Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жиков, К проблеме предельного перехода в дивергентных неравномерно эллиптических уравнениях, *Функц. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 1, 23–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa229>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:58:21

УДК 517.9

К проблеме предельного перехода в дивергентных неравномерно эллиптических уравнениях*

© 2001. В. В. ЖИКОВ

§1. Введение

Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^N$, а $\rho(x) \geq 0$ — весовая функция, такая, что

$$\rho, \rho^{-1} \in L^1(\Omega). \quad (1.1)$$

Рассмотрим вариационную задачу Дирихле

$$\min_{u \in W_0^{1,1}(\Omega)} \int_{\Omega} (\rho \nabla u \cdot \nabla u + u^2 - 2fu) dx, \quad f \in L^2(\Omega), \quad (1.2)$$

где $W_0^{1,1}(\Omega)$ — классическое соболевское пространство функций, равных нулю на границе. Свяжем с этой задачей весовое соболевское пространство $W = W(\Omega, \rho dx)$, определенное как совокупность функций $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ с конечной нормой $(\int_{\Omega} (\rho \nabla u \cdot \nabla u + u^2) dx)^{1/2}$. Тогда из оценки

$$\int_{\Omega} |\nabla u| dx \leq \left(\int_{\Omega} \rho |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \rho^{-1} dx \right)^{1/2}$$

видно, что пространство W полно относительно указанной нормы. Как следствие этого решение вариационной задачи (1.2) существует, единственно и принадлежит W . Очевидно, что в (1.2) вместо минимума по $W_0^{1,1}$ можно писать минимум по W , что в дальнейшем и делается. (Небольшое предостережение: обозначение « W » не содержит указаний на краевое условие Дирихле, но другие краевые условия мы не рассматриваем.)

Вес ρ предполагается вырождающимся (это значит, что $\rho + \rho^{-1}$ не принадлежит $L^\infty(\Omega)$). В приложениях такой вес обычно является результатом некоторой аппроксимации невырождающимися весами:

$$\rho_\varepsilon \rightarrow \rho, \quad \rho_\varepsilon^{-1} \rightarrow \rho^{-1} \text{ в } L^1, \quad 0 < c_1(\varepsilon) \leq \rho_\varepsilon \leq c_2(\varepsilon) < \infty. \quad (1.3)$$

Введем вариационную задачу

$$\min_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} \int_{\Omega} (\rho_\varepsilon \nabla u \cdot \nabla u + u^2 - 2fu) dx, \quad f \in L^2, \quad (1.4)$$

в качестве приближения к задаче (1.2). Можно заранее гарантировать, что последовательность решений u_ε компактна в $L^2(\Omega)$, а все ее L^2 -предельные точки лежат в W . Однако нет оснований полагать, что последовательность решений u_ε сходится к решению исходной задачи (1.2). Положение здесь не такое простое, как это можно было бы ожидать.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №99-01-00072.

Мы покажем на одном модельном примере, что имеется континуум вариационных задач, каждая из которых в одинаковой мере является «предельной» для (1.4).

Получается, что предел решений u_ε неединствен — он зависит от выбора аппроксимации (1.3). При этом не облегчают дело и дополнительные требования на вес ρ и его аппроксимации типа сходимости $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho$, $\rho_\varepsilon^{-1} \rightarrow \rho^{-1}$ в $L^p(\Omega)$ при любом $p \geq 1$ (предположение Де Джорджи).

В связи с этим возникает целый ряд вопросов. Прежде всего, является ли сама исходная задача (1.2) достижимой (или предельной), т. е. существует ли *хотя бы одна аппроксимация* ρ_ε , такая, что u_ε сходится к u — решению этой задачи? Как описать множество всех достижимых задач? Ответа на указанные вопросы в общем случае не получено.

Неединственность предельной задачи тесно связана с тем фактом, что в весовом соболевском пространстве W гладкие функции не плотны. Определим подпространство $H = H(\Omega, \rho dx)$ как замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в $W = W(\Omega, \rho dx)$. Возникает задача минимизации по гладким функциям,

$$\min_{u \in H} \int_{\Omega} (\rho \nabla u \cdot \nabla u + u^2 - 2fu) dx, \quad (1.5)$$

которая на первый взгляд кажется более подходящей для приближения задачами (1.4). Но и здесь можно только повторить сказанное по поводу задачи (1.2): в общем случае отсутствует доказательство существования хотя бы одной аппроксимации, приводящей к решению задачи (1.5).

Задачи (1.2) и (1.5) являются в определенном смысле «крайними» — они играют роль границ, между которыми «заключены» все достижимые вариационные задачи.

Разумеется, в случае равенства $W = H$ положение самое благоприятное: для любых аппроксимаций (1.3) имеет место сходимость решений к решению задачи (1.2), совпадающей в этом случае с (1.5).

То обстоятельство, что (1.2) и (1.5) — это *разные* задачи, а минимум в (1.2) строго меньше минимума в (1.5), носит в вариационном исчислении название *эффекта Лаврентьева*. Этим термином принято обозначать ситуацию, когда точная нижняя грань по множеству всех «допустимых функций» строго меньше, чем точная нижняя грань по множеству *гладких* допустимых функций. Первый пример такого типа дан М. А. Лаврентьевым [1]. По определению вес ρ *регулярен*, если $H = W$, т. е. если эффект Лаврентьева отсутствует. Конечно, невырождающийся вес регулярен. Но за пределами этого очевидного случая регулярность — весьма тонкая вещь, и «типичный» вырождающийся вес нерегулярен (см. [2, §4]).

Опишем модельный пример, в котором множество достижимых задач нетривиально. Пусть $\Omega = \{|x| < 1\}$ — единичный круг, а вес $\rho(x)$ вырождается только в точке $x = 0$ и имеет вид

$$\rho(x) = \begin{cases} \omega^{-1}(|x|), & \text{если } x_1 x_2 > 0, \\ \omega(|x|), & \text{если } x_1 x_2 < 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\omega(s) = s^\alpha \quad (0 < \alpha < 2) \quad \text{или} \quad \omega(s) = (\ln(2/s))^{-\alpha} \quad (\alpha > 1).$$

(Заметим, что во втором варианте $\rho, \rho^{-1} \in \bigcap_{p \geq 1} L^p(\Omega)$.)

Для таких и более общих весов пространство H имеет коразмерность 1 в W (см. §5). Обозначим через $\Phi(u)$ ненулевой линейный функционал на W , такой, что $\Phi(u) = 0$ на H . С помощью этого функционала введем семейство вариационных задач

$$J(\tau) = \min_{u \in W} \left\{ \int_{\Omega} (\rho \nabla u \cdot \nabla u + u^2 - 2fu) dx + \tau \Phi^2(u) \right\}, \quad (1.7)$$

где параметр τ пробегает полуось $[0, \infty]$. В частном случае $\tau = 0$ получаем задачу (1.2), а при $\tau = \infty$ — задачу (1.5).

ТЕОРЕМА 1.1. *Для веса (1.6) множество достижимых вариационных задач совпадает с семейством $J(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq \infty$). Более точно,*

(i) *из любой последовательности аппроксимаций (1.3) можно выделить подпоследовательность $\rho_{\varepsilon'}$ и указать число $\tau \in [0, \infty]$, такие, что для любого $f \in L^2$ решение $u_{\varepsilon'}$ задачи (1.4) сходится в $L^2(\Omega)$ к решению вариационной задачи $J(\tau)$;*

(ii) *для любого $\tau \in [0, \infty]$ найдется специальная аппроксимация*

$$\rho_{\varepsilon} = (\rho^{-1} + \delta)^{-1} + \varepsilon, \quad 0 < \delta = \delta(\varepsilon) \rightarrow 0,$$

такая, что при любом $f \in L^2$ решение u_{ε} соответствующей задачи (1.4) сходится в $L^2(\Omega)$ к решению задачи $J(\tau)$.

Отметим, что функционал Φ допускает следующее представление.

Вес ρ достаточно быстро растет, когда $x \rightarrow 0$, оставаясь в первой или третьей четверти круга. Как следствие этого любая функция $u \in W$ имеет в начале координат предельное значение со стороны первой четверти и со стороны третьей четверти. Указанные предельные значения $c_1(u)$ и $c_3(u)$ являются непрерывными функционалами на W и совпадают тогда и только тогда, когда $u \in H$. Предельные значения понимаются в том смысле, что в полярных координатах r, θ

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2} |c_1 - u(r, \theta)|^2 d\theta = 0$$

для первой четверти и аналогичное равенство выполняется для третьей. Видим, что в качестве функционала $\Phi(u)$ можно взять $\text{jump } u = (2/\pi)[c_1(u) - c_3(u)]$ — разность предельных значений.

С операторной точки зрения затронутые вопросы выглядят следующим образом. Уравнение Эйлера вариационной задачи (1.4)

$$u_{\varepsilon} \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad -\text{div}(\rho_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon}) + u_{\varepsilon} = f \quad (1.8)$$

запишем в виде $\mathcal{A}_{\varepsilon} u_{\varepsilon} + u_{\varepsilon} = f$, где $\mathcal{A}_{\varepsilon}$ — неотрицательный самосопряженный оператор в $L^2(\Omega)$. Очень легко доказать (далее это будет сделано, см. лемму 3.1), что последовательность $\mathcal{A}_{\varepsilon}$ компактна в смысле сильной резольвентной сходимости. Переходя, если требуется, к подпоследовательности, можно считать, что сама последовательность $\mathcal{A}_{\varepsilon}$ является сходящейся:

$$(\mathcal{A}_{\varepsilon} + \lambda)^{-1} f \rightarrow (\mathcal{A} + \lambda)^{-1} f, \quad \lambda > 0 \quad (\forall f \in L^2),$$

где $\mathcal{A}$ — некоторый неотрицательный самосопряженный оператор в L^2 (здесь достаточно сходимости только при $\lambda = 1$). В результате для решения u_{ε} задачи (1.4) имеем

$$u_{\varepsilon} = (\mathcal{A}_{\varepsilon} + 1)^{-1} f, \quad u_{\varepsilon} \xrightarrow{L^2} u, \quad \mathcal{A}u + u = f.$$

Очевидно, что предельная функция u есть решение вариационной задачи

$$\min_{u \in D(\mathbf{a})} \{ \mathbf{a}(u, u) + (u, u) - 2(f, u) \}.$$

Здесь $(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx$, $\mathbf{a}(u, u) = (\mathcal{A}^{1/2}u, \mathcal{A}^{1/2}u)$ — квадратичная форма оператора $\mathcal{A}$, конечная на области определения квадратного корня $D(\mathbf{a}) = D(\mathcal{A}^{1/2})$. (Вне $D(\mathbf{a})$, т. е. на $L^2 \setminus D(\mathbf{a})$, полагаем ее равной $+\infty$.) При этом само операторное уравнение $\mathcal{A}u + u = f$ эквивалентно уравнению Эйлера

$$u \in D(\mathbf{a}), \quad \mathbf{a}(u, \varphi) + (u, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in D(\mathbf{a}). \quad (1.9)$$

Итак, речь идет об описании множества всех предельных операторов, когда вес ρ фиксирован, а его аппроксимации удовлетворяют условию (1.3). Особую роль при этом играют операторы $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, отвечающие «крайним» вариационным задачам (1.2) и (1.5). Соответствующие квадратичные формы задаются равенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(u, u) &= \int_{\Omega} \rho \nabla u \cdot \nabla u \, dx \quad \text{на } D(\mathbf{a}_1) = W, \\ \mathbf{a}_2(u, u) &= \int_{\Omega} \rho \nabla u \cdot \nabla u \, dx \quad \text{на } D(\mathbf{a}_2) = H. \end{aligned}$$

Для общего веса, удовлетворяющего условию (1.1), мы доказываем оценку

$$\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{A} \leq \mathcal{A}_2 \text{ в смысле } \mathbf{a}_1 \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{a}_2 \text{ на } L^2, \quad (1.10)$$

но дальше этого продвинуться не удастся. Например, как отмечалось выше, неизвестно даже, достижимы ли сами операторы $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, т. е. принадлежат ли они к числу предельных для каких-либо последовательностей ρ_ε из (1.3).

Проблема описания множества предельных операторов остается до конца не решенной даже в простейшем случае, когда H имеет коразмерность 1. В этом случае один из операторов $\mathcal{A}_1$ или $\mathcal{A}_2$ всегда достижим, но достижимость другого — вопрос открытый. При этом ч. (i) теоремы 1.1 остается в силе.

Для веса (1.6) мы доказываем достижимость обоих операторов $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, и это составляет существенный шаг в доказательстве ч. (ii) теоремы 1.1.

Стоит отметить, что теорему 1.1 можно переформулировать следующим образом: для веса (1.6) множество предельных операторов составляет «операторный отрезок», т. е. эти операторы имеют вид

$$(\mathcal{A} + 1)^{-1} = k_1(\mathcal{A}_1 + 1)^{-1} + k_2(\mathcal{A}_2 + 1)^{-1}, \quad k_1, k_2 \geq 0, \quad k_1 + k_2 = 1. \quad (1.11)$$

§2. Слабые и вариационные решения вырождающегося эллиптического уравнения

Дадим некоторую классификацию решений задачи Дирихле

$$u \in W, \quad -\operatorname{div}(\rho \nabla u) + u = f, \quad f \in L^2(\Omega). \quad (2.1)$$

Возьмем любое промежуточное подпространство K , $H \subseteq K \subseteq W$.

Скажем, что функция $u \in K$ есть K -решение, если интегральное тождество

$$\int_{\Omega} \rho \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} u \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad (2.2)$$

выполнено для любого $\varphi \in K$.

По теореме Рисса о представлении K -решение существует и единственно для любого $f \in L^2$. Будем называть K -решения *вариационными* решениями.

Из определения K -решения видно, что в качестве пробной функции в интегральном тождестве можно взять само решение. В результате получаем энергетическое равенство

$$\int_{\Omega} \rho \nabla u \cdot \nabla u \, dx + \int_{\Omega} u^2 \, dx = \int_{\Omega} f u \, dx. \quad (2.3)$$

Скажем, что $u \in W$ есть *слабое* решение, если уравнение (2.1) удовлетворяется в смысле распределений, т.е. интегральное тождество выполняется для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Ясно, что для слабого решения тождество (2.2) распространяется на $\varphi \in H$, но взять в нем $\varphi = u$ и получить энергетическое равенство, вообще говоря, нельзя.

Предложение 2.1. *Слабое решение будет вариационным, если для него выполнено энергетическое равенство (2.3).*

Доказательство. В качестве пространства K можно взять наименьшее подпространство, содержащее H и само решение. Тогда интегральное тождество выполняется для $\varphi \in K$ и предложение доказано.

В частных случаях, когда $K = W$ и $K = H$, мы получаем так называемые W -решения и H -решения, которые обозначаем u_1 и u_2 соответственно. Очевидно, что u_1 — это решение вариационной задачи (1.2), $u_1 = (\mathcal{A}_1 + 1)^{-1}f$, а u_2 — задачи (1.5), $u_2 = (\mathcal{A}_2 + 1)^{-1}f$.

Допустим, что $H \neq W$, и введем подпространство

$$L = \left\{ h \in W, \int_{\Omega} \rho \nabla h \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} h \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty \right\}. \quad (2.4)$$

Иначе говоря, L — это множество всех слабых решений однородного уравнения.

По определению имеем ортогональное разложение $W = H \oplus L$ в смысле скалярного произведения

$$[u, v] = \int_{\Omega} (\rho \nabla u \cdot \nabla v \, dx + uv) \, dx, \quad u, v \in W.$$

Возьмем $h \in L$. Тогда функция $u = u_2 + th$ будет слабым решением при любом $t \in \mathbb{R}^1$, но энергетическое равенство

$$[u, u] = [u_2, u_2] + t^2[h, h] = \int_{\Omega} f(u_2 + th) \, dx$$

выполняется только при $t[h, h] = (f, h) = \int_{\Omega} f h \, dx$ (поскольку $[u_2, u_2] = (f, u_2)$). Легко понять, что формула

$$u = u_2 + (f, h)h, \quad h \in L, \quad [h, h] = 1, \quad (2.5)$$

описывает все вариационные решения. Из равенства

$$-\min_{v \in K} \{[v, v] - 2(f, v)\} = (f, u) = [u, u]$$

видно, что решение u_1 имеет среди всех вариационных решений наибольшую энергию $[u, u]$. При этом

$$(f, u_1) = (f, u_2) + \max_{h \in L, [h, h]=1} (f, h). \quad (2.6)$$

Из формул (2.5), (2.6) получаем такие следствия:

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Для данного $f \in L^2$ вариационное решение единственно тогда и только тогда, когда f ортогонально в L^2 всем слабым решениям однородного уравнения, т. е. $f \perp L$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Если $f \in L$, то $(u_2, f) < (u_1, f)$.

Среди всех слабых решений физический смысл могут иметь только те, для которых выполняется неравенство

$$[u, u] \leq (f, u). \quad (2.7)$$

Ясно, что выпуклая комбинация вариационных решений этому неравенству удовлетворяет. Верно и обратное, причем в следующей форме: слабое решение, удовлетворяющее оценке (2.7), допускает представление

$$u = u_2 + k(v - u_2), \quad 0 \leq k \leq 1, \quad v — \text{вариационное решение.}$$

Наконец, среди слабых решений особо выделяются *достижимые решения*. Это L^2 -предельные точки последовательностей решений u_ε задач (1.8) для всевозможных аппроксимаций вида (1.3). Тот факт, что предельные элементы всегда являются слабыми решениями, будет доказан в следующем параграфе. Достижимые решения удовлетворяют оценке (2.7) и поэтому представляются в виде выпуклых комбинаций вариационных решений. В целом структура множества достижимых решений остается невыясненной, например, неясно будет ли это множество выпуклым. Неизвестно также, будут ли решения u_1 и u_2 достижимыми. В §4 будет дана конструкция некоторого вариационного решения, которое всегда достижимо (вязкое решение, или V -решение), но оно не обязательно совпадает с u_1 или u_2 .

В дальнейшем важен случай, когда подпространство H имеет коразмерность 1. Тогда никаких вариационных решений, кроме u_1 и u_2 , нет. Слабые решения образуют прямую, проходящую через u_1 , u_2 . Решения, удовлетворяющие оценке (2.7), составляют отрезок, соединяющий u_1 и u_2 . Для модельного веса (1.6) этот отрезок будет также множеством достижимых решений.

§3. Оценка для предельных операторов

Начнем с того, что установим компактность семейства операторов $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div}(\rho_\varepsilon \nabla)$, отвечающих задаче Дирихле (1.8). От весов ρ_ε потребуется совсем немного:

ЛЕММА 3.1. Пусть ρ_ε , ρ_ε^{-1} ограничены в $L^1(\Omega)$. Тогда последовательность операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$ компактна в смысле сильной резольвентной сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.8) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 dx &= \int_{\Omega} f u_\varepsilon, \\ \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 dx &\leq \int_{\Omega} f^2 dx, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\int_{\Omega} \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} u_\varepsilon^2 dx \leq \int_{\Omega} f^2 dx. \quad (3.2)$$

Проверим, что для каждого $f \in L^2$ семейство решений u_ε компактно в L^2 .

В силу (3.1) ясно, что достаточно предполагать, что $f \in L^\infty$. Тогда по принципу максимума $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$. Далее, из неравенства

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon| dx \leq \left(\int_{\Omega} \rho_\varepsilon |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \rho_\varepsilon^{-1} dx \right)^{1/2} \leq C \left(\int_{\Omega} f^2 \right)^{1/2}$$

видно, что семейство u_ε ограничено в $W^{1,1}(\Omega)$. Тогда оно компактно в L^1 , а в силу равномерной ограниченности и в L^2 . Компактность семейства решений u_ε доказана.

Положим $B_\varepsilon = (\mathcal{A}_\varepsilon + 1)^{-1}$. По определению $u_\varepsilon = B_\varepsilon f$, $\|B_\varepsilon\| \leq 1$. Переходя, если нужно к подпоследовательности, считаем последовательность операторов B_ε сильно сходящейся:

$$u_\varepsilon = B_\varepsilon f \rightarrow Bf = u \quad (\forall f \in L^2).$$

Оператор B самосопряжен, и нужно, чтобы он имел тривиальное ядро. В этом случае равенство $u = Bf$ записываем как $\mathcal{A}u + u = f$, где $\mathcal{A} = B^{-1} - 1$, и получаем то, что требуется. Итак, остается проверить, что ядро оператора B тривиально.

Прежде всего, из интегрального тождества

$$\int_{\Omega} (\rho_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi + u_\varepsilon \varphi) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad (3.3)$$

в котором $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, получаем, что

$$\left(\int_{\Omega} f \varphi dx \right)^2 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\rho_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon + u_\varepsilon^2) dx \cdot \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\rho_\varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + \varphi^2) dx. \quad (3.4)$$

Допустим, что $Bf = 0$. Тогда для соответствующих решений $u_\varepsilon = B_\varepsilon f$ имеем

$$u_\varepsilon \xrightarrow{L^2} 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\rho_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon + u_\varepsilon^2) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f u_\varepsilon dx = 0.$$

Поскольку второй множитель справа в (3.4) конечен (благодаря ограниченности последовательности ρ_ε в L^1), $(f, \varphi) = 0$ для любого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Поэтому $f = 0$ и ядро оператора B тривиально. Лемма доказана.

Теперь, предполагая выполненным основное условие (1.3), изучим свойства предельной функции и предельного оператора. Итак, пусть $u_\varepsilon \rightarrow u$, $\mathcal{A}u + u = f$.

ЛЕММА 3.2. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *предельная функция u принадлежит W , причем*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \geq \int_{\Omega} \rho |\nabla u|^2 dx; \quad (3.5)$$

(ii) *для предельного оператора $\mathcal{A}$ выполнена оценка (1.10);*

(iii) *и есть слабое решение эллиптического уравнения (2.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Для любого измеримого множества $S \subset \Omega$

$$\int_S |\nabla u_\varepsilon| dx \leq \left(\int_{\Omega} \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_S \rho_\varepsilon^{-1} dx \right)^{1/2} \leq C \left(\int_S \rho_\varepsilon^{-1} dx \right)^{1/2} \leq \delta, \quad (3.6)$$

как только мера множества S достаточно мала. Здесь мы воспользовались оценкой (3.2) и слабой компактностью последовательности ρ_ε^{-1} в $L^1(\Omega)$. Тогда (в

силу известного критерия) последовательность ∇u_ε слабо компактна в $L^1(\Omega)$. В результате получаем, что $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ и $\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup \nabla u$ в $L^1(\Omega)$.

По неравенству Юнга

$$\int_{\Omega} \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \geq \int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \cdot \psi dx - \int_{\Omega} \rho_\varepsilon^{-1} |\psi|^2 dx \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega)^N.$$

Отсюда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \geq \int_{\Omega} \nabla u \cdot \psi dx - \int_{\Omega} \rho^{-1} |\psi|^2 dx.$$

Взяв справа точную верхнюю грань по ψ , получим неравенство (3.5).

(ii) Мы докажем оценку

$$\int_{\Omega} u_2 f dx \leq \int_{\Omega} u f dx \leq \int_{\Omega} u_1 f dx, \quad (3.7)$$

где u_1 , u_2 — это W -решение и H -решение соответственно, $u_1 = (\mathcal{A}_1 + 1)^{-1} f$, $u_2 = (\mathcal{A}_2 + 1)^{-1} f$. Из этой оценки следует операторное неравенство $(\mathcal{A}_2 + 1)^{-1} \leq (\mathcal{A} + 1)^{-1} \leq (\mathcal{A}_1 + 1)^{-1}$, которое, как известно, эквивалентно неравенству (1.12). Очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\rho_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon + u_\varepsilon^2) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon f dx = \int_{\Omega} u f dx,$$

и оценка (3.5) дает неравенство

$$\int_{\Omega} u f dx \geq \int_{\Omega} (\rho \nabla u \cdot \nabla u + u^2) dx = [u, u],$$

т. е. получено неравенство (2.7). С другой стороны, из вариационных соображений

$$\int_{\Omega} f u_1 dx = -[u_1, u_1] + 2 \int_{\Omega} u_1 f \geq -[u, u] + 2 \int_{\Omega} u f dx \geq \int_{\Omega} u f dx,$$

и правая оценка из (3.7) доказана. Далее, из (3.4) имеем

$$\left(\int_{\Omega} f \varphi dx \right)^2 \leq \int_{\Omega} f u dx \cdot \int_{\Omega} (\rho \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + \varphi^2) dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3.8)$$

Это неравенство можно распространить на $\varphi \in H$ и взять $\varphi = u_2$. Так как

$$\int_{\Omega} (\rho \nabla u_2 \cdot \nabla u_2 + u_2^2) dx = \int_{\Omega} f u_2 dx,$$

то левая оценка из (3.7) также доказана.

(iii) Это свойство есть следствие оценки (1.10). Действительно, для разности $\mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_1$ имеем

$$\mathbf{b}|_H = 0, \quad \mathbf{b} \geq 0 \text{ на } D(\mathbf{a}) \supset H.$$

Отсюда для $u \in D(\mathbf{a})$, $\varphi \in H$ вытекает неравенство

$$\mathbf{b}^2(u, \varphi) \leq \mathbf{b}(u, u) \mathbf{b}(\varphi, \varphi) = 0.$$

Мы получили, что

$$\mathbf{a}(u, \varphi) = \mathbf{a}_1(u, \varphi) = \int_{\Omega} \rho \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \quad \text{для } u \in D(\mathbf{a}), \varphi \in H.$$

Тогда из уравнения Эйлера (1.9) видно, что u — слабое решение уравнения (2.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Нам понадобятся также некоторые уточнения доказанной леммы. А именно, пусть последовательность ρ_ε по-прежнему удовлетворяет условию (1.3), но теперь ρ_ε сами произвольны, т.е. не обязательно ограничены сверху и отделены от нуля при фиксированном ε . Снова рассматриваем допредельные уравнения (1.8), но теперь необходимо оговаривать, о каких именно решениях идет речь.

(а) Пусть u_ε — вариационное решение уравнения (1.8), $u_\varepsilon \rightarrow u$. Тогда вы-полнена оценка (3.7) u , в частности, u есть слабое решение уравнения (2.1).

Действительно, в доказательстве указанной оценки мы использовали только энергетическое равенство для u_ε и тождество (3.3) на гладких функциях.

(б) Пусть u_ε есть W -решение u , кроме того, $\rho_\varepsilon \leq \rho$. Тогда $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = u_1$.

Действительно, в этом случае в тождестве (3.3) и в неравенстве (3.4) можно взять произвольную функцию $\varphi \in W = W(\Omega, \rho dx)$, в частности, $\varphi = u_1$. В результате получим

$$\left(\int_{\Omega} u_1 f dx \right)^2 \leq \int_{\Omega} u f dx \cdot \int_{\Omega} u_1 f dx,$$

что (вместе с левой оценкой из (3.7)) дает искомое равенство

$$\int_{\Omega} u f dx = \int_{\Omega} u_1 f dx.$$

(с) Пусть u_ε есть H -решение u дополнительно $\rho_\varepsilon \geq \rho$. Тогда $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = u_2$.

Действительно, согласно (а), предел $u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon$ есть слабое решение уравнения (2.1), и нам остается проверить, что $u \in H = H(\Omega, \rho)$. Но очевидно, что

$$u_\varepsilon \in H(\Omega, \rho_\varepsilon), \quad \rho_\varepsilon \geq \rho \implies u_\varepsilon \in H(\Omega, \rho).$$

Так как последовательность u_ε ограничена в $H(\Omega, \rho)$, то $u \in H(\Omega, \rho)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Приведем другой вывод оценок (1.10), столь же простой, но основанный на несколько иных соображениях. Будем использовать следующую характеристику сильной резольвентной сходимости.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}$ — неотрицательные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве L^2 и $\mathbf{a}_\varepsilon, \mathbf{a}$ — соответствующие квадратичные формы. Тогда сильная резольвентная сходимость $\mathcal{A}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{A}$ эквивалентна следующим двум свойствам:

(1) для любой слабо сходящейся последовательности $u_\varepsilon \rightharpoonup u$

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{a}_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq \mathbf{a}(u, u);$$

(2) для любого $u \in L^2$ найдется последовательность u_ε , такая, что

$$u_\varepsilon \rightarrow u, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{a}_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \mathbf{a}(u, u). \quad (3.9)$$

Эту теорему можно получить из общих теорем, связывающих сильную резольвентную сходимость с граф-сходимостью (см. [3, гл. VIII]). Кроме того, она в явной форме доказана в работе Моско [4]. Более общие результаты, касающиеся выпуклых функций, получены Аттушем [5].

Применим теорему 3.5 к выводу оценок (1.10).

Чтобы получить оценку $\mathbf{a} \leq \mathbf{a}_2$ рассуждаем следующим образом. Для $u \in C_0^\infty(\Omega)$, очевидно,

$$\mathbf{a}_\varepsilon(u, u) = \int_{\Omega} \rho_\varepsilon \nabla u \cdot \nabla u \, dx \rightarrow \int_{\Omega} \rho \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \mathbf{a}_2(u, u).$$

Тогда по свойству (1) (примененному к последовательности $u_\varepsilon = u$)

$$\mathbf{a}(u) \leq \mathbf{a}_2(u) \quad \text{для } u \in C_0^\infty. \quad (3.10)$$

Требуется распространить это неравенство на все L^2 или, что то же самое, на $H \subset L^2$, так как вне H форма $\mathbf{a}_2$ равна $+\infty$. По определению пространства H найдем $u_n \in C_0^\infty$, такие, что $\|u - u_n\|_W \rightarrow 0$. Тогда

$$\mathbf{a}_2(u_n, u_n) = \int_{\Omega} \rho \nabla u_n \cdot \nabla u_n \, dx \rightarrow \int_{\Omega} \rho \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \mathbf{a}_2(u, u).$$

Форма $\mathbf{a}$ полунепрерывна снизу на L^2 — это следствие самосопряженности соответствующего оператора. Поэтому

$$\mathbf{a}(u, u) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{a}(u_n, u_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{a}_2(u_n, u_n) = \mathbf{a}_2(u, u),$$

и мы получаем требуемое.

Докажем неравенство $\mathbf{a}_1(u, u) \leq \mathbf{a}(u, u)$. Можно считать, что $\mathbf{a}(u, u) < \infty$. Тогда для последовательности u_ε из (3.9) имеем

$$+\infty > \mathbf{a}(u, u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \rho_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon \, dx \geq \int_{\Omega} \rho \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \mathbf{a}_1(u, u)$$

в силу оценки (3.5), которая здесь, очевидно, применима. Второе доказательство оценок (1.10) на этом закончено.

§4. Вопросы достижимости

1. Рассмотрим случай, когда подпространство H имеет коразмерность 1.

Подпространство L (см. (2.4)) будет одномерным, $L = \{th\}$.

ЛЕММА 4.1. *Любой предельный оператор допускает представление (1.11). Другими словами, решение предельного уравнения $\mathcal{A}u + u = f$ есть выпуклая комбинация вариационных решений u_1, u_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для сокращения записи положим

$$B = (\mathcal{A} + 1)^{-1}, \quad B_1 = (\mathcal{A}_1 + 1)^{-1}, \quad B_2 = (\mathcal{A}_2 + 1)^{-1}.$$

Возьмем $f \perp h$ в $L^2(\Omega)$. Тогда $B_1 f = B_2 f$ по следствию 2.2. Отсюда (см. оценку (3.7))

$$(B_2 f, f) = (B f, f) = (B_1 f, f) \implies B f = B_1 f = B_2 f \quad \text{для } f \perp h.$$

В таком случае h есть собственный вектор для $B - B_1$ и $B - B_2$, т. е.

$$Bh - B_1 h = t_1 h, \quad B_2 h - Bh = t_2 h.$$

Отсюда получаем, что

$$Bh = k_1 B_1 h + k_2 B_2 h \implies B = k_1 B_1 + k_2 B_2,$$

причем из неравенств

$$(B_2 h, h) \leq k_1 (B_1 h, h) + k_2 (B_2 h, h) \leq (B_1 h, h) \quad (\text{оценка (3.7)}),$$

$$(B_2 h, h) < (B_1 h, h) \quad (\text{следствие 2.3}),$$

следует, что $k_1, k_2 \geq 0$, $k_1 + k_2 = 1$. Лемма доказана.

Сейчас мы найдем представление квадратичной формы предельного оператора.

Пусть Φ — ненулевой линейный функционал на W , такой, что $\Phi = 0$ на H .

ЛЕММА 4.2. *Для квадратичной формы предельного оператора справедливо представление*

$$\mathbf{a}(u, u) = \int_{\Omega} \rho \nabla u \cdot \nabla u \, dx + \tau \Phi^2(u) \quad \text{на } W, \quad (4.1)$$

в котором τ — некоторое число из $[0, \infty]$. Подробнее это означает, что при конечном τ областью определения квадратичной формы служит пространство W , а при $\tau = \infty$ — подпространство H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вариационную задачу (1.7), считая для определенности, что $\tau < \infty$. Из соответствующего уравнения Эйлера

$$u \in W, \quad [u, \varphi] + \tau \Phi(u) \Phi(\varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in W \quad (4.2)$$

вытекает, что u есть слабое решение задачи (2.1). Поэтому u лежит на прямой, проходящей через u_1 , u_2 , т. е. имеет вид $u = k_1 u_1 + k_2 u_2$ с $k_1 + k_2 = 1$. Требуется проверить, что $0 \leq k_1 \leq 1$ и что k_1 не зависит от f .

Запишем функционал Φ в виде $\Phi(u) = [u, h_0]$. Тогда из (4.2) имеем

$$[u, h_0] + \tau [u, h_0][h_0, h_0] = (f, h_0) = [u_1, h_0].$$

Так как $[u_2, h_0] = 0$, то

$$k_1 [u_1, h_0] + k_1 \tau [u_1, h_0][h_0, h_0] = [u_1, h_0],$$

$$k_1 + k_1 \tau c_0 = 1, \quad c_0 = [h_0, h_0] > 0, \quad k_1 = (1 + c_0 \tau)^{-1}.$$

Мы получили, что решение уравнения (4.1) есть выпуклая комбинация решений u_1 , u_2 . Тогда для оператора $\mathcal{A}$, отвечающего квадратичной форме (4.1), справедливо равенство $(\mathcal{A} + 1)^{-1} = k_1 B_1 + k_2 B_2$, и достаточно ссылки на предыдущую лемму.

2. Рассматриваем вес (1.6). Наша цель — доказать достижимость операторов $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, после чего будет уже нетрудно установить достижимость всего операторного отрезка (1.11).

Сначала одно пояснение, касающееся «регулярных весов». Напомним, что вес ρ общего вида (1.1) *регулярен*, если $W(\Omega, \rho) = H(\Omega, \rho)$. Проблема регулярности в целом носит тонкий характер, но нам понадобится только один простой факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Пусть вес ρ вырождается только в одной точке внутри Ω (т. е. вне любой окрестности этой точки он ограничен сверху и отделен от нуля). Тогда он регулярен, если выполнено одно из двух условий*

- 1) $\rho \in L^\infty(\Omega)$;
- 2) $N = 2$, $\rho^{-1} \in L^\infty(\Omega)$.

(Доказательство можно найти в [2, §4]).

Перейдем к вопросам достижимости. Введем двойную аппроксимацию $\rho_{\varepsilon,\delta} = (\rho^{-1} + \delta)^{-1} + \varepsilon$ ($\delta, \varepsilon > 0$) и соответствующую задачу Дирихле

$$u_{\varepsilon,\delta} \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad -\operatorname{div}(\rho_{\varepsilon,\delta} \nabla u_{\varepsilon,\delta}) + u_{\varepsilon,\delta} = f.$$

ЛЕММА 4.4. Для любого $f \in L^2$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} u_{\varepsilon,\delta} = u_2, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon,\delta} = u_1. \quad (4.3)$$

Другими словами, в смысле сильной резольвентной сходимости

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{A}_{\varepsilon,\delta} = \mathcal{A}_2, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{A}_{\varepsilon,\delta} = \mathcal{A}_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вспомним утверждение (b) из замечания 3.3. Из него мы получаем, что $\lim_{\delta \rightarrow 0} u_{\varepsilon,\delta} = u_{\varepsilon,0}$ есть W -решение для уравнения вида (2.1) с весом $\rho + \varepsilon$. Этот вес вырождается в одной точке $x = 0$ и отделен от нуля в Ω . Поэтому $u_{\varepsilon,0}$ есть также H -решение. Тогда, согласно утверждению (c) из замечания 3.3, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon,0} = u_2$, и первое из соотношений (4.3) доказано.

Далее, согласно утверждению (c) из замечания 3.3, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon,\delta} = u_{0,\delta}$ есть H -решение уравнения вида (2.1) с весом $(\rho^{-1} + \delta)^{-1}$. Этот вес вырождается только в точке $x = 0$ и ограничен сверху; следовательно, он регулярен и $u_{0,\delta}$ есть также W -решение соответствующего уравнения. Тогда в силу утверждения (b) из замечания 3.3 $\lim_{\delta \rightarrow 0} u_{0,\delta} = u_1$, и лемма полностью доказана.

Теперь зададимся числами $k_1, k_2 \geq 0$, $k_1 + k_2 = 1$, и докажем достижимость оператора $\mathcal{A}$, определенного равенством $(\mathcal{A} + 1)^{-1} = k_1 B_1 + k_2 B_2$. Соотношения (4.3), в частности, дают

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega} h u_{\varepsilon,\delta} dx &= \int_{\Omega} h u_1 dx = (B_1 h, h), \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} h u_{\varepsilon,\delta} dx &= \int_{\Omega} h u_2 dx = (B_2 h, h). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из соображений непрерывности найдем $\delta = \delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$, такое, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} h u_{\varepsilon,\delta(\varepsilon)} dx = k_1 \int_{\Omega} h u_1 dx + k_2 \int_{\Omega} h u_2 dx. \quad (4.5)$$

Без потери общности считаем, что $\mathcal{A}_{\varepsilon,\delta(\varepsilon)} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ в смысле сильной резольвентной сходимости. По лемме 4.1

$$\tilde{B} = (\tilde{\mathcal{A}} + 1)^{-1} = \tilde{k}_1 B_1 + \tilde{k}_2 B_2, \quad \tilde{k}_1, \tilde{k}_2 \geq 0, \quad \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 = 1.$$

Тогда в силу (4.4), (4.5) ясно, что

$$(\tilde{B}h, h) = k_1(B_1h, h) + k_2(B_2h, h) = \tilde{k}_1(B_1h, h) + \tilde{k}_2(B_2h, h).$$

Так как $(B_1h, h) \neq (B_2h, h)$, то $\tilde{k}_1 = k_1$, $\tilde{k}_2 = k_2$ и достижимость установлена.

Тем самым теорема 1.1 полностью доказана.

3. Сейчас мы введем одно вариационное решение, которое будет достижимым для общего веса (1.1). Рассмотрим множество

$$S = \left\{ u \in W_0^{1,2}(\Omega), \int_{\Omega} \rho |\nabla u|^2 dx < \infty \right\}$$

и определим V как его замыкание в W .

Примеры показывают, что, вообще говоря, вложение $H \subseteq V \subseteq W$ строгое. Снова используем двойную аппроксимацию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Повторный предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} u_{\varepsilon, \delta}$ есть V -решение уравнения (2.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению (b) из замечания 3.3, $\lim_{\delta \rightarrow 0} u_{\varepsilon, \delta} = u_{\varepsilon, 0}$ есть W -решение уравнения с весом $\rho + \varepsilon$. Ясно, что $W(\Omega, (\rho + \varepsilon) dx) = S$. Поэтому $u_{\varepsilon, 0} \in S$ и справедливо интегральное тождество

$$\int_{\Omega} \rho \nabla u_{\varepsilon, 0} \cdot \nabla \varphi dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon, 0} \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} u_{\varepsilon, 0} \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad (4.6)$$

в котором $\varphi \in S$. Обычная оценка

$$\int_{\Omega} \rho |\nabla u_{\varepsilon, 0}|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon, 0}|^2 dx + \int_{\Omega} u_{\varepsilon, 0}^2 dx \leq \int_{\Omega} f^2 dx$$

показывает, что последовательность $u_{\varepsilon, 0}$ ограничена в W и потому $u_{\varepsilon, 0} \rightharpoonup u$ в V .

Предельный переход в тождестве (4.6) очевиден для функций φ из S ; в результате получаем

$$\int_{\Omega} \rho \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} u \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

Так как функции φ из S плотны в V (по определению), то u есть V -решение. Предложение доказано.

Необходимо подчеркнуть, что существование каких-либо других достижимых вариационных решений в общем случае не установлено. Легкость, с которой была доказана достижимость V -решений, не должна вводить в заблуждение. Вот ситуация похожая, но более трудная: *будет ли другой повторный предел $\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon, \delta}$ вариационным решением?* Попробуем понять, в чем здесь дело.

Согласно утверждению (c) из замечания 3.3, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon, \delta} = u_{0, \delta}$ есть H -решение для уравнения с весом $(\rho^{-1} + \delta)^{-1}$. Теперь надо переходить к пределу в H -решениях при $\delta \rightarrow 0$, когда вес монотонно растет, но этого как раз сделать и не удастся (в отличие от W -решений, см. утверждение (b) из замечания 3.3).

Снова вернемся к случаю, когда H имеет коразмерность 1. Очевидно, что V совпадает с H или W , т.е. один из операторов $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ достижим. Можно утверждать, что множество достижимых операторов есть подотрезок (быть может, вырожденный) отрезка (1.13), причем один его конец совпадает с $\mathcal{A}_1$ или $\mathcal{A}_2$.

§5. Весовое соболевское пространство

Пусть в единичном круге $\Omega = \{|x| < 1\}$ вес ρ имеет структуру, указанную в (1.6), но с функцией ω более общего вида. Считаем, что $\omega(s)$ непрерывна на $[0, 1]$, $\omega(0) = 0$, $\omega(s) > 0$ при $s > 0$ и

$$\int_0^1 \frac{\omega(s) ds}{s} < \infty. \quad (5.1)$$

На функцию $\omega(s)$ будет наложено еще одно ограничение, которое носит технический характер и выполняется для примеров из (1.6). В этих условиях мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.1. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *любая функция $u \in W$ имеет в начале координат «предельное» значение со стороны первой четверти и предельное значение со стороны третьей четверти;*

(ii) *указанные предельные значения являются непрерывными функционалами на W и совпадают тогда и только тогда, когда $u \in H$;*

(iii) *пространство H имеет коразмерность 1 в W .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 — четверти единичного круга Ω , занумерованные в естественном порядке. Рассмотрим вопрос о предельном значении в нуле сужения $u|_{Q_1}$ функции $u \in W$ на первую четверть. В полярных координатах r, θ имеем $u = u(r, \theta)$,

$$\begin{aligned} u(s, \theta) - u(t, \theta) &= \int_t^s \frac{\partial u}{\partial r} dr, \\ [u(s, \theta) - u(t, \theta)]^2 &\leq \left(\int_t^s |\nabla u| dr \right)^2 \leq \int_t^s \frac{\omega}{r} dr \cdot \int_0^1 |\nabla u|^2 \frac{r}{\omega} dr, \\ \int_0^{\pi/2} [u(s, \theta) - u(t, \theta)]^2 d\theta &\leq \int_{Q_1} \rho |\nabla u|^2 dx \cdot \int_t^s \frac{\omega dr}{r}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Теперь из (5.1) вытекает, что последовательность $u(s, \cdot)$ является фундаментальной в $L^2(0, \pi/2)$ при $s \rightarrow 0$. Убедимся, что соответствующий предел есть константа. Действительно,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right| r^{-1} \leq |\nabla u|, \quad \int_0^1 \frac{dr}{\omega r} \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\partial u}{\partial \theta} \right|^2 d\theta \leq \int_{Q_1} \omega^{-1} |\nabla u|^2 dx < \infty.$$

Так как $\int_0^1 (\omega r)^{-1} dr = \infty$, то $\partial u(r, \cdot)/\partial \theta \rightarrow 0$ в $L^2(0, \pi/2)$ по крайней мере для некоторой подпоследовательности $r_n \rightarrow 0$. Тогда $\lim_{r_n \rightarrow 0} u(r_n, \cdot) = \text{const}$ и поэтому $\lim_{r \rightarrow 0} u(r, \cdot) = \text{const}$. Эту константу, деленную на $\pi/2$, будем называть предельным значением в нуле со стороны Q_1 . Ясно также, что предельное значение есть непрерывный на W функционал, так как из (5.2), взяв $s = 1$, получаем

$$\int_0^{\pi/2} u^2(t, \theta) d\theta \leq c \int_{Q_1} \rho |\nabla u|^2 dx.$$

Рассмотрим теперь функцию $u \in H = H(\Omega, \rho dx)$. Очевидно, что предельные значения со стороны Q_1 и Q_3 совпадают. Докажем, что верно и обратное: если $u \in W$ имеет одинаковые предельные значения в нуле, то $u \in H$.

Обозначим общее предельное значение через $u(0)$ и введем аппроксимацию

$$u_\varepsilon(x) = u(0) + [u(x) - u(0)]\varphi_\varepsilon(|x|),$$

где срезающая функция $\varphi_\varepsilon(t)$ задана равенством

$$\varphi_\varepsilon(t) = \int_0^t \varphi'_\varepsilon(s) ds, \quad \varphi'_\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{на } [0, \delta(\varepsilon)], \\ c_\varepsilon \omega(t)/t & \text{на } [\delta(\varepsilon), \varepsilon], \\ 0 & \text{на } [\varepsilon, 1], \end{cases} \quad (5.3)$$

причем константу c_ε и число $\delta(\varepsilon)$ определим так:

$$c_\varepsilon^{-1} = \int_{\delta(\varepsilon)}^\varepsilon \frac{\omega dt}{t}, \quad \int_0^\varepsilon \frac{\omega dt}{t} \leq 2 \int_{\delta(\varepsilon)}^\varepsilon \frac{\omega dt}{t}. \quad (5.4)$$

Достаточно доказать слабую сходимость $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в W . Так как

$$\nabla u_\varepsilon = \nabla u \varphi_\varepsilon + [u(x) - u(0)] \nabla \varphi_\varepsilon \quad (5.5)$$

и $u_\varepsilon \rightarrow u$ в $L^2(\Omega)$, то требуется проверить, что последовательность ∇u_ε ограничена в $L^2(\Omega, \rho dx)$. Ограниченность первого слагаемого в (5.5) очевидна. Рассмотрим второе слагаемое

$$z_\varepsilon = [u(x) - u(0)] \nabla \varphi_\varepsilon. \quad (5.6)$$

В силу (5.2)–(5.6) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} |u(r, \theta) - u(0)|^2 d\theta &\leq c_1 \int_0^r \frac{\omega dt}{t}, \\ \int_{Q_1} \omega^{-1} |z_\varepsilon|^2 dx &\leq c_\varepsilon^2 \int_\delta^\varepsilon \int_0^{\pi/2} |u(r, \theta) - u(0)|^2 \frac{\omega dr d\theta}{r} \leq c_1 c_\varepsilon^2 \int_\delta^\varepsilon \left(\int_0^r \frac{\omega dt}{t} \right) \frac{\omega dr}{r} \\ &= c_1 c_\varepsilon^2 \left[\left(\int_0^\varepsilon \frac{\omega dt}{t} \right)^2 - \left(\int_0^\delta \frac{\omega dt}{t} \right)^2 \right] \leq 4c_1 \end{aligned}$$

и аналогичные неравенства справедливы для Q_3 . Этим доказана ограниченность интеграла $\int_{Q_1 \cup Q_3} \omega^{-1} |z_\varepsilon|^2 dx$.

Рассмотрим вопрос об ограниченности интеграла

$$\int_{Q_2 \cup Q_4} \omega |z_\varepsilon|^2 dx. \quad (5.7)$$

Сначала отметим, что функцию u можно считать ограниченной, $|u| \leq M$, поскольку для срезки

$$u^{(k)} = \begin{cases} u, & \text{если } |u| \leq k, \\ +k, & \text{если } |u| > k, \end{cases}$$

нетрудно доказать сильную сходимость $u^{(k)} \rightarrow u$ в $W(\Omega, \rho dx)$ при $k \rightarrow \infty$.

В таком случае

$$\int_{Q_2 \cup Q_4} \omega |z_\varepsilon|^2 dx \leq 4M c_\varepsilon^2 \int_\delta^\varepsilon \frac{\omega^3 dt}{t}$$

и ограниченность интеграла (5.7) имеет место, если $\omega(t)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\int_0^\varepsilon \frac{\omega^3 dt}{t} \leq c \left(\int_0^\varepsilon \frac{\omega dt}{t} \right)^2.$$

Легко проверить, что для функций w из (1.6) это условие выполняется. Тем самым доказаны утверждения (i), (ii).

Теперь рассмотрим функцию

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 > 0, x_2 > 0, \\ \sin \theta, & \text{если } x_1 < 0, x_2 > 0, \\ 0, & \text{если } x_1 < 0, x_2 < 0, \\ \cos \theta, & \text{если } x_1 > 0, x_2 < 0. \end{cases}$$

По построению $\nabla u|_{Q_1 \cup Q_3} = 0$, $|\nabla u|_{Q_2 \cup Q_4} \leq cr^{-1}$, и потому $\int_\Omega \rho |\nabla u|^2 dx < \infty$, что следует из (5.1). Если теперь взять $u_0 = \eta u$, где $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta \equiv 1$ в окрестности начала координат, то получим, что $u_0 \in W$.

С другой стороны, для функции u_0 предельные значения в нуле из Q_1 и Q_3 различны, т. е. $u_0 \notin H$. Тогда ясно также, что H имеет коразмерность 1.

§6. Некоторые замечания

Здесь мы кратко затронем общую теорию G -сходимости вырождающихся эллиптических уравнений с единственной целью — указать место, которое занимают в этой теории оценки вида (1.10).

Рассматриваем последовательность задач Дирихле

$$u_\varepsilon \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad -\operatorname{div} A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon + u^\varepsilon = f. \quad (6.1)$$

Предполагаем, что при фиксированном $\varepsilon > 0$ симметрическая измеримая матрица A_ε ограничена и эллиптична: $0 < c_1(\varepsilon)E \leq A_\varepsilon(x) \leq c_2(\varepsilon)E$, где E — единичная матрица. Основным является условие

$$A_\varepsilon, A_\varepsilon^{-1} \text{ слабо компактны в } L^1(\Omega).$$

Легко видеть, что семейство самосопряженных операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$, отвечающих задаче (6.1), компактно в смысле сильной резольвентной сходимости (лемма 3.1 сохраняется). Целью теории G -сходимости является выяснение структуры предельных операторов.

Первый шаг составляет следующая

ТЕОРЕМА 6.1 (об интегральном представлении на гладких функциях). *Для предельного оператора $\mathcal{A}$ найдется симметрическая матрица $A(x)$, такая, что $A, A^{-1} \in L^1$ и*

$$\mathbf{a}(u, u) = \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla u \, dx \quad \text{на } C_0^\infty(\Omega). \quad (6.2)$$

В явном виде эта теорема доказана в работе Моско [4] с помощью техники Дирихле-форм. Между тем еще в работе [6] 1983 г. было получено интегральное представление на гладких функциях для Γ -пределов нестандартных вариационных функционалов. Теорему 6.1 легко извлечь из этих результатов, поскольку вырождающиеся эллиптические задачи являются частным случаем нестандартных вариационных задач.

Интегрального представления (6.2) еще далеко недостаточно для приложений — требуется знать, как устроена форма $\mathbf{a}$ на всем множестве $D(\mathbf{a})$.

В связи с этим введем весовое соболевское пространство

$$W = W(\Omega, A \, dx) = \left\{ u \in W_0^{1,1}(\Omega), \int_{\Omega} (A \nabla u \cdot \nabla u + u^2) \, dx < \infty \right\}$$

и подпространство $H = H(\Omega, A \, dx)$ как замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в W . Определим также формы

$$\mathbf{a}_1(u, u) = \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla u \, dx \quad \text{на } D(\mathbf{a}_1) = W,$$

$$\mathbf{a}_2(u, u) = \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla u \, dx \quad \text{на } D(\mathbf{a}_2) = H.$$

Теперь замечаем, что неравенство $\mathbf{a} \leq \mathbf{a}_2$ автоматически следует из (6.2) (вспомним вывод этого неравенства из (3.10)).

Что касается второго неравенства $\mathbf{a} \geq \mathbf{a}_1$, то оно носит иной (двойственный по отношению к первому) характер и из локального представления (6.2) не выводится. Довольно длительное время это неравенство было камнем преткновения

в теории G -сходимости. В книге [7, с. 417] это неравенство широко обсуждается как нерешенная проблема. В ее английском варианте [8] соответствующие разделы написаны по мотивам работы [9], где неравенство типа $\mathbf{a} \geq \mathbf{a}_1$ доказано в контексте общих нестандартных вариационных задач.

Итак, мы можем дополнить теорему 6.1 о локальном интегральном представлении следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 6.2. *Для любого предельного оператора выполнена оценка (1.10).*

Отсюда, в частности, получаем

СЛЕДСТВИЕ 6.3. *Предположим, что матрица A из локального интегрального представления (6.2) регулярна, т. е. $W = H$. Тогда справедливо «глобальное» интегральное представление квадратичной формы предельного оператора*

$$\mathbf{a}(u, u) = \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla u \, dx \quad \text{на } D(\mathbf{a}).$$

Примеры, построенные в настоящей работе, показывают, насколько сложно может быть устроен предельный оператор, если условие регулярности не выполняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lavrentiev M.* Sur quelques problèmes du calcul variations, *Ann Mat. Pura Appl.*, **4**, 7–28 (1926).
2. *Жиков В. В.* О весовых соболевских пространствах. *Матем. сб.*, **189**, №8, 27–58 (1998).
3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики, т. 1, Функциональный анализ. Мир, М., 1982.
4. *Mosco U.* Composite media and asymptotic Dirichlet forms. *J. Funct. Anal.*, **123**, 368–421 (1994).
5. *Attouch H.* Variational convergence for functions and operators. Pitman, London, 1984.
6. *Жиков В. В.* Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для одного класса функционалов вариационного исчисления. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **47**, №5, 961–998 (1983).
7. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. Наука, М., 1993.
8. *Jikov V. V., Kozlov S. M., Oleinik O. A.* Homogenization of differential operators and integral functionals. Springer-Verlag, 1994.
9. *Жиков В. В.* О переходе к пределу в нелинейных вариационных задачах. *Матем. сб.*, **138**, №8, 47–84 (1992).

Владимирский государственный
педагогический университет
e-mail: zhikov@vgpu.vladimir.ru

Поступило в редакцию
27 августа 1999 г.