Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Э. Бирюк, Спектральные свойства решений уравнения Бюргерса с малой диссипацией, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 1, 1–15

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa227>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 17:47:00

УДК 517.9

Спектральные свойства решений уравнения Бюргерса с малой диссипацией

© 2001. А. Э. БИРЮК

§1. Введение

В этой работе мы рассматриваем задачу Коши для одномерного ($\dim x = 1$) параболического уравнения типа Бюргерса

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = \delta u_{xx} \quad (1.1)$$

с начальными данными

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (1.2)$$

подчиненного периодическим краевым условиям

$$u(t, x \pm \ell) = u(t, x). \quad (1.3)$$

Здесь δ — малый (< 1) положительный параметр, начальные данные — C^∞ -гладкая и ℓ -периодическая функция $u_0(\cdot)$. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ бесконечно гладкая и равномерно выпуклая ($f'' \geq \sigma > 0$).

Из классической теории параболических уравнений (см., например, [1]) известно, в частности, что задача (1.1)–(1.3) при каждом $\delta > 0$ имеет единственное решение $u = u^\delta(t, x)$, которое является C^∞ -гладким. Кроме того, известно, что при $\delta \rightarrow +0$ решение задачи (1.1)–(1.3) сходится к так называемому (слабому) энтропийному решению квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0. \quad (1.1')$$

(См. [2], где этот вопрос изучен при самых общих предположениях.) Более того, в [3] показано, что скорость сходимости в $L_1(\mathbb{R})$ не ниже $\text{Const} \cdot \sqrt{\delta}$. По поводу нашего случая см. дополнение.

Отметим, что уравнение (1.1'), вообще говоря, не имеет даже непрерывных решений; поэтому рассматривают слабые решения в смысле соответствующего интегрального тождества. Однако в этом классе происходит потеря единственности. Условие энтропии производит выбор из множества решений одного, которое оказывается наиболее естественным (с точки зрения физики).

Мы будем изучать поведение при $\delta \rightarrow 0$ соболевских H^m -полунорм

$$\|u\|_m^2 = \int \left| \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right|^2 dx.$$

Всюду в этой работе под $\int \dots dx$ (интеграл без пределов) понимается $\int_0^\ell \dots dx = \int_{x_0}^{x_0+\ell} \dots dx$ — интеграл по периоду или, что то же самое, интеграл по окружности $S = \mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}$. Приставку «полу» в слове «полунорма» будем для краткости опускать.

Соболевская H^m -норма является функцией от времени t , и нас будет интересовать усреднение

$$\langle \|u\|_m^2 \rangle_{[0,T]} = \frac{1}{T} \int_0^T \int \left| \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right|^2 dx dt.$$

Мы получим, что при $m \geq 1$ для достаточно малых δ и при всех t имеет место неравенство

$$\|u\|_m \leq C_m \left(\frac{1}{\delta} \right)^{m-1/2}, \quad (1.4)$$

в то время как для некоторого T , определенного начальными данными задачи (1.1)–(1.3) (см. формулу (3.2) ниже) имеет место противоположное неравенство

$$\langle \|u\|_m^2 \rangle_{[0,T]}^{1/2} \geq c_m \left(\frac{1}{\delta} \right)^{m-1/2}. \quad (1.5)$$

Здесь константы c_m и C_m не зависят от δ и могут быть явно описаны в терминах C^k -норм ($k \leq m+1$) начальных данных задачи (1.1)–(1.3).

Соболевские H^m -нормы можно простым образом выразить через коэффициенты Фурье:

$$\|u\|_m^2 = \left(\frac{2\pi}{\ell} \right)^{2m} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} s^{2m} |\hat{u}_s|^2, \quad \text{где } \hat{u}_s = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \int u(x) e^{-2\pi i s x / \ell} dx.$$

Эта связь позволяет получить из (1.4) и (1.5) некоторую информацию о поведении коэффициентов Фурье решения при $\delta \rightarrow +0$. А именно, выбрав произвольное $\theta > 0$, мы обозначим через $\hat{A}_{s,\theta}^2$ среднее значение величин $|\hat{u}_k|^2(t)$ при $t \in [0; T]$ и при $\delta^{-s+\theta} < |k| \leq \delta^{-s-\theta}$, т. е.

$$\hat{A}_{s,\theta}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\sum_{\delta^{-s+\theta} < |k| \leq \delta^{-s-\theta}} |\hat{u}_k|^2(t)}{\sum_{\delta^{-s+\theta} < |k| \leq \delta^{-s-\theta}} 1} dt,$$

где $s > 0$. Тогда при достаточно малых δ величины $\hat{A}_{s,\theta}^2$ удовлетворяют следующим оценкам:

$$\text{при } s > 0 \quad \hat{A}_{s,\theta}^2 < \frac{\ell}{\pi^2} \left| \frac{du_0}{dx} \right|_{L_1}^2 \delta^{2s}, \quad (1.6)$$

$$\text{при } s > 1 + \theta \quad \hat{A}_{s,\theta}^2 < \left(\frac{\ell}{2\pi} \right)^{2m} C_m^2 \delta^{2+2m(s-1-\theta)} \quad \forall m > 0, \quad (1.7)$$

$$\text{при } s = 1 \quad \hat{A}_{1,\theta}^2 > \left(\frac{\ell}{2\pi} \right)^2 \frac{c_1^2}{4} \delta^{2+2\theta}. \quad (1.8)$$

Установление оценок (1.4)–(1.8) для задачи (1.1)–(1.3) и является главной целью настоящей работы.

Отметим, что соотношения (1.6)–(1.8) тесно связаны с так называемыми колмогоровскими асимптотиками для свободно затухающей турбулентности (т. е.

турбулентности без внешней силы), описываемой уравнением Бюргерса (1.1). В частности, из них следует, что колмогоровский диссипационный масштаб решений этого уравнения равен δ , а показатель их спектрального закона равен двум (см. [8], ср. [9, 10]).

В дальнейшем нам потребуются интерполяционные неравенства для норм Соболева и для C^k -норм:

$$\|u\|_k \leq \|u\|_0^{1-k/m} \|u\|_m^{k/m} \quad (0 \leq k \leq m), \quad (1.9)$$

$$|u|_k \leq C_{mk} |u|_0^{1-k/m} |u|_m^{k/m} \quad (0 \leq k \leq m). \quad (1.10)$$

Здесь $|u|_k = \max_{x \in S} |d^k u / dx^k|$. Доказательство неравенства (1.9) настолько просто, что мы его приведем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^{2k} \|u\|_k^2 &= \sum (|\hat{u}_s|^2)^{(m-k)/m} (|\hat{u}_s|^2 s^{2m})^{k/m} \\ &\leq \left(\sum |\hat{u}_s|^2\right)^{(m-k)/m} \left(\sum |\hat{u}_s|^2 s^{2m}\right)^{k/m} = \|u\|_0^{1-k/m} \left(\left(\frac{\ell}{2\pi}\right)^{2m} \|u\|_m^2\right)^{k/m}. \end{aligned}$$

Доказательство неравенства (1.10) не является тривиальным. Интересующийся читатель может найти его в [4]. Там же найдено точное значение констант C_{mk} в неравенстве (1.10):

$$C_{mk} = \frac{K_{m-k}}{K_m^{1-k/m}}, \quad \text{где } K_i = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{(-1)^{i+1}}{3^{i+1}} + \frac{1}{5^{i+1}} + \frac{(-1)^{i+1}}{7^{i+1}} + \dots\right).$$

Нам понадобится легко проверяемый факт, что

$$(C_{m1})^m \leq 2. \quad (1.11)$$

Кроме этого, мы будем использовать неравенство Гальярдо–Ниренберга для периодических функций:

$$\left| \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right|_{L_{2m/\alpha}} \leq 4^{\alpha(m-\alpha)} |u|_{L_\infty}^{1-\alpha/m} \left| \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right|_{L_2}^{\alpha/m}, \quad (1.12)$$

где α — целое число между 0 и m (см. [5, pp. 106–107]).

Символ $u^{(m)}$ обозначает $\partial^m u / \partial x^m$; аналогично $u_x = \partial u / \partial x$, $u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2$ и $u_t = \partial u / \partial t$. Символ L_p , если не оговорено противное, обозначает пространство $L_p(S)$.

Автор благодарен проф. С. Б. Куksину за постановку задачи и внимание к работе.

§2. Оценки сверху

Обозначим через u_+ и u_- соответственно максимум и минимум начальной функции $u_0 = u_0(x)$. Осцилляция решения в момент времени t — это $\text{osc}_x u(t, x) = \max_x u(t, x) - \min_x u(t, x)$. Введем число

$$D = \frac{1}{2} \text{osc}_x u \Big|_{t=0} = \frac{u_+ - u_-}{2}. \quad (2.1)$$

Тогда в силу принципа максимума $u_- \leq u(t, x) \leq u_+$ и

$$\frac{1}{2} \operatorname{osc}_x u(t, x) \leq D \quad \text{для любого } t. \quad (2.2)$$

Умножим уравнение (1.1) на u и проинтегрируем по периоду:

$$\int uu_t dx = -\delta \int u_x^2 dx, \quad (2.3)$$

или

$$\delta \int u_x^2 dx = - \int uu_t dx \leq \frac{\operatorname{osc}_x u(t, x)}{2} |u_t|_{L_1} \leq D |u_t|_{t=0}|_{L_1}.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались неравенством (2.2) и тем фактом, что величина $|u_t|_{L_1} = \int |(\partial u(t, x)/\partial t)| dx$ не возрастает по t (см. лемму А в дополнении). Положим

$$C_1 = \sqrt{D \cdot \left(\int \left| \frac{df(u_0)}{dx} \right| dx + \int \left| \frac{d^2 u_0}{dx^2} \right| dx \right)}. \quad (2.4)$$

Выражая $u_t|_{t=0}$ из уравнения (1.1), находим, что

$$\|u^\delta\|_1 \leq C_1 \delta^{-1/2} \quad (2.5)$$

при всех $t \geq 0$ и $0 < \delta < 1$.

Дифференцируем уравнение (1.1) $m-1$ раз по переменной x , умножаем на $\partial^{m+1} u / \partial x^{m+1}$, интегрируем по периоду и результат запишем в таком виде:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \left(\frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right)^2 dx = -\delta \int \left(\frac{\partial^{m+1} u}{\partial x^{m+1}} \right)^2 dx + \int \frac{\partial^{m+1} u}{\partial x^{m+1}} \frac{\partial^m f(u)}{\partial x^m} dx. \quad (2.6)$$

Перед тем, как получить основные оценки этого параграфа, докажем вспомогательное техническое неравенство:

ЛЕММА. Для любого $m \geq 1$ имеет место неравенство

$$\int \left| \frac{\partial^{m+1} u}{\partial x^{m+1}} \right| \left| \frac{\partial^m f(u)}{\partial x^m} \right| dx \leq B_m \|u\|_m \|u\|_{m+1}, \quad (2.7)$$

где

$$B_m = Q_m |f(\cdot)|_{C^m[u_-, u_+]} \max(1, |u_0|_{L_\infty}^{m-1}), \quad (2.8)$$

а Q_m зависит лишь от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Методом математической индукции легко можно вывести следующую формулу:

$$\frac{\partial^m f(u)}{\partial x^m} = \sum_{j=1}^m \frac{d^j f(u)}{du^j} \left(\sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_j = m \\ 1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_j}} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}^{j, m} u^{(\alpha_1)} u^{(\alpha_2)} \dots u^{(\alpha_j)} \right),$$

где $A_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}^{j,m}$ — некоторые неотрицательные целые числа. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int \left| \frac{\partial^{m+1} u}{\partial x^{m+1}} \right| \left| \frac{\partial^m f(u)}{\partial x^m} \right| dx \\ & \leq \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_j = m \\ 1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_j}} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}^{j,m} \left| \frac{d^j f(u)}{du^j} \right| \int |u^{(m+1)}| |u^{(\alpha_1)}| \dots |u^{(\alpha_j)}| dx \end{aligned}$$

(применяем неравенство Гёльдера (заметим, что $1/2 + \alpha_1/(2m) + \dots + \alpha_j/(2m) = 1$))

$$\leq \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_j = m \\ 1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_j}} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}^{j,m} \left| \frac{d^j f(u)}{du^j} \right|_{L_\infty} |u^{(m+1)}|_{L_2} |u^{(\alpha_1)}|_{L_{2m/\alpha_1}} \dots |u^{(\alpha_j)}|_{L_{2m/\alpha_j}}$$

(используем неравенство (1.12) (заметив, что $\prod_{i=1}^j 4^{\alpha_i(m-\alpha_i)} \leq 4^{m^2}$))

$$\begin{aligned} & \leq \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_j = m \\ 1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_j}} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}^{j,m} \left| \frac{d^j f(u)}{du^j} \right|_{L_\infty} |u^{(m+1)}|_{L_2} 4^{m^2} |u|_{L_\infty}^{j-1} |u^{(m)}|_{L_2} \\ & = \left(\sum_{j=1}^m \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_j = m \\ 1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_j}} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}^{j,m} 4^{m^2} \left| \frac{d^j f(u)}{du^j} \right|_{L_\infty} |u|_{L_\infty}^{j-1} \right) \|u\|_m \|u\|_{m+1}. \end{aligned}$$

Так как $|u|_{L_\infty} \leq |u_0|_{L_\infty}$ по принципу максимума, то лемма доказана. $\square$

Из (2.6) и (2.7) следует оценка

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_m^2 \leq -\delta \|u\|_{m+1}^2 + B_m \|u\|_m \|u\|_{m+1} = \|u\|_{m+1} (-\delta \|u\|_{m+1} + B_m \|u\|_m). \quad (2.9)$$

ТЕОРЕМА. При $m \in \mathbb{N}$,

$$\delta \leq \delta'_0 = B_m \left(\frac{C_1}{\sqrt{B_m} \|u_0\|_m} \right)^{1/(m-1/2)} \quad (2.10)$$

и при всех $t \geq 0$ имеет место неравенство

$$\|u(t, \cdot)\|_m \leq B_m^{m-1} C_1 \delta^{-m+1/2}, \quad (2.11)$$

где C_1 и B_m определены в (2.4) и (2.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интерполяционное неравенство (1.9) запишем для производной:

$$\|u\|_m \leq \|u\|_1^{1/m} \|u\|_{m+1}^{(m-1)/m}, \quad (2.12)$$

и перепишем его в таком виде: $\|u\|_{m+1} \geq \|u\|_m (\|u\|_m / \|u\|_1)^{1/(m-1)}$. Теперь из (2.9) с учетом последнего неравенства получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_m^2 \leq \|u\|_{m+1} \|u\|_m \left(-\delta \left(\frac{\|u\|_m}{\|u\|_1} \right)^{1/(m-1)} + B_m \right).$$

То есть при $\|u\|_m > (B_m/\delta)^{m-1} \|u\|_1$ норма $\|u\|_m$ убывает. С учетом (2.5) заключаем, что

$$\text{если } \|u(t, \cdot)\|_m > B_m^{m-1} C_1 \delta^{-m+1/2}, \quad \text{то норма } \|u\|_m \text{ убывает.} \quad (2.13)$$

Условие (2.10) означает, что неравенство (2.11) выполняется при $t = 0$. А в силу импликации (2.13) норма $\|u\|_m$ не сможет превзойти правую часть этого неравенства. $\square$

§3. Оценки снизу

В этом параграфе мы воспользуемся явной формулой для слабого энтропийного решения $u^0(t, x)$ квазилинейного уравнения (1.1'), полученной Лаксом (см. [6]).

Пусть функция g является преобразованием Лежандра выпуклой гладкой функции f . Пусть $y_{\min} = y_{\min}(t, x)$ обозначает точку глобального минимума вспомогательной функции $\psi_{t,x}(y) = \int_0^y u_0(\eta) d\eta + t \cdot g((x - y)/t)$. Эта точка однозначно определена при почти всех t и x . Тогда $u^0(t, x) = g'((x - y_{\min}(t, x))/t)$.

Пусть $M = \ell^{-1} \int u_0 dx$ — среднее значение начальных данных. Тогда из явной формулы для решения уравнения (1.1') в нашем (ℓ -периодическом) случае следует оценка

$$\sup_x |u^0(t, x) - M| \leq \frac{\ell}{t\sigma}. \quad (3.1)$$

Действительно, пусть y_1 — точка минимума функции $t \cdot g((x - y)/t) + My$, т. е. $g'((x - y_1)/t) = M$. Поскольку функции f' и g' взаимно обратны, то $(x - y_1)/t = f'(M)$. Функция $\int_0^y u_0(\eta) d\eta - My$ является ℓ -периодической; поэтому $|y_{\min} - y_1| < \ell$. Таким образом, $(x - y_{\min})/t = f'(M) + \kappa$, где $|\kappa| \leq \ell/t$. Теперь мы можем написать

$$|u^0(t, x) - M| = |g'(f'(M) + \kappa) - g'(f'(M))| \leq \sup |g''| \cdot |\kappa| \leq \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{t},$$

что и утверждается в (3.1). Как следствие получаем, что $\int (u^0(t, x) - M)^2 dx \leq \ell^3/(t^2\sigma^2)$. Таким образом, в момент времени

$$T = \frac{2\ell^{3/2}}{\sigma|u_0(\cdot) - M|_{L_2}} \quad (3.2)$$

справедлива оценка

$$\int (u^0(T, x) - M)^2 dx \leq \frac{1}{4} |u_0(\cdot) - M|_{L_2}^2. \quad (3.3)$$

Далее для упрощения формул мы будем предполагать, что $M = 0$. При этом мы не ограничиваем общности, так как можем сделать замену $u \rightarrow u - M$, $f(\cdot) \rightarrow f(\cdot + M)$.

ТЕОРЕМА. При $m \in \mathbb{N}$ и

$$\delta < \delta_0'' = \frac{1}{3072} \frac{|u_0|_{L_2}^4}{T|u_0|_{L_\infty}^2 (\int |du_0/dx| dx)^2}$$

имеет место неравенство

$$\left(\int_0^T \|u(t, \cdot)\|_m^2 dt \right)^{1/2} \geq c_m \left(\frac{1}{\delta} \right)^{m-1/2}. \quad (3.4)$$

Здесь T определено в (3.2), а c_m не зависит от δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем равенство (2.3) в таком виде:

$$\delta \int (u_x^\delta(t, x))^2 dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int (u^\delta(t, x))^2 dx,$$

и проинтегрируем его по t от 0 до T :

$$\int_0^T \delta \|u^\delta\|_1^2 dt = \frac{1}{2} \int (u^\delta(0, x))^2 dx - \frac{1}{2} \int (u^\delta(T, x))^2 dx. \quad (3.5)$$

Неравенство (3.4) при $m = 1$ будет доказано, как только мы покажем, что последний интеграл в (3.5) мал. Пусть $\delta < \delta_0''$; тогда, используя неравенство (Д.6) из дополнения, можем записать

$$\begin{aligned} \int (u^\delta(T, x))^2 dx - \int (u^0(T, x))^2 dx &\leq \int |u^\delta(T, x) - u^0(T, x)| |u^\delta(T, x) + u^0(T, x)| dx \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{T\delta} \int \left| \frac{du_0}{dx} \right| dx \cdot 2|u_0|_{L_\infty} \leq \frac{1}{12} |u_0|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

Теперь (3.5) и (3.3) вместе с последним неравенством дают

$$\int_0^T \delta \|u^\delta\|_1^2 dt \geq \frac{1}{2} |u_0|_{L_2}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} |u_0|_{L_2}^2 + \frac{1}{12} |u_0|_{L_2}^2 \right) = \frac{1}{3} |u_0|_{L_2}^2,$$

или

$$\frac{1}{T} \int_0^T \|u^\delta\|_1^2 dt \geq \frac{|u_0|_{L_2}^2}{3T\delta}. \quad (3.6)$$

Тем самым доказано неравенство (3.4) при $m = 1$ с константой $c_1 = |u_0|_{L_2}/\sqrt{3T}$.

Из интерполяционного неравенства (1.10) с $k = 1$ следует, что $|u_x|_{L_\infty} \leq C_{m1} D^{(m-1)/m} |u^{(m)}|_{L_\infty}^{1/m}$, где D определено в (2.1) и использована формула (2.2). Учитывая (1.11), имеем $|u^{(m)}|_{L_\infty} \geq (|u_x|_{L_\infty})^m / (2D^{m-1})$. Используя неравенство (Д.4), мы можем записать $|\partial u^\delta / \partial x|_{L_\infty} \geq \|u^\delta\|_1^{2m} / |du_0/dx|_{L_1}$. Таким образом,

$$|u^{(m)}|_{L_\infty} \geq \frac{\|u^\delta\|_1^{2m}}{2D^{m-1} |du_0/dx|_{L_1}^m}. \quad (3.7)$$

ЛЕММА. Если v — периодическая функция, принимающая значение нуль, то

$$|v|_{L_\infty}^2 \leq |v|_{L_2} |v_x|_{L_2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого y имеем

$$v^2(y) = \int_{v^{-1}(0)}^y \frac{d}{dx} v^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int \left| \frac{d}{dx} v^2(x) \right| dx = \int |v(x)| |v'(x)| dx \leq |v|_{L_2} |v_x|_{L_2}. \quad \square$$

Применяя предыдущую лемму к $v = \partial^m u / \partial x^m$ и используя неравенство (2.12), получаем

$$|u^{(m)}|_{L_\infty} \leq \|u\|_m^{1/2} \|u\|_{m+1}^{1/2} \leq \|u\|_1^{1/(2m)} \|u\|_{m+1}^{(2m-1)/(2m)}.$$

Следовательно,

$$\|u\|_{m+1} \geq \left(\frac{|u^{(m)}|_{L_\infty}^{2m}}{\|u\|_1} \right)^{1/(2m-1)} \stackrel{(3.7)}{\geq} \frac{\|u\|_1^{2m+1}}{(2D^{m-1} |du_0/dx|_{L_1}^m)^{2m/(2m-1)}}.$$

Теперь возводим это неравенство в квадрат и, используя неравенство

$$\frac{1}{T} \int_0^T \|u\|_1^{4m+2} dt \geq \left(\frac{1}{T} \int_0^T \|u\|_1^2 dt \right)^{2m+1},$$

усредняем по времени от 0 до T :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \|u\|_{m+1}^2 dt &\geq \frac{(\frac{1}{T} \int_0^T \|u\|_1^2 dt)^{2m+1}}{(2D^{m-1}|du_0/dx|_{L_1}^m)^{4m/(2m-1)}} \\ &\stackrel{(3.6)}{\geq} \frac{(|u_0|_{L_2}^2/(3T\delta))^{2m+1}}{(2D^{m-1}|du_0/dx|_{L_1}^m)^{4m/(2m-1)}}. \end{aligned}$$

Тем самым оценка (3.4) доказана при всех $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Интересно сравнить неравенство (3.4) с $m = 1$ с верхней границей для усредненной L_1 -нормы, вытекающей из оценки (Д.4):

$$\left\langle \int u'(x)^2 dx \right\rangle^{1/2} \geq c_1 \delta^{-1/2}, \quad \left\langle \int |u'(x)| dx \right\rangle \leq \text{Const}.$$

Грубо говоря, эти неравенства означают, что график градиента $u'(x)$ является кривой, у которой наблюдаются высокие и редкие всплески. Такое поведение тесно связано с феноменом перемежаемости в теории турбулентности (см. [8]).

§4. Поведение коэффициентов Фурье

В этом параграфе мы докажем оценки (1.6)–(1.8).

Коэффициенты Фурье функции, определенной на окружности S , — это коэффициенты ее разложения по ортонормированному базису, образованному экспонентами $e_k(\cdot)$, где

$$e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \exp\left(\frac{2\pi i k x}{\ell}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Разлагая по этому базису, мы записываем функцию $u(x)$ в виде

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{u}_k e_k(x), \quad \text{где } \hat{u}_k = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \int u(x) \exp\left(\frac{-2\pi i k x}{\ell}\right) dx,$$

и записываем ее H^m -норму Соболева следующим образом:

$$\|u\|_m^2 = \left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^{2m} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^{2m} |\hat{u}_k|^2.$$

Положив

$$\hat{a}_k^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |\hat{u}_k(t)|^2 dt,$$

мы имеем

$$\frac{1}{T} \int_0^T \|u\|_m^2 dt = \left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^{2m} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^{2m} \hat{a}_k^2.$$

Сочетая теперь результаты §§2 и 3 с этой формулой, получаем, что для достаточно малых δ (точнее, для $\delta < \delta_0 = \min(1, \delta'_0, \delta''_0)$) при $m \geq 1$ справедливы оценки

$$\tilde{c}_m \delta^{-2m+1} < \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^{2m} \hat{a}_k^2 < \tilde{C}_m \delta^{-2m+1}, \quad (*)$$

где $\tilde{c}_m = (\ell/(2\pi))^{2m} c_m^2$ и $\tilde{C}_m = (\ell/(2\pi))^{2m} C_m^2$. Положим

$$V = \frac{\ell}{4\pi^2} \left| \frac{du_0}{dx} \right|_{L_1}^2.$$

Тогда

$$|\hat{u}_k| = \left| \frac{i\sqrt{\ell}}{2\pi k} \int \frac{\partial u}{\partial x} \exp\left(\frac{-2\pi i k x}{\ell}\right) dx \right| \leq \frac{\sqrt{\ell}}{2\pi|k|} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{L_1} \leq \frac{V^{1/2}}{|k|}.$$

В последнем неравенстве мы использовали оценку (Д.4) из дополнения. Таким образом, $\hat{a}_k^2 \leq V/k^2$.

Для произвольных $s \geq 0$ и $\theta > 0$ будем по-прежнему обозначать через $\hat{A}_{s,\theta}^2$ среднее значение коэффициентов $\hat{a}_k^2$ при $|k| \in (\delta^{-s+\theta}; \delta^{-s-\theta}]$. Пусть выполнено условие $\delta^\theta < 1/2$, которое обеспечивает непустоту множества индексов k , по которым происходит усреднение. Тогда из последнего неравенства (с использованием простого факта $k^{-2} < \int_{k-1/2}^{k+1/2} x^{-2} dx$) следует

$$\hat{A}_{s,\theta}^2 < \frac{V \int_{[\delta^{-s-\theta}]}^{[\delta^{-s-\theta}]+1/2} x^{-2} dx}{[\delta^{-s-\theta}] - [\delta^{-s+\theta}]} = \frac{V}{([\delta^{-s-\theta}] + 1/2)([\delta^{-s+\theta}] + 1/2)} < 4V\delta^{2s}.$$

Мы получили оценку (1.6).

Выведем оценку (1.7). Пусть $1 < s - \theta < s < s + \theta$, $\delta^\theta < 1/2$ и выполнено условие (*); тогда

$$\sum_{|k| > \delta^{-s+\theta}} \hat{a}_k^2 \leq (\delta^{s-\theta})^{2m} \sum_{|k| > \delta^{-s+\theta}} k^{2m} \hat{a}_k^2 \leq (\delta^{s-\theta})^{2m} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^{2m} \hat{a}_k^2 \leq \tilde{C}_m \delta^{2m(s-\theta-1)+1}$$

и

$$\hat{A}_{s,\theta}^2 \leq \frac{\sum_{|k| > \delta^{-s+\theta}} \hat{a}_k^2}{2([\delta^{-s-\theta}] - [\delta^{-s+\theta}])} \leq \frac{\tilde{C}_m \delta^{2m(s-\theta-1)+1}}{\delta^{-s-\theta}} < \tilde{C}_m \delta^{2+2m(s-\theta-1)}.$$

Оценка (1.7) доказана.

Найдем оценку снизу для среднего значения коэффициентов $\hat{a}_k^2$ при $|k| \in (\delta^{\theta-1}, \delta^{-\theta-1}]$. Будем, как и в §1, обозначать это среднее через $\hat{A}_{1,\theta}^2$. Пусть выполнено условие (*) и $(2V + \tilde{C}_2)\delta^\theta/\tilde{c}_1 < 1/2$. Тогда, так как

$$\sum_{|k| > \delta^{-1-\theta/2}} k^2 \hat{a}_k^2 \leq \delta^{2+\theta} \sum_{|k| > \delta^{-1-\theta/2}} k^4 \hat{a}_k^2 \leq \tilde{C}_2 \delta^{-1+\theta}$$

и

$$\sum_{|k| \leq \delta^{-1+\theta}} k^2 \hat{a}_k^2 \leq 2 \sum_{0 < k \leq \delta^{-1+\theta}} V \leq 2V\delta^{-1+\theta},$$

то

$$\begin{aligned}
 \sum_{\delta^{-1+\theta} < |k| \leq \delta^{-1-\theta}} \hat{a}_k^2 &\geq \delta^{2+\theta} \sum_{\delta^{-1+\theta} < |k| \leq \delta^{-1-\theta/2}} k^2 \hat{a}_k^2 \\
 &= \delta^{2+\theta} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2 \hat{a}_k^2 - \sum_{|k| \leq \delta^{-1+\theta}} k^2 \hat{a}_k^2 - \sum_{|k| > \delta^{-1-\theta/2}} k^2 \hat{a}_k^2 \right) \\
 &\geq \tilde{c}_1 \delta^{1+\theta} \left(1 - \frac{2V + \tilde{C}_2}{\tilde{c}_1} \delta^\theta \right) \geq \frac{\tilde{c}_1}{2} \delta^{1+\theta}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\hat{A}_{1,\theta}^2 \geq \frac{\tilde{c}_1 \delta^{1+\theta/2}}{2\delta^{-1-\theta}} = \frac{\tilde{c}_1}{4} \delta^{2+2\theta},$$

т. е. неравенство (1.8) доказано.

Дополнение

Пусть функция $u = u^\delta(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \delta u_{xx} \quad (\text{Д.1})$$

в цилиндре $[0, +\infty) \times S$ с начальным значением

$$u^\delta(0, x) = u_0(x) \in C^\infty(S). \quad (\text{Д.2})$$

Здесь $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная C^∞ -гладкая (не обязательно выпуклая) функция, $\delta > 0$. Тогда (см. [1]) функция u будет бесконечно гладкой при всех $t > 0$.

Мы напомним, что если функция $v(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$v_t + \psi(t, x)v_x = \delta v_{xx},$$

где $\psi(t, x)$ есть C^∞ -гладкая функция, то для $v(t, x)$ имеет место принцип максимума: при $t_1 < t_2$

$$\inf v(t_1, \cdot) \leq \inf v(t_2, \cdot) \leq \sup v(t_2, \cdot) \leq \sup v(t_1, \cdot).$$

Пусть символ $\dot{u}$ обозначает либо функцию $\partial u / \partial t$, либо $\partial u / \partial x$ (два случая). Рассмотрим L_1 -норму функции $\dot{u}$ по x как функцию от t , $|\dot{u}|_{L_1}(t) = \int |\dot{u}(t, x)| dx$. В обоих случаях имеет место следующий факт:

ЛЕММА А. *Функция $t \mapsto |\dot{u}|_{L_1}(t)$ не возрастает.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\dot{u}(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{u}_t + (f'(u)\dot{u})_x = \delta \dot{u}_{xx}.$$

Умножим его на произвольную гладкую в цилиндре $[T_1, T_2] \times S$ ($T_1 < T_2$) функцию $\varphi(t, x)$ и проинтегрируем по частям:

$$\int \dot{u}\varphi|_{t=T_2} dx = \int \dot{u}\varphi|_{t=T_1} dx + \int_{T_1}^{T_2} \int \dot{u}(\varphi_t + f'(u)\varphi_x + \delta\varphi_{xx}) dx dt. \quad (\text{Д.3})$$

Пусть теперь функция $\varphi(t, x)$ является решением задачи Коши для уравнения

$$\varphi_t + f'(u)\varphi_x + \delta\varphi_{xx} = 0$$

в цилиндре $[T_1, T_2] \times S$. Начальные данные для такого уравнения надо задавать на верхней крышке цилиндра, и мы полагаем

$$\varphi(T_2, x) = \text{sign}^\varepsilon(\dot{u}(T_2, x)),$$

где функция $\text{sign}^\varepsilon(\dot{u}(T_2, \cdot))$ гладко аппроксимирует функцию $\text{sign}(\dot{u}(T_2, \cdot))$ с точностью до ε в $L_1(S)$. Потребуем также выполнения неравенства

$$|\text{sign}^\varepsilon(\dot{u}(T_2, x))| \leq 1 \quad \text{для всех } x.$$

Тогда в силу принципа максимума всюду в цилиндре $[T_1, T_2] \times S$ будет выполняться неравенство $|\varphi(t, x)| \leq 1$. Подставив $\varphi(t, x)$ в (Д.3), получим, что

$$\int \dot{u}(T_2, x) \text{sign}^\varepsilon(\dot{u}(T_2, x)) dx = \int \dot{u} \varphi|_{t=T_1} dx \leq \int |\dot{u}(T_1, x)| dx.$$

Устремив ε к нулю, получаем

$$\int |\dot{u}|_{t=T_2} dx \leq \int |\dot{u}|_{t=T_1} dx. \quad \square$$

Отметим два простых следствия из доказанного факта. При любых $t \geq 0$ и $\delta > 0$ имеет место неравенство

$$\int \left| \frac{\partial u^\delta}{\partial x}(t, x) \right| dx \leq \int \left| \frac{du_0}{dx} \right| dx. \quad (\text{Д.4})$$

При $\delta \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$\int |u^\delta(t_2, x) - u^\delta(t_1, x)| dx \leq C|t_2 - t_1|, \quad (\text{Д.5})$$

причем константа C не зависит от δ ; например, можно взять

$$C = \int \left| \frac{df(u_0)}{dx} \right| dx + \int \left| \frac{d^2 u_0}{dx^2} \right| dx.$$

Переходим к исследованию поведения решений задачи (Д.1), (Д.2) при $\delta \rightarrow 0$.

Нас интересует скорость сходимости к предельной функции, и мы получим следующий результат:

ТЕОРЕМА. Для любого $T \geq 0$ и любого $\delta \geq 0$ имеет место неравенство

$$\int |u^\delta(T, x) - u^0(T, x)| dx \leq \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{T\delta} \int \left| \frac{du_0}{dx}(x) \right| dx. \quad (\text{Д.6})$$

В дальнейшем мы будем опускать индекс δ , а предельную функцию u^0 будем обозначать через v . Перед тем как доказывать эту теорему, установим ряд технических неравенств.

ЛЕММА 1. Для произвольного вещественного числа a и для любой C^2 -гладкой неотрицательной функции $\psi(t, x)$ ($t \in [0, T]$, $x \in S$) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int |u(T, x) - a| \psi(T, x) dx &\leq \int |u(0, x) - a| \psi(0, x) dx \\ &+ \int_0^T \int F(u(t, x), a) \psi_x(t, x) + |u(t, x) - a| (\psi_t(t, x) + \delta \psi_{xx}(t, x)) dx dt, \end{aligned} \quad (\text{Д.7})$$

где $F(u, a) = \text{sign}(u - a)(f(u) - f(a))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножаем уравнение (Д.1) на $\Phi'_n(u)\psi(t, x)$, где $\Phi_n(\cdot)$ — произвольная C^2 -гладкая выпуклая ($\Phi''_n(\cdot) \geq 0$) функция. Затем интегрируем по цилиндру $[0, T] \times S$:

$$\int_0^T \int \Phi'_n(u) u_t \psi \, dx \, dt + \int_0^T \int \Phi'_n(u) f'(u) u_x \psi \, dx \, dt = \delta \int_0^T \int u_{xx} \Phi'_n(u) \psi \, dx \, dt.$$

Замечая, что $\Phi'_n(u) f'(u) u_x = (\partial/\partial x) \int_0^u \Phi'_n(\xi) f'(\xi) \, d\xi$ и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} & \int \Phi_n(u) \psi|_{t=T} \, dx - \int \Phi_n(u) \psi|_{t=0} \, dx \\ & - \int_0^T \int \Phi_n(u) \psi_t \, dx \, dt - \int_0^T \int \left(\int_0^u \Phi'_n(\xi) f'(\xi) \, d\xi \right) \psi_x \, dx \, dt \\ & = -\delta \int_0^T \int u_x^2 \Phi''_n(u) \psi \, dx \, dt - \delta \int_0^T \int \Phi'_n(u) u_x \psi_x \, dx \, dt, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \int \Phi_n(u) \psi|_{t=T} \, dx & \leq \int \Phi_n(u) \psi|_{t=0} \, dx + \int_0^T \int \left(\int_0^u \Phi'_n(\xi) f'(\xi) \, d\xi \right) \psi_x \, dx \, dt \\ & + \int_0^T \int \Phi_n(u) (\psi_t + \delta \psi_{xx}) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Пусть теперь функции $\Phi_n(\cdot)$ аппроксимируют функцию $|\cdot - a|$ в равномерной метрике, причем

$$\frac{d\Phi_n(u)}{du} \rightarrow \frac{d}{du} |u - a| = \begin{cases} 1 & \text{при } u > a, \\ -1 & \text{при } u < a, \end{cases}$$

в $L_1(u_-, u_+)$, где $u_- = \min u_0$, $u_+ = \max u_0$. Переходя к пределу, получаем (Д.7). $\square$

Заметим, что из принципа максимума для функций u^δ и условия (Д.4) следует, что семейство

$$\{u^\delta(t, \cdot)\}_{\delta \in (0,1); t \in [0,T]} \quad (\star)$$

равномерно ограничено и имеет равномерно ограниченную вариацию. Поэтому из всякого бесконечного подмножества этих функций по второй теореме Хелли (см. [7]) можно выбрать сходящуюся в каждой точке из S последовательность. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла она будет сходиться в $L_1(S)$. Это означает, что семейство $(\star)$ предкомпактно в $L_1(S)$. В силу этого и согласно условию (Д.5) по теореме Арцела–Асколи семейство функций $\{u^\delta(t, x)\}_{\delta \in (0,1)}$ предкомпактно по норме пространства $C([0, T]; L_1(S))$. Отсюда заключаем, что найдется элемент $v \in C([0, T]; L_1(S))$ и последовательность $\delta_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), такие, что $u^{\delta_k} \rightarrow v$ по норме пространства $C([0, T]; L_1(S))$.

Заметим, что из этой сходимости и принципа максимума для u^{δ_k} следует, что при каждом $t \in [0, T]$

$$u_- \leq \operatorname{ess\,inf} v(t, \cdot) \leq \operatorname{ess\,sup} v(t, \cdot) \leq u_+,$$

так как иначе величина $|u^{\delta_k}(t, \cdot) - v(t, \cdot)|_{L_1}$ не стремилась бы к нулю. Для следующего предельного перехода воспользуемся неравенствами

$$||u(t, x) - a| - |v(t, x) - a|| \leq |u(t, x) - v(t, x)|$$

и

$$|F(u(t, x), a) - F(v(t, x), a)| \leq \max_{[u_-, u_+]} |f'(\cdot)| |u(t, x) - v(t, x)| \quad \text{при п.в. } (t, x).$$

(Первое неравенство — это просто неравенство треугольника, а для доказательства второго нужно рассмотреть два случая: а) a находится между u и v ; б) u и v лежат по одну сторону от a . При каждом t второе неравенство справедливо при почти всех x .)

Переходим к пределу в неравенстве (Д.7) по указанной подпоследовательности $\delta_k \rightarrow 0$ (при фиксированной функции $\psi(t, x)$ и при фиксированных начальных данных u_0):

$$\begin{aligned} \int |v(T, \tilde{x}) - b| \tilde{\psi}(T, \tilde{x}) d\tilde{x} &\leq \int |v(0, \tilde{x}) - b| \tilde{\psi}(0, \tilde{x}) d\tilde{x} \\ &+ \int_0^T \int (F(v(\tilde{t}, \tilde{x}), b) \tilde{\psi}_{\tilde{x}}(\tilde{t}, \tilde{x}) + |v(\tilde{t}, \tilde{x}) - b| \tilde{\psi}_{\tilde{t}}(\tilde{t}, \tilde{x})) d\tilde{x} d\tilde{t}. \end{aligned} \quad (\text{Д.8})$$

Мы специально сделали замены $a \mapsto b$ и $t, x, \psi \mapsto \tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{\psi}$.

ЛЕММА 2. Пусть $\Omega: S \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольная неотрицательная C^2 -гладкая функция на окружности S . Тогда

$$\begin{aligned} \iint |u(T, x) - v(T, \tilde{x})| \Omega(x - \tilde{x}) dx d\tilde{x} &\leq \iint |u(0, x) - v(0, \tilde{x})| \Omega(x - \tilde{x}) d\tilde{x} dx \\ &+ \delta \int_0^T \iint |u(t, x) - v(t, \tilde{x})| \Omega''(x - \tilde{x}) dx d\tilde{x} dt. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega_\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — дважды гладкая четная неотрицательная функция, равная нулю вне ε -окрестности нуля ($\omega_\varepsilon(z) \equiv 0$ при $|z| \geq \varepsilon$), причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(z) dz = 1.$$

Заметим, что функция $\hat{\psi}(t, \tilde{t}, x, \tilde{x}) = \omega_\varepsilon(t - \tilde{t}) \Omega(x - \tilde{x})$ удовлетворяет условиям $\partial \hat{\psi} / \partial t = -\partial \hat{\psi} / \partial \tilde{t}$ и $\partial \hat{\psi} / \partial x = -\partial \hat{\psi} / \partial \tilde{x}$. Подставим в (Д.7) $a = v(\tilde{t}, \tilde{x})$ и $\psi(t, x) = \hat{\psi}(t, \tilde{t}, x, \tilde{x})$ и проинтегрируем по $(\tilde{t}, \tilde{x}) \in [0, T] \times S$. Кроме этого, подставим в неравенство (Д.8) $b = u(t, x)$ и $\tilde{\psi}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \hat{\psi}(t, \tilde{t}, x, \tilde{x})$ и проинтегрируем по $(t, x) \in [0, T] \times S$. Затем сложим два полученных неравенства:

$$\begin{aligned} \int_0^T \iint |u(T, x) - v(\tilde{t}, \tilde{x})| \omega_\varepsilon(T - \tilde{t}) \Omega(x - \tilde{x}) dx d\tilde{x} d\tilde{t} \\ + \int_0^T \iint |v(T, \tilde{x}) - u(t, x)| \omega_\varepsilon(t - T) \Omega(x - \tilde{x}) d\tilde{x} dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^T \iint |u(0, x) - v(\tilde{t}, \tilde{x})| \omega_\varepsilon(-\tilde{t}) \Omega(x - \tilde{x}) dx d\tilde{x} d\tilde{t} \\
&\quad + \int_0^T \iint |v(0, \tilde{x}) - u(t, x)| \omega_\varepsilon(t) \Omega(x - \tilde{x}) d\tilde{x} dx dt \\
&\quad + \delta \int_0^T \int_0^T \iint |u(t, x) - v(\tilde{t}, \tilde{x})| \omega_\varepsilon(t - \tilde{t}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Omega(x - \tilde{x}) dx d\tilde{x} dt d\tilde{t}.
\end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем утверждение леммы. $\square$

ЛЕММА 3. Пусть $\Psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — неотрицательная C^2 -гладкая функция с компактным носителем. Тогда

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \int |u(T, x+y) - v(T, x)| \Psi(y) dx dy &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int |u(0, x+y) - v(0, x)| \Psi(y) dx dy \\
&\quad + \delta \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \int |u(t, x+y) - v(t, x)| \Psi''(y) dx dy dt. \quad (\text{Д.9})
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим предыдущую лемму с $\Omega(\cdot) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Psi(\cdot + k\ell)$, заменив координаты $x - \tilde{x}$ на y и $\tilde{x}$ на x . $\square$

Для получения необходимых следствий из (Д.9) нам потребуется воспользоваться неравенством треугольника в следующей форме:

$$|u(t, x+y) - v(t, x)| = |u(t, x) - v(t, x)| + w(t, x, y),$$

где $|w(t, x, y)| \leq |u(t, x+y) - u(t, x)|$.

Учитывая, что $u(0, x) \equiv v(0, x)$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi''(y) dy = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
\int |u(T, x) - v(T, x)| dx \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(y) dy &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int |u(T, x) - u(T, x+y)| dx \Psi(y) dy \\
&\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \int |u(0, x) - u(0, x+y)| dx \Psi(y) dy \\
&\quad + \delta \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \int |u(t, x) - u(t, x+y)| dx |\Psi''(y)| dy dt. \quad (\text{Д.10})
\end{aligned}$$

Далее будем предполагать, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(y) dy = 1$. Воспользовавшись неравенствами

$$\begin{aligned}
\int |u(t, x) - u(t, x+y)| dx &= \int \left| \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \xi) d\xi \right| dx \\
&\leq \left| \int_0^y \int \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \xi) \right| dx d\xi \right| = |y| \int \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right| dx \stackrel{(\text{Д.4})}{\leq} |y| \int \left| \frac{du_0}{dx} \right| dx,
\end{aligned}$$

перепишем (Д.10) в виде

$$\int |u(T, x) - v(T, x)| dx \leq \left(2 \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \Psi(y) dy + T\delta \int_{-\infty}^{+\infty} |y| |\Psi''(y)| dy \right) \int \left| \frac{du_0}{dx} \right| dx. \quad (\text{Д.11})$$

Пусть теперь функции $\Psi(y)$ аппроксимируют функцию $\max((1 - |y|/\varepsilon)/\varepsilon, 0)$. Тогда выражение в скобках в (Д.11) будет стремиться к

$$2 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |y| \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{|y|}{\varepsilon}\right) dy + 2\delta T \frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{3} \left(\varepsilon + \frac{3T\delta}{\varepsilon}\right).$$

Минимизируя по ε , получаем оценку (Д.6). Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Наука, М., 1967.
2. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными. Матем. сб., **81** (**123**), № 2, 228–255 (1970).
3. *Кузнецов Н. Н.* Точность некоторых приближенных методов расчета слабых решений квазилинейного уравнения первого порядка. Журнал выч. матем. и матем. физ., **16**, № 6, 1489–1502 (1976).
4. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале. В кн.: Избранные труды. Математика и механика. Наука, М., 1985, с. 252–263.
5. *Hörmander L.* Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
6. *Lax P. D.* Hyperbolic systems of conservation laws II. Comm. Pure Appl. Math., **10**, 537–566 (1957).
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. Наука, М., 1989.
8. *Фриш У.* Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова. Библиотека математика, вып. 4, Фазис, М., 1998.
9. *Kuksin S.* Spectral Properties of Solutions for Nonlinear PDE's in the Turbulent Regime. Geom. Funct. Anal., **9**, 141–184 (1999).
10. *E Weinan, Khanin K., Mazel A., Sinai Ya.* Invariant measures for Burgers equation with stochastic forcing. Ann. of Math., **151**, No. 3, 877–960 (2000).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет,
Department of Mathematics,
Heriot-Watt University, Edinburgh

Поступило в редакцию
15 сентября 1999 г.