легко видеть, что n_A является отображением из T в $\text{gau}(S)$. Непосредственно проверяется, что множество $\text{gau}(S)$ индуктивно упорядочено отношением $S' \preccurlyeq S''$, определяемым включением $S' \supset S''$, и образует решетку; при этом n_A является возрастающим отображением. Множество всех нормальных индексов операторов из $(E; F)$ обозначим через $\mathcal{N}(E, F)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} n_{\sum_{i=1}^k c_i A_i}(t) &\preccurlyeq \bigvee_{i=1}^k n_{A_i}(t), & n_{(A_1, \dots, A_k)}(t_1, \dots, t_k) &= \bigvee_{i=1}^k n_{A_i}(t_i), \\ n_{\bigoplus_{i=1}^k A_i}(t) &= \prod_{i=1}^k n_{A_i}(t), & n_{A_2 \circ A_1} &\preccurlyeq n_{A_1} \circ n_{A_2}. \end{aligned}$$

Здесь соответственно

$$(A_1, \dots, A_k) : E \rightarrow \prod_{j=1}^k F^j, \quad \bigoplus_{i=1}^k A_i : \bigoplus_{i=1}^k E_i \rightarrow F \quad \text{и} \quad A_2 \circ A_1 : E \rightarrow G$$

(где $A_1 : E \rightarrow F, A_2 : F \rightarrow G$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Система локально выпуклых пространств $\vec{F} = \{F_q\}_{q \in Q}$, индуктивно упорядоченная в соответствии с непрерывными вложениями, т.е.

$q_1 \preccurlyeq q_2$ тогда и только тогда, когда $F_{q_1} \subseteq F_{q_2}$, называется *индуктивной шкалой ЛВП*. Сходимость в шкале есть сходимость в каком-либо из пространств шкалы. Дальнейшие определения см. в [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Для всякого нормального индекса $n \in \mathcal{N}(E, F)$ рассмотрим векторное пространство $(E; F)_n = \{A \in (E; F) : n_A \preccurlyeq n\}$. Введем в каждом $(E; F)_n$ топологию τ_n как проективную относительно топологий $\tau_n(t)$ с определяющими системами норм $\{\|\cdot\|_s\}_{s \in n(t)}$, заданных формулой (1). Индуктивную шкалу ЛВП $\overrightarrow{(E; F)} := \{((E; F)_n, \tau_n)\}_{n \in \mathcal{N}(E, F)}$ назовем *нормальным разложением* пространства $(E; F)$.

Отметим, что нормальные разложения операторных пространств обеспечивают непрерывность отображений вычисления и композиции. В небанаховом случае этого нельзя добиться [7] с помощью единой топологии в операторном пространстве.

ТЕОРЕМА 6. *Отображение вычисления $(A, x) \mapsto Ax$ непрерывно как отображение $\overrightarrow{(E; F)} \times E \rightarrow F$ по совокупности переменных. При этом, если $\overrightarrow{(E; F)}_1$ — некоторое разложение пространства $(E; F)$ в индуктивную шкалу ЛВП, при котором отображение вычисления $\overrightarrow{(E; F)}_1 \times E \rightarrow F$ непрерывно, то имеет место непрерывное вложение $\overrightarrow{(E; F)}_1 \subseteq \overrightarrow{(E; F)}$.*

ТЕОРЕМА 7. *Отображение композиции $(A_1, A_2) \mapsto A_2 \circ A_1$ непрерывно как отображение $\overrightarrow{(E; F)} \times \overrightarrow{(F; G)} \rightarrow \overrightarrow{(E; G)}$ по совокупности переменных. При этом, если $\overrightarrow{(F; G)}_1$ — некоторое разложение пространства $(F; G)$ в индуктивную шкалу ЛВП, при котором отображение композиции $\overrightarrow{(E; F)} \times \overrightarrow{(F; G)}_1 \rightarrow \overrightarrow{(E; G)}$ непрерывно, то имеет место непрерывное вложение $\overrightarrow{(F; G)}_1 \subseteq \overrightarrow{(F; G)}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 8 (гладкая замена переменных в отображениях ЛВП). Примем для отображений $f: E \rightarrow F$ произвольное определение дифференцируемости типа $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \varphi(h)$, $f'(x) \in (E; F)$, при условии, что

$$\frac{\varphi(\lambda h + o(\lambda))}{\lambda} \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0 \quad \forall h \in E \quad (2)$$

для остаточного члена $\varphi(h)$. Отметим, что условие (2) весьма слабое и выполняется практически для всех известных определений дифференцируемости (см. [8, 9]). Допустим, что отображение $g: \mathbb{R} \rightarrow E$ непрерывно дифференцируемо в точке $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, отображение $f: E \rightarrow F$ дифференцируемо в некоторой окрестности точки $x_0 = g(\lambda_0) \in E$ и производное отображение f' непрерывно в точке x_0 как отображение в шкалу $\overrightarrow{(E; F)}$. Тогда отображение $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow F$ также непрерывно дифференцируемо в точке λ_0 .

Далее, нормальные разложения операторных пространств позволяют перенести на случай операторов в ЛВП канонические изоморфизмы, широко применяемые в банаховых пространствах.

ТЕОРЕМА 9. *Для любых ЛВП $E_1, \dots, E_k$ и $F^1, \dots, F^m$ имеют место изометрические изоморфизмы*

$$\overrightarrow{\left(\bigoplus_{i=1}^k E_i; F\right)} \cong \prod_{i=1}^k \overrightarrow{(E_i; F)}, \quad \overrightarrow{\left(E; \prod_{j=1}^m F^j\right)} \cong \prod_{j=1}^m \overrightarrow{(E; F^j)}.$$

Поясним, что под изометрическим изоморфизмом ЛВП в соответствующих шкалах здесь понимаются равенства подходящих преднорм в определяющих системах. При этом в прямой сумме $\bigoplus_{i=1}^k E_i$ мы рассматриваем преднормы $\|\cdot\|_{s_1} + \dots + \|\cdot\|_{s_k}$, в прямом произведении $\prod_{j=1}^m F^j$ — преднормы $\max(\|\cdot\|^{t_1}, \dots, \|\cdot\|^{t_m})$.

Аналогичным образом, нормальные индексы билинейных непрерывных операторов приводят к изоморфизмам нормальных разложений соответствующих операторных пространств. В частности, канонический изоморфизм между линейными и билинейными формами принимает вид $\overrightarrow{(E_1; E_2^*)} \cong \overrightarrow{(E_1, E_2)^*}$. Отметим, что «функциональные» операторы $A: E_1 \rightarrow E_2^*$ находят широкое применение в теории управления [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Orlov I. V. In: Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 118, Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 321–333.
2. Orlov I. V. In: Spectral and Evolution Problems, Vol. 10 (Proc. of the Tenth Crimean Autumn Math. School), Natl. Taurida Univ. “V. Vernadsky”, Simferopol, 2000, pp. 35–39.
3. Орлов И. В. Динамические системы, **16**, 165–171 (2000).
4. Orlov I. V. Methods of Functional Analysis and Topology, **8**, No. 3, 61–71 (2002).
5. Орлов И. В. In: Spectral and Evolution Problems, Vol. 11 (Proc. of the Eleventh Crimean Autumn Math. School), Natl. Taurida Univ. “V. Vernadsky”, Simferopol, 2001, pp. 18–29.
6. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках. Наука, М., 1994.
7. Köthe G. Topologische lineare Räume. Springer-Verlag, Berlin, 1960.
8. Балабанов В. А. Некоторые вопросы нелинейного функционального анализа и их приложения. Мецниереба, Тбилиси, 1982.
9. Сухинин М. Ф. Избранные главы нелинейного анализа. Изд-во Росс. ун-та дружбы народов, М., 1992.
10. Згуровский М. З., Мельник В. С. Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. Наукова думка, Киев, 1999.

Таврический национальный университет,
Симферополь, Украина
e-mail: old@tnu.crimea.ua

Поступило в редакцию
31 октября 2001 г.

УДК 515.164.174

О функциях, все критические точки которых содержатся в шаре*

© 2002. П. Е. ПУШКАРЬ

Настоящая заметка дает ответ на следующий вопрос В. И. Арнольда ([1, задача 1993-45]). Рассмотрим на связном замкнутом многообразии функцию с конечным числом критических точек. Подходящим диффеоморфизмом можно перевести эту функцию в функцию, все критические точки которой содержатся в некотором (малом) открытом шаре. Рассмотрим ограничение построенной функции на шар. Для каких пар связных компактных многообразий без края M_1^n , M_2^n найдутся функции, совпадающие на шарах, содержащих все их критические точки? Ответ дает следующая теорема:

ТЕОРЕМА. *Такие функции существуют, если и только если эйлеровы характеристики многообразий M_1^n и M_2^n равны, $\chi(M_1^n) = \chi(M_2^n)$.*

*Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 02-01-00655).