Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Синайский, Трансляционно непрерывные функционалы на $CB(\mathbb{R})$ и их носители, *Функци. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 4, 84–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa225>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:21:43

УДК 517.98

Трансляционно непрерывные функционалы на $CB(\mathbb{R})$ и их носители

© 2002. Е. Е. Синайский

Хорошо известны трудности гармонического анализа ограниченных непрерывных функций на (даже аменабельной [1, 2]) некомпактной локально компактной группе G , связанные с разрывностью операции сдвига на банаховом пространстве, образованном такими функциями [3, 4]. В связи с этим изучение пространства функционалов на $CB(G)$, непрерывных относительно сдвигов, представляет особый интерес. Некоторые предварительные результаты в этом направлении были получены в [5]. Здесь приводятся две конструкции функционалов, непрерывных относительно сдвигов, и изучаются их свойства, связанные с носителями функционалов. Для простоты изложения мы ограничиваемся здесь важнейшим модельным примером аддитивной группы $\mathbb{R}$. Подробное изложение приведено в [9].

1. Основные понятия. Пусть $C_B(\mathbb{R})$ — банахово пространство вещественных ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}$ (с обычной равномерной нормой) и обычными решеточными операциями; пусть $U_B(\mathbb{R})$ — пространство равномерно непрерывных ограниченных функций на $\mathbb{R}$ с равномерной нормой пространства $C_B(\mathbb{R})$, $C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C_B(\mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$ и $L_1(\mathbb{R})$ — групповая алгебра относительно свертки. Пусть $C_B(\mathbb{R})'$ — сопряженное к $C_B(\mathbb{R})$ пространство; положим $F \leq G$ ($F, G \in C_B(\mathbb{R})'$), если $F(f) \leq G(f)$ для любой неотрицательной функции $f \in C_B(\mathbb{R})$, так что функционал $F \in C_B(\mathbb{R})'$ называется *неотрицательным*, если $F \geq 0$; функционал F называется *средним*, если $F \geq 0$ и $F(1) = 1$.

Пусть функция $h_n \in C_B(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, равна единице на $[-n; n]$, нулю вне $(-n-1; n+1)$ и линейна на $[-n-1; -n]$ и $[n; n+1]$. Функционал $F \in C_B(\mathbb{R})'$ называется *финитным*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} F(fh_n) = F(f)$ для любой функции $f \in C_B(\mathbb{R})$, и *инфинитным*, если $F(f) = 0$ при $f \in C_0(\mathbb{R})$, так что множество инфинитных функционалов есть поляр множества $C_0(\mathbb{R})$ относительно двойственности $\langle C_B(\mathbb{R}), C_B(\mathbb{R})' \rangle$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Любой функционал $F \in C_B(\mathbb{R})'$ можно единственным образом представить в виде $F = F_1 + F_2$, где $F_1, F_2 \in C_B(\mathbb{R})'$, F_1 финитен, а F_2 инфинитен. При этом $F_1(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(h_n f)$ для любой функции $f \in C_B(\mathbb{R})$.*

Для фиксированного $x \in \mathbb{R}$ сдвиг функции $f \in C_B(\mathbb{R})$ на элемент x определим формулой ${}_x f(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(x+t)$, а сдвиг функционала $F \in C_B(\mathbb{R})'$ на элемент $x \in \mathbb{R}$ формулой ${}_x F(f) \stackrel{\text{def}}{=} F({}_x f)$ для любой функции $f \in C_B(\mathbb{R})$. Для любого множества $U \subset \mathbb{R}$ положим $L_U(f) = \text{co}\{{}_x f, x \in U\}$, $L_U(F) = \text{co}\{{}_x F, x \in U\}$, где $f \in C_B(\mathbb{R})$, $F \in C_B(\mathbb{R})'$, а $\text{co}\{\cdot\}$ — символ выпуклой оболочки. Пусть $\mathfrak{L}(\mathbb{R})$ — множество всех инвариантных средних. *Трансляционно непрерывным (ТН-) функционалом на $C_B(\mathbb{R})$ будем называть элемент $F \in C_B(\mathbb{R})'$, удовлетворяющий условию $\lim_{t \rightarrow 0} F({}_t f) = F(f)$ для любой функции $f \in C_B(\mathbb{R})$ (или, что то же самое, $\lim_{t \rightarrow 0} {}_t F = F$ в слабой* топологии). Пространство ТН-функционалов будем обозначать через $\mathfrak{CF}(\mathbb{R})$; оно замкнуто по норме. Напомним [6], что всякий*

функционал $F \in C_B(\mathbb{R})'$ имеет единственное разложение $F = F^+ - F^-$, где $F^+, F^- \geq 0$ и $\inf(F^+, F^-) = 0$.

ТЕОРЕМА 1.2. Если $F \in C_B(\mathbb{R})'$ — финитный функционал, то $F \in \mathfrak{CF}(\mathbb{R})$. Если $F \in \mathfrak{CF}(\mathbb{R})$, то $F^+, F^- \in \mathfrak{CF}(\mathbb{R})$.

2. Теоремы существования. Приведем утверждения, позволяющие строить функционалы из $\mathfrak{CF}(\mathbb{R})$. Часть следующей теоремы, относящаяся к инвариантным функционалам, является непосредственным следствием теоремы Маркова–Какутани [8, гл. V, §10, теорема 6].

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $F \in C_B(\mathbb{R})'$. Тогда слабое* замыкание множества $L_{\mathbb{R}}(F)$ содержит такой инвариантный (относительно сдвигов) функционал m , что $\|m\| \leq \|F\|$, и если F — среднее, то $m \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$. Кроме того, для любого $\delta > 0$ слабое* замыкание множества $L_{[-\delta; \delta]}(F)$ содержит такой функционал $\Phi \in \mathfrak{CF}(\mathbb{R})$, что $\|\Phi\| \leq \|F\|$ и $\|\Phi - {}_x\Phi\| \leq (5|x|/\delta)\|F\|$ для любого x , $|x| \leq \delta$, и если F инфинитен или является средним, то то же верно для Φ .

Эта теорема позволяет по произвольному функционалу построить инвариантное среднее. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ замкнуто, и пусть M_A — векторное пространство, порожденное точечными функционалами, отвечающими элементам из A ; его слабое* замыкание назовем пространством функционалов F с носителем в A (обозначение: $\text{supp } F \subset A$). При естественном изометрическом изоморфизме между пространством $C_B(\mathbb{R})'$ и пространством $\mathcal{M}(\beta\mathbb{R})$ мер на стоун-чеховской компактификации $\beta\mathbb{R}$ группы $\mathbb{R}$ функционалам с носителем в A соответствуют те и только те меры на $\beta\mathbb{R}$, носители которых содержатся в замыкании $\overline{A}_{\beta\mathbb{R}}$ множества A в $\beta\mathbb{R}$. Из теоремы 2.1 следуют, в частности, приводимые ниже теоремы существования, утверждающие, что для любого «хорошо сдвигаемого» множества существует инвариантное среднее (тем более элемент из $\mathfrak{CF}(\mathbb{R})$) с носителем в этом множестве.

ТЕОРЕМА 2.2. Если множество $A \subset \mathbb{R}$ замкнуто и если $\bigcap_{i=1}^n (A + x_i) \neq \emptyset$ для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, то существует инвариантное среднее m с носителем в A .

Из условия теоремы нетрудно вывести, что существует функционал $F \in C_B(\mathbb{R})'$, такой, что $\text{supp } {}_x F \subset A$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Применяя к этому функционалу теорему 2.1, мы получим инвариантное среднее с требуемыми свойствами. Сходными средствами доказывается и следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ замкнуто, $\delta > 0$, и пусть множество $\bigcap_{i=1}^n (A + x_i)$ непусто и неограниченно для любых $x_1, \dots, x_n \in [-\delta; \delta]$. Тогда существует инфинитное ТН-среднее $\Phi \in C_B(\mathbb{R})'$ с носителем в множестве A , и оно удовлетворяет неравенству $\|{}_x\Phi - \Phi\| \leq 5|x|/\delta$ для любого $|x| \leq \delta$.

3. Описание множества значений инфинитных средних на данной функции $f \in C_B(\mathbb{R})$. Положим

$$M_U(f) = \inf_{g \in L_U(f)} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x), \quad U \subset \mathbb{R}, \quad m_U(f) = \sup_{g \in L_U(f)} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x), \quad U \subset \mathbb{R}.$$

Нетрудно убедиться, что существуют пределы

$$m_0(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_{[-1/n; 1/n]}(f), \quad M_0(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{[-1/n; 1/n]}(f).$$

Для любой окрестности нуля U в $\mathbb{R}$ имеем $-\|f\| \leq \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq m_0(f) \leq m_U(f) \leq m_{\mathbb{R}}(f) \leq M_{\mathbb{R}}(f) \leq M_U(f) \leq M_0(f) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \|f\|$. Напомним, что множество значений инвариантных средних на функции $f \in C_B(\mathbb{R})$ есть $[m_{\mathbb{R}}(f); M_{\mathbb{R}}(f)]$ (см., например, [7, Theorem 1]). Множество значений ТН-функционалов не описано столь же исчерпывающим образом, но имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.2. *Множество значений инфинитных ТН-средних на функции $f \in C_B(\mathbb{R})$ содержится в $[m_0(f); M_0(f)]$ и содержит $(m_0(f); M_0(f))$.*

Используя теорему 3.2, можно описать множество функций из $C_B(\mathbb{R})$, на которых все инфинитные ТН-средние обращаются в 0.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть $f \geq 0$ принадлежит $C_B(\mathbb{R})$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- 1) $F(f) = 0$ для любого инфинитного среднего $F \in \mathfrak{CF}(\mathbb{R})$;
- 2) для любых $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдутся $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, и x_i , $|x_i| < \delta$, такие, что $\|\sum_{i=1}^n \lambda_i(x_i f)\| \leq \varepsilon$, где символом $\|\cdot\|$ обозначена норма в факторпространстве $C_B(\mathbb{R})/C_0(\mathbb{R})$;
- 3) существует $A > 0$, такое, что $M_{[-A; A]}(f) = 0$.

4. Некоторые классы функционалов. Для некоторых классов функционалов из $C_B(\mathbb{R})'$ можно дать условия их принадлежности пространству $\mathfrak{CF}(\mathbb{R})$.

4.1. Две конструкции функционалов из $\mathfrak{CF}(\mathbb{R})$. Введем два класса функционалов из $\mathfrak{CF}(\mathbb{R})$. Первый класс — замыкание по норме подпространства в $C_B(\mathbb{R})'$, порожденного функционалами вида $\Phi(f) = m(gf)$, где $m \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$, а $g \in U_B(\mathbb{R})$. Второй класс — замыкание по норме подпространства в $C_B(\mathbb{R})'$, порожденного функционалами вида $\Phi(f) = F(h * f)$, где $F \in C_B(\mathbb{R})'$, а $h \in L_1(\mathbb{R})$. С помощью конструкции $\Phi(f) = F(h * (gf))$, где $F \in C_B(\mathbb{R})'$, $h \in L_1(\mathbb{R})$, $g \in U_B(\mathbb{R})$, также получается элемент из $\mathfrak{CF}(\mathbb{R})$, и он обязательно принадлежит второму классу. Эти два класса пересекаются, не принадлежат друг другу, и лежащие в них инфинитные функционалы не исчерпывают всех инфинитных функционалов из $\mathfrak{CF}(\mathbb{R})$.

4.2. Функционалы с носителем в счетном замкнутом множестве.

ТЕОРЕМА 4.1. *Если $F \in C_B(\mathbb{R})'$, где $A \subset \mathbb{R}$ — счетное замкнутое множество и $\text{supp } F \subset A$, то $F \in \mathfrak{CF}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда F финитен.*

Слабой* предельной точкой последовательности функционалов $F_n \in C_B(\mathbb{R})'$, $n \in \mathbb{N}$, назовем любой функционал из $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{F_m \mid m \geq n\}}$, где черта означает слабое* замыкание. Рассмотрим случай, когда каждый функционал F_n является линейной комбинацией точечных функционалов. Если не наложить никаких дополнительных условий, то множество предельных точек такой последовательности может совпадать с множеством всех функционалов из $C_B(\mathbb{R})'$. Ситуация изменится, если потребовать, чтобы любая слабая* предельная точка последовательности $\{F_n\}$ была инфинитным функционалом (для произвольной последовательности $\{F_n\}$ это равносильно тому, что $\lim_n F_n(f) = 0$ для любой функции $f \in C_B(\mathbb{R})$ с компактным носителем). Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть $\{F_n\}$, $F_n \in C_B(\mathbb{R})'$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность неотрицательных линейных комбинаций точечных функционалов, таких, что любая слабая* предельная точка F этой последовательности есть инфинитный функционал. Тогда если $F \neq 0$, то F — не ТН-функционал.*

4.3. *Функционалы со сжимающимся носителем.* Положим $P_1 = \{f \in L_1(\mathbb{R}) \mid f \geq 0 \text{ и } \int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 1\}$. Каждой функции $h \in P_1$ сопоставим (финитный) функционал $F_h \in C_B(\mathbb{R})'$ по формуле $F_h(f) = \int_{\mathbb{R}} h(t)f(t) dt$. Пусть $\hat{P}_1 = \{F_h, h \in P_1\}$. Инфинитный функционал $F \in C_B(\mathbb{R})'$ назовем функционалом со сжимающимся носителем, если $F = \lim_{\alpha} F_{\alpha}$ (в слабой* топологии на $C_B(\mathbb{R})'$), где

- 1) $F_{\alpha} \in \hat{P}_1$, $\text{supp } F_{\alpha} \subset [a_{\alpha}; b_{\alpha}]$ и $\lim_{\alpha} (b_{\alpha} - a_{\alpha}) = 0$;
- 2) для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется α_0 , такой, что $[a_{\alpha}; b_{\alpha}] \cap [-n; n] = \emptyset$ для $\alpha \geq \alpha_0$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $F = \sum_{i=1}^n c_i F_i$, где $c_i \in \mathbb{R}$ и $F_i \in C_B(\mathbb{R})'$ — инфинитные функционалы со сжимающимся носителем. Если $F \neq 0$, то F — не ТН-функционал.

Пусть $x \in \beta\mathbb{R}$. Определим функционал $p_x(f) = \tilde{f}(x)$, где $f \in C_B(\mathbb{R})$, а $\tilde{f}$ — непрерывное продолжение функции f на $\beta\mathbb{R}$. Тогда для $x_0 \in \beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ функционал p_{x_0} инфинитен, причем p_{x_0} есть слабая* предельная точка множества функционалов $\{p_x, x \in \mathbb{R}\}$. Отсюда следует, что p_{x_0} — функционал со сжимающимся носителем и, следовательно, не ТН-функционал. Таким образом, $p_x \in \mathfrak{E}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathbb{R}$.

4.4. *Функционалы с носителем в быстро убывающем множестве*

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k; b_k]$, где $b_k < a_{k+1}$ для $k \in \mathbb{N}$ и $a_k \rightarrow \infty$. Пусть $f_n \in P_1$, $n \in \mathbb{N}$, и пусть $\text{supp } f_n \subset A \cap [n; +\infty)$. Положим $F_n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f_n(t)f(t) dt$. Если $\int_{[n, n+1]} \chi_A(t) dt = O(n^{-\varepsilon})$ (при $n \rightarrow +\infty$) для некоторого $\varepsilon > 0$, то любая слабая* предельная точка последовательности $\{F_n\}$ — не ТН-функционал.

Согласно теореме 4.5, эта оценка скорости убывания множества A , гарантирующая, что предельные точки последовательности $\{F_n\}$ — не ТН-функционалы, является точной.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть функция $\psi: \mathbb{N} \mapsto [2; +\infty)$ возрастает, и пусть $\psi(n) = O(n^{\varepsilon})$ ($n \rightarrow +\infty$) для любого $\varepsilon > 0$. Можно найти множество $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k; b_k]$, $b_k < a_{k+1}$ для $k \in \mathbb{N}$ и $a_k \rightarrow \infty$, такое, что $\int_{[n, n+1]} \chi_A(t) dt = O(1/\psi(n))$ ($n \rightarrow +\infty$), и функционалы $F_n \in \hat{P}_1$, $\text{supp } F_n \subset A \cap [n; +\infty)$, такие, что множество слабых* предельных точек последовательности $\{F_n\}$ содержит инвариантное среднее.

Автор искренне признателен рецензенту за очень полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах. Мир, М. 1973.
2. Paterson A. L. T. Amenability. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1988
3. Saeki S. Trans. Amer. Math. Soc., **282**, No. 1, 403–414 (1984).
4. Graham C. C., Lau A. T. M., Leinert M. Trans. Amer. Math. Soc. **328**, No. 2, 589–618 (1991).
5. Sinaiskii E. E. Russian J. Math. Phys., **7**, No. 4, 473–481 (2000).
6. Шефер Х. Топологические векторные пространства. Мир, М., 1971.
7. Shtern A. I. Russ. J. Math. Phys., **1**, no. 1, 115–125 (1993).
8. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Т. I. ИЛ, М., 1962.
9. Sinaiskii E. E. Russ. J. Math. Phys., **9**, No. 2, 202–232 (2002).