Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Туровский, В. С. Шульман, Инвариантные подпространства операторных алгебр Ли и теория K -алгебр, *Функци. анализ и его прил.*, 2002, том 36, выпуск 4, 88–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa226>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:09:40

УДК 517.983

Инвариантные подпространства операторных алгебр Ли и теория K -алгебр

© 2002. Ю. В. Туровский, В. С. Шульман

Данная работа находится на стыке теорий бесконечномерных алгебр Ли и инвариантных подпространств. Изучение таких алгебр, подчиненных некоторым условиям компактности, проводится с помощью анализа их неприводимых представлений, который, в свою очередь, основывается на существовании общего инвариантного подпространства у семейства компактных операторов, связанных лиевыми соотношениями. Фундаментом этого направления являются теоремы Энгеля и Ли, утверждающие, что неприводимые конечномерные представления нильпотентных и соответственно разрешимых конечномерных комплексных алгебр Ли одномерны. Если рассматривать бесконечномерные представления компактными операторами, то доказать аналогичные теоремы далеко не просто даже в случае коммутативных алгебр Ли; для одномерных алгебр это было сделано фон Нейманом, Ароншайном и Смитом [1], для алгебр произвольной размерности — В. И. Ломоносовым [2].

Естественный банахов аналог класса нильпотентных (соответственно конечномерных) алгебр Ли — *энгелевы алгебры Ли* (соответственно *K -алгебры Ли*), т. е. такие алгебры Ли, на которых операторы присоединенного представления квазинильпотентны (соответственно компактны). «Компактная» версия теоремы Энгеля получена в [3]: неприводимые представления энгелевой алгебры Ли компактными операторами одномерны. Для классически разрешимых (т. е. тех, у которых производный ряд обрывается на конечном шаге) бесконечномерных алгебр Ли соответствующий «компактный» аналог получен в [4].

Мы установим одномерность неприводимых представлений более широкого класса, естественного аналога класса разрешимых в категории банаховых алгебр Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Банахова алгебра Ли L называется *E -разрешимой* или алгеброй Ли, разрешимой по Энгелю (соответственно *НК-алгеброй Ли* или, подробнее, алгеброй Ли с гипокompактным присоединенным действием), если для любого замкнутого собственного идеала J факторалгебра L/J имеет ненулевой замкнутый энгелев идеал (соответственно идеал, являющийся K -алгеброй).

Полученные результаты проясняют структуру банаховых алгебр Ли с компактным присоединенным действием (т. е. K -алгебр Ли), исследования которых были начаты в семидесятые годы Гурарием и Ваксманом [5] и Войтыньским [6, 7].

1. Пусть, как обычно, $B(X)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве X , $K(X)$ — идеал всех компактных операторов, а структура алгебры Ли в $B(X)$ задана коммутатором $[T, S] = TS - ST$. *Операторная алгебра Ли* — это подалгебра алгебры Ли $B(X)$. Если $M \subset B(X)$, то через $A(M)$ обозначается замкнутая (ассоциативная) подалгебра в $B(X)$, порожденная M . Замкнутое подпространство $Y \subset X$ называется *инвариантным* для множества операторов $M \subset B(X)$, если $TY \subset Y$ при любом $T \in M$; Y *гиперинвариантно* для M , если оно инвариантно для $M \cup M'$, где $M' = \{S \in$

$B(X) : [S, T] = 0, T \in M$ — коммутант множества M . Множество операторов называется *вольтерровым*, если его элементы вольтерровы, т. е. компакты и квазинильпотентны.

Начнем с вопросов существования инвариантных подпространств у алгебр Ли компактных операторов. Наш первый результат устанавливает, что наличие (обилие) в операторной алгебре Ли операторов конечного ранга является условием, препятствующим существованию инвариантных подпространств, что для теории инвариантных подпространств несколько необычно.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если замкнутая алгебра Ли компактных операторов имеет ненулевой идеал, не содержащий ненулевых операторов конечного ранга, то она имеет нетривиальное инвариантное подпространство.*

Следующая теорема — центральный результат статьи; на ней основаны доказательства большинства последующих утверждений.

ТЕОРЕМА 1.2. *Если алгебра Ли L компактных операторов имеет ненулевой вольтерров идеал J , то у нее есть нетривиальное гиперинвариантное подпространство.*

Частный случай теоремы 1.2 — это теорема о существовании инвариантных подпространств для вольтерровых алгебр Ли [3]. Разумеется, доказательство теоремы 1.2 (так же, как и теоремы 1.1) использует этот результат, но вместе с тем требует достаточно кропотливого анализа спектральных многообразий операторов дифференцирования вольтерровых алгебр. Метод работает и при более слабых ограничениях. Так, теорема 1.2 останется верной, если предполагать, что L состоит из операторов Рисса (но, правда, в таком случае L должна быть замкнутой), а J можно считать E -разрешимым. Если же J порожден операторами конечного ранга (для $L \subset K(X)$ это основной случай, как показывает теорема 1.1), то от L можно лишь требовать, чтобы она состояла из операторов со счетными спектрами.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Пусть L — операторная алгебра Ли. Среди всех вольтерровых идеалов алгебры L есть наибольший идеал $V(L)$; он состоит из всех операторов $T \in L$, которые принадлежат радикалу Джекобсона алгебры $A(L \cap K(X))$.*

Скажем, что оператор $T \in B(X)$ дифференцирует множество операторов M , если $[T, S] \in M$ для всех $S \in M$.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. *Пусть A — алгебра вольтерровых операторов в X . Тогда существует нетривиальное подпространство $Y \subset X$, инвариантное для всех компактных операторов, дифференцирующих A .*

Неизвестно, можно ли здесь снять ограничение компактности дифференцирующих операторов. В некоторых важных случаях ответ утвердителен.

СЛЕДСТВИЕ 1.5. *Пусть A — коммутативная алгебра вольтерровых операторов, замыкание которой в слабой операторной топологии содержит единственный оператор (или, более общим образом, такая, что пересечение замыканий в слабой операторной топологии алгебр A^n не сводится к нулю; здесь A^n — алгебра, порожденная всеми произведениями n элементов алгебры A). Тогда существует нетривиальное подпространство, инвариантное для всех операторов, дифференцирующих A .*

Ситуацию хорошо иллюстрирует пример алгебры, порожденной вольтерровым оператором интегрирования V . Существует много операторов, которые ее дифференцируют, однако все они сохраняют (исследованную во многих работах) решетку инвариантных подпространств оператора V .

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть L — конечномерная алгебра Ли компактных операторов в бесконечномерном банаховом пространстве. Тогда существует нетривиальное подпространство, инвариантное для всех операторов, дифференцирующих L .

2. Пусть L — банахова алгебра Ли, т. е. алгебра Ли, являющаяся банаховым пространством со скобкой Ли, совместно непрерывной по обоим аргументам. Ее представлением называется непрерывный (лиев) гомоморфизм в $B(X)$. В частности, присоединенное представление ad_L действует на самой L по формуле $(\text{ad}_L a)(x) = [a, x]$.

ТЕОРЕМА 2.1. Всякое неприводимое представление E -разрешимой банаховой алгебры Ли компактными операторами одномерно.

ТЕОРЕМА 2.2. Всякое неприводимое представление НК-алгебры Ли компактными операторами конечномерно.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Всякий минимальный замкнутый лиев идеал K -алгебры Ли конечномерен (и, значит, либо коммутативен, либо полупрост).

В работе [5] был введен класс разрешимых K -алгебр Ли. Такие K -алгебры Ли определялись двумя эквивалентными условиями: отсутствием конечномерных полупростых подалгебр или факторалгебр Ли. Там же было доказано, что всякая K -алгебра Ли L содержит наибольший разрешимый идеал $R(L)$.

ТЕОРЕМА 2.4. (а) K -алгебра Ли разрешима в смысле [5] тогда и только тогда, когда она E -разрешима.

(б) K -алгебра Ли E -разрешима тогда и только тогда, когда все ее неприводимые представления компактными операторами одномерны.

(с) $R(L)$ образован всеми элементами K -алгебры Ли L , которым при неприводимых (конечномерных) представлениях компактными операторами соответствуют операторы, кратные единичному.

Из следствия 1.3 легко вытекает существование в любой K -алгебре Ли L наибольшего энгелева идеала $E(L)$. Обозначим, следуя [5], через $\Lambda(L)$ пересечение ядер всех (конечномерных) неприводимых представлений компактными операторами алгебры Ли L .

СЛЕДСТВИЕ 2.5. $[L, R(L)] \subset \Lambda(L) \subset E(L) \subset R(L)$ для всякой K -алгебры Ли L .

В [5] эти включения и существование идеала $E(L)$ были доказаны для произвольной локально конечной K -алгебры Ли L (т. е. имеющей плотный идеал, каждое конечное подмножество которого порождает конечномерную подалгебру Ли).

Авторы признательны Д. Белтице, М. Шабаку и В. Л. Островскому за полезные обсуждения рассматриваемых в работе вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aronszajn N. A., Smith K. T. Ann. Math., **60**, 345–350 (1954).
2. Ломоносов В. И. Функц. анализ и его прил., **7**, вып. 3, 55–57 (1973).
3. Shulman V. S., Turovskii Yu. V.

J. Funct. Anal., **177**, 383–441 (2000). **4.** *Shulman V. S., Turovskii Yu. V.* In: Spectral and Evolutionary Problems, Vol. 9. Simferopol, 1999, pp. 38–44. **5.** *Ваксман Л. Л., Гурарий Д. Л.* Теория функций, функц. анализ и его прил., **24**, 16–32 (1975). **6.** *Wojtyński W.* Stud. Math., **59**, No. 3, 263–273 (1977). **7.** *Wojtyński W.* Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math., **26**, No. 2, 105–107 (1978).

Институт математики и механики НАН Азербайджана
e-mail: yuri@sinam.net

Поступило в редакцию
7 мая 2002 г.

Вологодский политехнический институт, кафедра математики
e-mail: shulman_v@yahoo.com