Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Гаргуби, В. Ю. Овсиенко, Модули дифференциальных операторов на прямой, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 1, 16–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa228>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 07:03:48

УДК 517.9

Модули дифференциальных операторов на прямой

© 2001. Х. ГАРГУБИ, В. ОВСИЕНКО

1. Модули дифференциальных операторов. Обозначим через $\mathcal{D}^k$ пространство линейных дифференциальных операторов порядка k на $\mathbb{R}$ (или на S^1)

$$A = A_k(x)\partial^k + A_{k-1}(x)\partial^{k-1} + \dots + A_0(x), \quad \partial = \frac{d}{dx}, \quad A_i(x) \in C^\infty(\mathbb{R}). \quad (1)$$

На пространстве $\mathcal{D}^k$ определено естественное 2-параметрическое семейство модулей над группой диффеоморфизмов $\text{Diff}(\mathbb{R})$ (и над алгеброй Ли векторных полей $\text{Vect}(\mathbb{R})$). Чтобы задать эту структуру, предположим, что дифференциальные операторы действуют на тензорных плотностях на $\mathbb{R}$, а именно, $A: \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{F}_\mu$, где $\mathcal{F}_\lambda$ обозначает $\text{Diff}(\mathbb{R})$ -модуль тензорных плотностей степени $-\lambda$, т.е. плотностей вида $\varphi(x)(dx)^{-\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (см. [6]). Обозначим через $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$ модуль над $\text{Diff}(\mathbb{R})$ (и над $\text{Vect}(\mathbb{R})$) дифференциальных операторов степени k из $\mathcal{F}_\lambda$ в $\mathcal{F}_\mu$. Действие алгебры Ли $\text{Vect}(\mathbb{R})$ на $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$ задано формулой

$$L_X^{\lambda,\mu}(A) = L_X^\mu \circ A - A \circ L_X^\lambda, \quad X = X(x)\partial, \quad (2)$$

где $L_X^\lambda = X\partial - \lambda X'$ — оператор производной Ли на $\mathcal{F}_\lambda$ и где $X'(x) = dX(x)/dx$.

На модуле $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}$ всех дифференциальных операторов из $\mathcal{F}_\lambda$ в $\mathcal{F}_\mu$ определена естественная фильтрация $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^0 \subset \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^1 \subset \dots \subset \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k \subset \dots$.

Цель настоящей работы — классифицировать определенные выше модули: мы дадим полный список изоморфизмов между различными модулями $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$.

Проблема классификации модулей дифференциальных операторов на гладком многообразии была поставлена (в случае $\lambda = \mu$) и решена для модулей операторов второго порядка в [3]. Модули $\mathcal{D}_{\lambda,\lambda}^k$ на $\mathbb{R}$ (и на S^1) были классифицированы в [8]. В многомерном случае проблема классификации была недавно решена в [12, 16]. Одномерный случай оказывается особенным и приводит к более интересным результатам.

2. Предварительные замечания. Заметим, прежде всего, что разность весов $\delta = \mu - \lambda$ является инвариантом, т.е. условие $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k \cong \mathcal{D}_{\lambda',\mu'}^k$ влечет за собой $\mu - \lambda = \mu' - \lambda'$. В самом деле, тот факт, что δ — инвариант, вытекает из условия эквивариантности по отношению к векторному полю $x\partial$.

Напомним также, что оператор сопряжения дифференциальных операторов определяет изоморфизм $\text{Vect}(\mathbb{R})$ -модулей $*$: $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_{-1-\mu,-1-\lambda}^k$. Модуль из правой части этой формулы называется *сопряженным модулем* для $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$. Мы будем называть *самосопряженными* модули, для которых $\lambda + \mu = -1$ (т.е. стабильные по отношению к сопряжению).

3. Классификационные результаты. Мы дадим здесь полную классификацию модулей $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$.

ТЕОРЕМА 1. В случае $k \leq 3$ $\text{Diff}(\mathbb{R})$ -модули $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$ с фиксированными k и δ изоморфны друг другу при всех значениях λ (и $\mu = \delta + \lambda$), кроме модулей, заданных следующей таблицей:

k	1	2	3
(λ, μ)	$(0, -1)$	$(0, \mu)$ $(1/2, -3/2)$	$(0, \mu)$ $(\lambda, -1 - \lambda)$ $(\lambda, (4\lambda - 1)/(-3\lambda + 1))$ $(\lambda, \lambda - 2)$

(3)

а также сопряженных им модулей $\mathcal{D}_{-1-\mu, -1-\lambda}^k$.

Мы называем *особыми* модули $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$, которые не изоморфны никаким другим модулям, кроме сопряженных.

ТЕОРЕМА 2. Все модули, приведенные в таблице (3), особые.

На следующем графике представлены все особые модули $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^3$.

Заметим, что прямая $\mu = -1$ соответствует модулям, сопряженным модулям с $\lambda = 0$ из таблицы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Наиболее известный классический пример модуля дифференциальных операторов — модуль операторов Штурма–Лиувилля $A = \partial^2 + u(x)$ на S^1 , действующих из $\mathcal{F}_{1/2}$ в $\mathcal{F}_{-3/2}$. Это — подмодуль самосопряженного модуля $\mathcal{D}_{1/2, -3/2}^2$. Заметим, что этот модуль связан с алгеброй Вирасоро (см. [10]). Мы надеемся, что другие особые модули, которые мы определили, тоже имеют интересную интерпретацию.

Сформулируем теперь наиболее общий результат.

ТЕОРЕМА 3. При $k \geq 4$ не существует никаких изоморфизмов между различными $\text{Diff}(\mathbb{R})$ -модулями $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$, кроме сопряжения.

Заметим также, что в многомерном случае результат, аналогичный теореме 3, верен при $k \geq 3$ (см. [12, 16]).

4. Модули символов. Пространство символов дифференциальных операторов (1) изоморфно пространству $\text{Pol}^k(T^*\mathbb{R})$ функций на $T^*\mathbb{R}$, полиномиальных

(порядка $\leq k$) на слоях. Как $\text{Diff}(\mathbb{R})$ - (и $\text{Vect}(\mathbb{R})$)-модуль пространство символов, соответствующее $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}$, имеет вид

$$\text{Pol}(T^*\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}_\delta \cong \mathcal{F}_\delta \oplus \mathcal{F}_{\delta+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}_{\delta+k} \oplus \cdots, \quad \delta = \mu - \lambda. \quad (4)$$

Для краткости мы будем использовать обозначение $\mathcal{S}_\delta^k$ вместо $\text{Pol}^k(T^*\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}_\delta$ и $\mathcal{S}_\delta$ для полного пространства символов.

Модуль символов изоморфен градуированному модулю, соответствующему фильтрованному модулю дифференциальных операторов, $\mathcal{S}_\delta = \text{gr } \mathcal{D}_{\lambda,\mu}$.

5. Модули дифференциальных операторов над $\text{sl}(2, \mathbb{R})$. Рассмотрим подалгебру Ли $\text{sl}(2, \mathbb{R}) \subset \text{Vect}(\mathbb{R})$ с базисом $\{\partial, x\partial, x^2\partial\}$ и ограничим на нее действие (2). Эта алгебра Ли играет специальную роль, она позволяет отождествить пространства $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$ и $\mathcal{S}_\delta^k$, где $\delta = \mu - \lambda$, каноническим образом.

Следующий результат показывает, что для неособых значений δ пространство $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$ изоморфно $\mathcal{S}_\delta^k$ как $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ -модуль.

ТЕОРЕМА 4. (i) Если $\delta \neq -1, -3/2, -2, -5/2, \dots, -k$, то $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k$ изоморфно $\mathcal{S}_\delta^k$ как $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ -модуль.

(ii) Существует единственный изоморфизм $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ -модулей $\sigma: \mathcal{D}_{\lambda,\mu}^k \rightarrow \mathcal{S}_\delta^k$, сохраняющий главный символ дифференциального оператора.

Изоморфизм σ называется *проективно эквивариантным символом*. Нам понадобится явная формула, заимствованная из [2] (см. также [11, 13] в многомерном случае). Отображение σ переводит однородный дифференциальный оператор $A = A_k(x)\partial^k$ порядка k в полиномиальную функцию $\sigma(A) = \sum_{i=0}^k \alpha_i^k A_k^{(i)} \xi^i$, где $A_k^{(i)} = \partial^i A_k$ и константы α_i^k заданы формулой

$$\alpha_i^k = \frac{\binom{k}{i} \binom{2\lambda-k+i}{2\lambda-k}}{\binom{2\delta+2k-i+1}{2\delta+2k-2i+1}}. \quad (5)$$

Особые значения δ , для которых знаменатель в (5) обращается в нуль, называются *резонансами*. В этом случае оператор Казимира алгебры $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ на модуле $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}$ имеет кратные собственные значения (см. [4]).

Сформулируем результат в резонансном случае.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При $\delta = -1, -3/2, -2, -5/2, \dots, -k$ изоморфизм $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ -модулей σ существует, если и только если

$$(\lambda, \mu) = \begin{cases} (\ell/2, -(\ell+2)/2), & 0 \leq \ell \leq k-1, \\ (\ell/2, -(\ell+1)/2) \text{ или } ((\ell-1)/2, -(\ell+1)/2), & 1 \leq \ell \leq k-1. \end{cases}$$

В этом случае, однако, изоморфизм $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ -модулей не является единственным.

Основная идея доказательства теорем 1 и 3 — использовать $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ -эквивариантный символ, чтобы привести действие алгебры Ли $\text{Vect}(\mathbb{R})$ на $\mathcal{D}_{\lambda,\mu}$ к каноническому виду. Другими словами, мы будем использовать следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\lambda,\mu} & \xrightarrow{L_X^{\lambda,\mu}} & \mathcal{D}_{\lambda,\mu} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \mathcal{S}_\delta & \xrightarrow{\sigma \circ L_X^{\lambda,\mu} \circ \sigma^{-1}} & \mathcal{S}_\delta \end{array} \quad (6)$$

и сравнивать действие $\sigma \circ L_X^{\lambda, \mu} \circ \sigma^{-1}$ со стандартным действием алгебры Ли $\text{Vect}(\mathbb{R})$ на $\mathcal{S}_\delta$.

6. Действие алгебры Ли $\text{Vect}(\mathbb{R})$ в $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ -инвариантной форме. Мы вычислим действие алгебры Ли $\text{Vect}(\mathbb{R})$ на $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k$ при $k \leq 4$ в терминах $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ -эквивариантного символа.

Простое вычисление приводит к следующей формуле: действие алгебры Ли $\text{Vect}(\mathbb{R})$ на пространстве полиномиальных функций $P = P_4 \xi^4 + \dots + P_0$ степени 4, заданное выражением $\sigma \circ L_X^{\lambda, \mu} \circ \sigma^{-1}$, имеет вид $\sigma \circ L_X^{\lambda, \mu} \circ \sigma^{-1}(P) = P_4^X \xi^4 + \dots + P_0^X$, где

$$\begin{aligned} P_4^X &= L_X^{\delta+4}(P_4), \\ P_3^X &= L_X^{\delta+3}(P_3), \\ P_2^X &= L_X^{\delta+2}(P_2) + \beta_2^4 J_3(X, P_4), \\ P_1^X &= L_X^{\delta+1}(P_1) + \beta_1^3 J_3(X, P_3) + \beta_1^4 J_4(X, P_4), \\ P_0^X &= L_X^\delta(P_0) + \beta_0^2 J_3(X, P_2) + \beta_0^3 J_4(X, P_3) + \beta_0^4 J_5(X, P_4); \end{aligned} \quad (7)$$

здесь β_i^j — числа, заданные формулой (9) ниже, а билинейные операторы $J_\ell(X, P_k)$ — так называемые *трансектанты*, т. е. единственные (с точностью до константы) $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ -эквивариантные билинейные операторы на тензорных плотностях (см. [9] и цитируемую там литературу).

В нашем случае

$$\begin{aligned} J_3(X, P_s) &= X''' P_s, \\ J_4(X, P_s) &= s X^{(IV)} P_s + 2 X''' P'_s, \\ J_5(X, P_s) &= s(2s-1) X^{(V)} P_s + 5(2s-1) X^{(IV)} P'_s + 10 X''' P''_s \end{aligned} \quad (8)$$

для $s = 2, 3, 4$.

Заметим, что коэффициенты при старших степенях, P_4 и P_3 , преобразуются как тензорные плотности; при преобразовании коэффициентов при более низких степенях возникают дополнительные члены, что различает действие $\sigma \circ L_X^{\lambda, \mu} \circ \sigma^{-1}$ и стандартное действие алгебры Ли $\text{Vect}(\mathbb{R})$ на $\mathcal{S}_\delta$.

Числовые коэффициенты β_i^j в (7) заданы формулой

$$\begin{aligned} \beta_2^4(\lambda, \mu) &= \frac{(6\lambda - 4)\delta + 6\lambda^2 + 6\lambda - 5}{7 + 2\delta}, \\ \beta_1^3(\lambda, \mu) &= \frac{(3\lambda - 1)\delta + 3\lambda^2 + 3\lambda - 1}{5 + 2\delta}, \\ \beta_1^4(\lambda, \mu) &= \frac{(\delta + 2\lambda + 1)[(4\lambda - 1)\delta + 4\lambda(\lambda + 1)]}{(2 + \delta)(3 + \delta)(4 + \delta)}, \\ \beta_0^2(\lambda, \mu) &= \frac{\lambda(\delta + \lambda + 1)}{3 + 2\delta}, \quad \beta_0^3(\lambda, \mu) = \frac{\lambda(\delta + \lambda + 1)(\delta + 2\lambda + 1)}{(1 + \delta)(2 + \delta)(3 + \delta)}, \\ \beta_0^4(\lambda, \mu) &= \frac{\lambda(\delta + \lambda + 1)(4\delta^2 + 12\lambda\delta + 12\delta + 12\lambda^2 + 12\lambda + 11)}{(1 + \delta)(3 + 2\delta)(5 + 2\delta)(7 + 2\delta)(4 + \delta)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что резонансные значения δ из теоремы 4 и предложения 1 — это в точности те значения, для которых коэффициенты (9) не определены.

7. Конструкция изоморфизма. Мы дадим здесь схему доказательства теорем 1 и 3. Подробности и вычисления будут опубликованы отдельно.

Для доказательства теоремы 1 мы построим явно искомый изоморфизм в терминах проективно эквивариантного символа. Положим $P_4 \equiv 0$ и рассмотрим линейное отображение $T: \mathcal{D}_{\lambda, \mu}^3 \rightarrow \mathcal{D}_{\lambda', \mu'}^3$, заданное формулой

$$T(P_3 \xi^3 + \dots + P_0) = P_3 \xi^3 + \frac{\beta_0'^3 \beta_0^2}{\beta_0^3 \beta_1'^2} P_2 \xi^2 + \frac{\beta_1'^3}{\beta_1^3} P_1 \xi^1 + \frac{\beta_0'^3}{\beta_0^3} P_0, \quad (10)$$

где $\beta_i^j = \beta_i^j(\lambda', \mu')$ — коэффициенты действия (7). Это отображение оказывается изоморфизмом $\text{Vect}(\mathbb{R})$ -модулей. В самом деле, легко проверить, что это отображение перестановочно с действием алгебры Ли $\text{Vect}(\mathbb{R})$ на $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^3$ и $\mathcal{D}_{\lambda', \mu'}^3$. Это доказывает теорему 1 для нерезонансных значений δ (т. е. для $\delta \neq -1, -3/2, -2, -5/2, -3$), поскольку мы использовали проективно эквивариантный символ при построении изоморфизма.

Изоморфизм (10), тем не менее, имеет смысл для резонансных δ , что завершает доказательство теоремы 1. Чтобы проверить это, достаточно переписать формулу (10) в терминах коэффициентов дифференциальных операторов (1). Мы не приводим здесь это прямое вычисление.

Рассмотрим теперь изоморфизм $T: \mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k \rightarrow \mathcal{D}_{\lambda', \mu'}^k$, где $k \geq 4$. Поскольку T — изоморфизм $\text{Vect}(\mathbb{R})$ -модулей, он также является изоморфизмом $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ -модулей. Единственность $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ -эквивариантного символа показывает, что линейное отображение $\sigma \circ T \circ \sigma^{-1}$ на $\mathcal{S}_\delta^k$ диагонально и состоит в умножении на константу каждой однородной компоненты (так же, как изоморфизм (10) выше).

Легко показать (см. [12]), что ограничение T на $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^4 \subset \mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k$ должно быть изоморфизмом на подмодуль $\mathcal{D}_{\lambda', \mu'}^4$. Предполагая опять, что δ нерезонансно, так что существует проективно эквивариантный символ, можно проверить, что линейное отображение $T(P_4 \xi^4 + \dots + P_0) = P_4 \xi^4 + \tau_3 P_3 \xi^3 + \dots + \tau_0 P_0$ с неопределенными τ_i , зависящее от $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$, перестановочно с действием алгебры Ли $\text{Vect}(\mathbb{R})$, заданным формулами (7) на $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^4$ и $\mathcal{D}_{\lambda', \mu'}^4$, если и только если

$$\begin{aligned} \tau_4 \beta_2'^4 &= \tau_2 \beta_2^4, & \tau_4 \beta_1'^4 &= \tau_1 \beta_1^4, & \tau_4 \beta_0'^4 &= \tau_0 \beta_0^4, \\ \tau_3 \beta_1'^3 &= \tau_1 \beta_1^3, & \tau_3 \beta_0'^3 &= \tau_0 \beta_0^3, & \tau_2 \beta_0'^2 &= \tau_0 \beta_0^2. \end{aligned}$$

Эта система имеет решение только при $\lambda = \lambda'$ или $\lambda + \mu' = -1$. Первый изоморфизм тривиален, а второй в точности совпадает с сопряжением. Это доказывает теорему 3 для нерезонансных δ .

Мы не приводим вычисления для резонансного случая.

8. Когомологии алгебры Ли $\text{Vect}(\mathbb{R})$, связанные с модулями $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}^k$. Тот факт, что фильтрованный модуль V над алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ можно рассматривать как деформацию соответствующего градуированного модуля $\text{gr } V$, является общим. Эта деформация связана с первой группой когомологий с коэффициентами в $\text{End}(\text{gr } V)$. Мы ссылаемся здесь на классическую теорию Ричардсона–Ниенхейса [17, 18].

Модуль $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}$ является, стало быть, нетривиальной деформацией модуля символов $\mathcal{S}_\delta$ с $\mu - \lambda = \delta$ (см. [3, 8, 14]). Этот модуль связан с пространством когомологий $H^1(\text{Vect}(\mathbb{R}); \text{End}(\mathcal{S}_\delta)) = \bigoplus_{k > \ell} H^1(\text{Vect}(\mathbb{R}); \text{Hom}(\mathcal{F}_{\delta+k}, \mathcal{F}_{\delta+\ell}))$. Точнее, трансектанты $J_\ell(X, P_s)$ с $\ell = 3, 4, 5$ определяют *нетривиальные 1-коциклы* на $\text{Vect}(\mathbb{R})$ со значениями в $\text{Hom}(\mathcal{F}_{\delta+s}, \mathcal{F}_{\delta+s-\ell+1})$:

$$C_\ell(X) = J_\ell(X, \cdot) \quad (11)$$

(см. [8]). Действие алгебры Ли $\text{Vect}(\mathbb{R})$, заданное формулой (7), — нетривиальная деформация действия на пространстве символов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пространство когомологий $H^1(\text{Vect}(\mathbb{R}); \text{Hom}(\mathcal{F}_\nu, \mathcal{F}_{\nu'}))$ было определено в [5] для алгебры Ли полиномиальных векторных полей на $\mathbb{R}$; см. также [15] для случая полиномиальных векторных полей на S^1 . Для алгебры Ли гладких векторных полей соответствующее пространство было описано в [14]; см. также [1].

Мы будем использовать нетривиальные коциклы (11) при доказательстве теоремы 2. Тот факт, что эти коциклы нетривиальны, влечет за собой существование особых модулей, если хоть один из коэффициентов β_i^j в (7) обращается в нуль. Теорема 2 следует теперь из явных формул (9).

ЗАМЕЧАНИЕ. Ограничения коциклов $C_\ell(X)$ при $\ell = 3, 4, 5$ на $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ обращаются в нуль и задают нетривиальные классы так называемых относительных когомологий $H^1(\text{Vect}(S^1), \text{sl}(2, \mathbb{R}); \text{Hom}(\mathcal{F}_\lambda, \mathcal{F}_\mu))$.

9. Препятствия к существованию $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ -эквивариантного символа. Для резонансных значений $\delta = -1, -3/2, -2, -5/2, \dots, -k$ существует серия классов когомологий $\text{sl}(2, \mathbb{R})$, являющихся препятствиями к существованию изоморфизма из теоремы 4. Более точно, рассмотрим линейное отображение $C_2^n: \text{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}_{n/2}, \mathcal{F}_{-1-n/2})$, заданное формулой

$$C_2^n(X)(a(dx)^{-n/2}) := X'' a^{(n)}(dx)^{1+n/2}. \quad (12)$$

Легко проверить (см. [7]), что это отображение — нетривиальный 1-коцикл на $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Эти коциклы возникают при действии алгебры Ли $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ на $\mathcal{D}_{\lambda, \mu}$, заданном формулой (2).

Можно, тем не менее, определить канонический символ в резонансном случае так, чтобы мерой его $\text{sl}(2, \mathbb{R})$ -неэквивариантности служил коцикл (12). После этого доказательство теорем 1 и 3 для резонансного случая повторяет доказательство для общего случая.

ЗАМЕЧАНИЕ. (а) Пространство когомологий $\text{sl}(n+1, \mathbb{R})$ с коэффициентами в $\text{Hom}(\mathcal{S}_\delta^k, \mathcal{S}_\delta^\ell)$ было полностью вычислено в [11]. В этой работе были также получены многомерные аналоги теоремы 4 и предложения 1.

(б) Фактормодули $\mathcal{D}_{\lambda, \lambda}^k / \mathcal{D}_{\lambda, \lambda}^\ell$ при $k > \ell$ были классифицированы в [13].

(в) Пространство $H^1(\text{Vect}(S^1), \text{sl}(2, \mathbb{R}); \mathcal{D}_{\lambda, \mu})$ относительных когомологий $\text{Vect}(S^1)$ (т. е. когомологий комплекса коцепей на $\text{Vect}(\mathbb{R})$), обращающихся в нуль на $\text{sl}(2, \mathbb{R})$) было впервые рассмотрено в [8] и полностью описано в [1, 14].

Мы благодарны К. Дювалю, Б. Л. Фейгину и П. Леконту за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bouarroudj S., Ovsienko V.* Three cocycles on $\text{Diff}(S^1)$ generalizing the Schwarzian derivative. *Internat. Math. Res. Notices*, No. 1, 25–39 (1998).
2. *Cohen P., Manin Yu., Zagier D.* Automorphic pseudodifferential operators. In: *Progr. Nonlinear Diff. Eq. Appl.*, Vol. 26, Birkhäuser, Boston, 1997, pp. 17–47.
3. *Duval C., Ovsienko V.* Space of second order linear differential operators as a module over the Lie algebra of vector fields. *Adv. in Math.*, **132**, No. 2, 316–333 (1997).
4. *Duval C., Lecomte P., Ovsienko V.* Conformally equivariant quantization: existence and uniqueness. *Ann. Inst. Fourier*, **49**, No. 6, 1999–2029 (1999).
5. *Фейгин Б. Л., Фукс Д. Б.* Гомологии алгебры Ли векторных полей на прямой. *Функц. анализ и его прил.*, **14**, No. 3, 45–60 (1980).
6. *Фукс Д. Б.* Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. Наука, М., 1984.
7. *Gargoubi H.* Modules des opérateurs différentiels sur la droite: géométrie projective et cohomologie de Gelfand–Fuchs. Thesis, Université de Provence, 1997.
8. *Gargoubi H., Ovsienko V.* Space of linear differential operators on the real line as a module over the Lie algebra of vector fields. *Internat. Math. Res. Notices*, No. 5, 235–251 (1996).
9. *Janson S., Peetre J.* A new generalization of Hankel operators (the case of higher weights). *Math. Nachr.*, **132**, 313–328 (1987).
10. *Kirillov A. A.* Infinite dimensional Lie groups: their orbits, invariants and representations. The geometry of moments. In: *Twistor geometry and nonlinear systems*, Lect. Notes in Math., Vol. 970, 1982, pp. 101–123.
11. *Lecomte P. B. A.* On the cohomology of $\mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R})$ acting on differential operators and $\text{opsl}(m+1, \mathbb{R})$ -equivariant symbol. Preprint Université de Liège, 1998.
12. *Lecomte P. B. A., Mathonet P., Tousset E.* Comparison of some modules of the Lie algebra of vector fields. *Indag. Math., N.S.*, **7**, No. 4, 461–471 (1996).
13. *Lecomte P. B. A., Ovsienko V.* Projectively invariant symbol calculus. *Lett. Math. Phys.*, **49**, No. 3, 173–196 (1999).
14. *Lecomte P. B. A., Ovsienko V.* Cohomology of the Vector fields Lie algebra and modules of differential operators on a smooth manifold. *Comp. Math.*, **124**, No. 1, 95–110 (2000).
15. *Martin C., Piard A.* Classification of the indecomposable bounded admissible modules over the Virasoro Lie algebra with weightspaces of dimension not exceeding two. *Comm. Math. Phys.*, **150**, No. 3, 465–493 (1992).
16. *Mathonet P.* Intertwining operators between some spaces of differential operators on a manifold. *Comm. Algebra*, **27**, No. 2, 755–776 (1999).
17. *Nijenhuis A., Richardson R. W.* Deformations of homomorphisms of Lie algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**, 175–179 (1967).
18. *Richardson R. W.* Deformations of subalgebras of Lie algebras. *J. Diff. Geom.*, **3**, 289–308 (1969).

Département de Mathématiques, IPEIM, Monastir, Tunisie
 e-mail: Hichem.Gargoubi@ipeim.rnu.tn
 CNRS, Centre de Physique Théorique,
 Luminy Case 907, Marseille, France
 e-mail: Valentin.Ovsienko@cpt.univ-mrs.fr

Поступило в редакцию
 4 октября 1999 г.
 В переработанном виде
 11 мая 2000 г.