Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Е. Пушкарь, О функциях, все критические точки которых содержатся в шаре, *Функц. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 4, 80–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa224>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 17:53:30

Поясним, что под изометрическим изоморфизмом ЛВП в соответствующих шкалах здесь понимаются равенства подходящих преднорм в определяющих системах. При этом в прямой сумме $\bigoplus_{i=1}^k E_i$ мы рассматриваем преднормы $\|\cdot\|_{s_1} + \dots + \|\cdot\|_{s_k}$, в прямом произведении $\prod_{j=1}^m F^j$ — преднормы $\max(\|\cdot\|^{t_1}, \dots, \|\cdot\|^{t_m})$.

Аналогичным образом, нормальные индексы билинейных непрерывных операторов приводят к изоморфизмам нормальных разложений соответствующих операторных пространств. В частности, канонический изоморфизм между линейными и билинейными формами принимает вид $\overrightarrow{(E_1; E_2^*)} \cong \overrightarrow{(E_1, E_2)^*}$. Отметим, что «функциональные» операторы $A: E_1 \rightarrow E_2^*$ находят широкое применение в теории управления [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Orlov I. V. In: Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 118, Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 321–333.
2. Orlov I. V. In: Spectral and Evolution Problems, Vol. 10 (Proc. of the Tenth Crimean Autumn Math. School), Natl. Taurida Univ. “V. Vernadsky”, Simferopol, 2000, pp. 35–39.
3. Орлов И. В. Динамические системы, **16**, 165–171 (2000).
4. Orlov I. V. Methods of Functional Analysis and Topology, **8**, No. 3, 61–71 (2002).
5. Орлов И. В. In: Spectral and Evolution Problems, Vol. 11 (Proc. of the Eleventh Crimean Autumn Math. School), Natl. Taurida Univ. “V. Vernadsky”, Simferopol, 2001, pp. 18–29.
6. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках. Наука, М., 1994.
7. Köthe G. Topologische lineare Räume. Springer-Verlag, Berlin, 1960.
8. Балабанов В. А. Некоторые вопросы нелинейного функционального анализа и их приложения. Мецниереба, Тбилиси, 1982.
9. Сухинин М. Ф. Избранные главы нелинейного анализа. Изд-во Росс. ун-та дружбы народов, М., 1992.
10. Згуровский М. З., Мельник В. С. Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. Наукова думка, Киев, 1999.

Таврический национальный университет,
Симферополь, Украина
e-mail: old@tnu.crimea.ua

Поступило в редакцию
31 октября 2001 г.

УДК 515.164.174

О функциях, все критические точки которых содержатся в шаре*

© 2002. П. Е. ПУШКАРЬ

Настоящая заметка дает ответ на следующий вопрос В. И. Арнольда ([1, задача 1993-45]). Рассмотрим на связном замкнутом многообразии функцию с конечным числом критических точек. Подходящим диффеоморфизмом можно перевести эту функцию в функцию, все критические точки которой содержатся в некотором (малом) открытом шаре. Рассмотрим ограничение построенной функции на шар. Для каких пар связных компактных многообразий без края M_1^n , M_2^n найдутся функции, совпадающие на шарах, содержащих все их критические точки? Ответ дает следующая теорема:

ТЕОРЕМА. *Такие функции существуют, если и только если эйлеровы характеристики многообразий M_1^n и M_2^n равны, $\chi(M_1^n) = \chi(M_2^n)$.*

*Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 02-01-00655).

Для $n = 1$ утверждение очевидно. Необходимость условия теоремы также очевидна — суммарный индекс градиентного векторного поля ограничения такой функции на шар равен эйлеровой характеристике соответствующего многообразия и зависит только от поведения функции вблизи границы шара.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ДЛЯ $n > 2$. Мы называем индексированной функцией Морса (и.ф.м.) такую морсовскую функцию на многообразии, что (1) ее значение в любой критической точке равно индексу этой критической точки; (2) функция имеет ровно один локальный максимум и один локальный минимум. Доказательство вытекает из следующих утверждений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть эйлеровы характеристики многообразий M_1^n и M_2^n равны. Найдутся такие и.ф.м. $f_i: M_i^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$), что кратности их критических значений совпадают.

Пусть $f_i: M_i^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) — и.ф.м. из утверждения 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Найдутся такие вложения $\varphi_i: D^n \rightarrow M_i^n$ n -мерного шара в многообразия M_i^n , что ограничения функций f_i на образы этого шара совпадают, $\varphi_1^* f_1 = \varphi_2^* f_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1. Напомним определение градиентно-подобного векторного поля. Рассмотрим и.ф.м. f на многообразии M . Зафиксируем для каждой критической точки систему координат, в которой эта функция имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_n) = i - \sum_{j=1}^i x_j^2 + \sum_{j=i+1}^n x_j^2.$$

Векторное поле v называется градиентно-подобным векторным полем (г.-п.в.п.) функции f , если

- (1) $(L_v f)(x) > 0$ для любой не критической точки $x \in M$;
- (2) в каждой выбранной системе координат поле v имеет вид

$$v(x_1, \dots, x_n) = - \sum_{j=1}^i x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=i+1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

в некоторой окрестности нуля.

ЛЕММА 1. Для г.-п.в.п. v общего положения в пространстве всех г.-п.в.п. рассматриваемой и.ф.м. справедливо следующее утверждение: для любой критической точки и.ф.м. найдется фазовая кривая поля v , соединяющая точку минимума данной функции с этой точкой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для поля v общего положения множество фазовых кривых, начинающихся в точке индекса p и кончающихся в точке индекса $q > p$, является гладким подмногообразием размерности $q - p - 1$ в сфере размерности $q - 1$, образованной всеми фазовыми кривыми, входящими в точку индекса q . Следовательно, можно зафиксировать по одной фазовой кривой для каждой критической точки индекса $i > 0$, начинающейся в точке индекса 0 и заканчивающейся в этой точке. $\square$

Рассмотрим некоторую и.ф.м. f на связном замкнутом многообразии M^n . Зафиксируем натуральное число $0 < i < n - 1$. Если мы научимся изменять эту функцию так, чтобы кратности критических значений i и $i + 1$ увеличились на 1, а остальные кратности не изменились, то мы сможем уравнивать кратности всех критических значений для пары функций f_1, f_2 . В самом деле, уравниваем крат-

ности критического значения 1 для этих функций, добавляя критические точки индексов 1 и 2, затем кратности критического значения 2, добавляя критические точки индексов 2 и 3. Действуя таким образом, на $(n-2)$ -м шаге получим требуемые функции, поскольку эйлеровы характеристики многообразий M_i^n совпадают.

Рассмотрим произведение $D^{n-1} \times I$, где I — отрезок $[1/2, n-1/2]$, а D^{n-1} — шар размерности $n-1$. Пусть функция g на $D^{n-1} \times I$ совпадает с проекцией на отрезок I . Можно построить такую функцию g_1 на $D^{n-1} \times I$, что

(1) в окрестности границы g_1 совпадает с g ;

(2) у функции g_1 ровно две критические точки, имеющие индексы i и $i+1$, и критические значения в этих точках равны i и $i+1$ соответственно.

Строится она следующим образом — можно создать две критические точки индексов i и $i+1$ со значениями, близкими к $i+1/2$. После чего можно изменить их значения, пользуясь техникой из [2, теорема 4.1]. Для доказательства утверждения 1 остается показать, что можно выбрать в многообразии M^n множество, диффеоморфное $D^{n-1} \times I$ и такое, что ограничение функции f на это множество совпадает с его проекцией на I . По лемме 1 найдется фазовая кривая некоторого г.-п.в.п. функции f , ведущая из минимума этой функции в максимум. Искомое множество — это часть окрестности такой кривой. $\square$

Доказательство утверждения 2. Мы соединим каждую критическую точку и.ф.м. фазовой кривой специально подобранного г.-п.в.п. с ее точкой минимума. Нужный нам шар, на котором и.ф.м. стандартна, является окрестностью объединения этих фазовых кривых.

Обозначим через k_i число критических точек индекса i и.ф.м. f . Рассмотрим выбранную в определении г.-п.в.п. координатную окрестность точки минимума. Фазовые кривые г.-п.в.п., выходящие из этой точки, выглядят в этой карте как лучи. Сопоставим каждой такой фазовой кривой ее направление, вектор единичной длины. Зафиксируем упорядоченный набор попарно непересекающихся множеств $A_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, состоящих из векторов единичной длины, причем число элементов в A_i равно k_i .

Лемма 2. Для функции f найдется такое г.-п.в.п. v , что фазовая кривая, выходящая из точки минимума с направлением, лежащим в A_i , заканчивается в критической точке индекса i и все такие критические точки различны.

Доказательство. Пользуясь леммой 1, выберем поле v и зафиксируем для каждой критической точки фазовую кривую, соединяющую ее с точкой минимума. Изотопии сферы $S^{n-1} = \{f = 1/2\}$ действуют транзитивно на конечных упорядоченных подмножествах данной мощности, поскольку $n-1 > 1$. Используя лемму изотопии Тома [2], изменим г.-п.в.п. v в множестве $\{x \mid 1/4 < f(x) < 3/4\}$ так, чтобы удовлетворялись условия леммы. $\square$

Обозначим объединение фазовых кривых, построенных в лемме 2, через $K(f)$. Окрестность множества $K(f)$ ориентируема.

Рассмотрим координатное пространство $\mathbb{R}^n$. Обозначим через K объединение отрезков, соединяющих начало координат с точками множества $\bigcup A_i$. Существуют такие гладкая функция φ , определенная на некоторой окрестности U множества K , и ее г.-п.в.п. u в этой окрестности, что выполняются следующие условия:

(1) точка 0 критическая, и в ее окрестности функция φ равна сумме квадратов координат;

(2) для каждой точки множества A_i фиксирована аффинная замена координат в окрестности этой точки, после которой функция имеет вид $i - \sum_{j=1}^i x_j^2 + \sum_{j=i+1}^n x_j^2$;

(3) все остальные точки окрестности U неособые для φ ;

(4) векторное поле u является г.-п.в.п. для такого выбора координат, и отрезки, образующие множество K , являются его фазовыми кривыми.

Существует такой диффеоморфизм π некоторой окрестности $V \subset U$ на окрестность множества $K(f)$, что $\pi^*f = \varphi|_V$. Опишем построение такого диффеоморфизма. Зафиксируем диффеоморфизмы достаточно малых окрестностей критических точек функции φ в координатные окрестности критических точек функции f , являющиеся аффинными, задающие одинаковую ориентацию окрестности множества $K(f)$ и переводящие f в φ . Отображение, заданное диффеоморфизмами в малых окрестностях, доопределим так на отрезках, образующих множество K , чтобы эти отрезки отображались в зафиксированные в лемме 2 фазовые кривые, а f переходило в φ . Построенное отображение легко продолжается на окрестности отрезков (единственное препятствие — ориентация).

Таким образом, для двух и.ф.м. с совпадающими кратностями критических точек мы нашли такие диффеоморфизмы окрестностей V_1 и V_2 множества K в соответствующее многообразие, что индуцируемая ими функция является стандартной. Ограничим эти диффеоморфизмы на звездную окрестность множества K , лежащую в $V_1 \cap V_2$. Звездное открытое множество диффеоморфно шару. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ для $n = 2$. Докажем утверждение для бутылки Клейна K^2 и тора T^2 . Представим бутылку Клейна и тор как расслоения (со слоем окружность) над окружностью $p_1: T^2 \rightarrow S^1$ и $p_2: K^2 \rightarrow S^1$. Выберем в базе расслоения функцию f , все критические точки которой лежат в некотором связном интервале $I \subset S^1$. Прообразы этого интервала $p_1^{-1}(I)$ и $p_2^{-1}(I)$ диффеоморфны. Функции p_i^*f совпадают на множествах $p_i^{-1}(I)$, и все их критические точки лежат в этих множествах. Пошевелим их одинаковым образом на множествах $p_i^{-1}(I)$ так, чтобы они стали морсовскими. Для полученных функций можно выбрать нужные нам шары, лежащие в $p_i^{-1}(I)$.

Среди двумерных многообразий одинаковую эйлерову характеристику имеют только связная сумма тора со сферой с g ручками и связная сумма бутылки Клейна со сферой с g ручками ($g = 0, 1, \dots$). Зафиксируем построенные выше функции на K^2 и T^2 , совпадающие в диске D^2 , содержащем все критические точки этих функций. Проведем операцию связного суммирования, вырезая шар D^2 . Продолжим рассматриваемые функции на приклеиваемые сферы с g ручками одинаковым образом так, чтобы получились морсовские функции. Полученные функции совпадают на приклеиваемом множестве, и все их критические точки лежат в (связном) приклеиваемом множестве. Остается выбрать нужные нам шары в приклеиваемом множестве. $\square$

Автор благодарен Я. Элиашбергу, рассказавшему про сморщивание (wrinkling), И. А. Пушкарю за полезные обсуждения и И. С. Новикову за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Задачи Арнольда. ФАЗИС, М., 2000. 2. Милнор Дж. Теорема об h -кобордизме. Мир, М., 1969.

Независимый московский университет
e-mail: pushkar@mccme.ru

Поступило в редакцию