Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Овчинников, Я. И. Попов, Об оптимальности интерполяционной конструкции Кальдерона–Лозановского, *Функци. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 1, 79–83

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa23>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:08:34

Об оптимальности интерполяционной конструкции Кальдерона–Лозановского

© 2006. В. И. Овчинников, Я. И. Попов

1. Введение. Как известно, теорема Рисса–Торина утверждает, что если линейный оператор непрерывно действует из пространства L_{p_0} в пространство L_{q_0} и из пространства L_{p_1} в пространство L_{q_1} , то он непрерывно действует из промежуточного между L_{p_0} и L_{p_1} пространства L_p в пространство L_q , где $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$, $1/q = (1 - \theta)/q_0 + \theta/q_1$ при некотором $0 < \theta < 1$. Как установили Дмитриев и Семенов [3], в «нижнем треугольнике», т. е. при $q_0 \leq p_0$ и $q_1 \leq p_1$, эта теорема точна в том смысле, что пространство L_q не может быть уменьшено сразу для всех рассматриваемых операторов. В настоящей работе установлено, что точность в «нижнем треугольнике» имеет место не только в классе пространств L_p , но и для любого пространства $\varphi(L_{p_0}, L_{p_1})$, построенного с помощью конструкции Кальдерона–Лозановского с произвольной функцией φ . При этом образом пространства $\varphi(L_{p_0}, L_{p_1})$ будет пространство $\varphi(L_{q_0}, L_{q_1})$. Множество таких пространств включает в себя все интерполяционные пространства Орлича между L_{p_0} и L_{p_1} . Более того, точность имеет место для пар весовых пространств L_p ; поэтому мы можем рассматривать и случаи $p_0 = p_1$, $q_0 = q_1$. Пространства с мерой, на которых рассматриваются соответствующие пространства функций, могут быть любыми, лишь в какой-то мере существенна структура пространств с мерой, на которых заданы функции из областей определения операторов.

2. Определения и обозначения. Как обычно, через L_p будем обозначать пространство измеримых функций a на пространстве $\mathfrak{M}$ с мерой μ , таких, что

$$\|a\|_{L_p} = \left(\int_{\mathfrak{M}} |a|^p d\mu \right)^{1/p} \quad \text{при } p < \infty.$$

Пространство L_∞ определяется обычным образом. Обозначим через $L_p(U)$, где U — строго положительная измеримая функция, пространство таких a , что $aU \in L_p$, и введем норму $\|a\|_{L_p(U)} = \|aU\|_{L_p}$.

Положительная возрастающая по s и t функция $\varphi(s, t)$, где $s, t > 0$, называется интерполяционной, если $\varphi(\lambda s, \lambda t) = \lambda \varphi(s, t)$ для любого $\lambda > 0$.

Пусть $\{X_0, X_1\}$ — пара функциональных банаховых пространств, т. е. каждое X_i состоит из измеримых функций, причем если $y \in X_i$ и $|x| \leq |y|$, то $x \in X_i$ и $\|x\|_{X_i} \leq \|y\|_{X_i}$ для $i = 0, 1$.

Для такой пары при помощи интерполяционной функции $\varphi(s, t)$ можно задать пространство

$$\varphi(X_0, X_1) = \{x \in X_0 + X_1 : |x| = \varphi(|x_0|, |x_1|)\},$$

где $x_0 \in X_0$ и $x_1 \in X_1$, норма на котором эквивалентна

$$\inf_{|x|=\varphi(|x_0|, |x_1|)} \varphi(\|x_0\|_{X_0}, \|x_1\|_{X_1}).$$

Указанная выше конструкция называется конструкцией Кальдерона–Лозановского. Если $X_0 = L_{p_0}$, а $X_1 = L_{p_1}$, то $\varphi(L_{p_0}, L_{p_1})$ совпадает с пространством Орлича L_N^* , где обратная функция $N^{-1}(t)$ есть $\varphi(t^{1/p_0}, t^{1/p_1})$.

Пусть даны две банаховы пары $\overline{X} = \{L_{p_0}(V_0), L_{p_1}(V_1)\}$ и $\overline{Y} = \{L_{q_0}(U_0), L_{q_1}(U_1)\}$. Обозначим через $L(\overline{X} \rightarrow \overline{Y})$ пространство линейных ограниченных операторов, действующих из пары $\overline{X}$ в пару $\overline{Y}$.

Как известно (см. [4]), для любой интерполяционной функции $\varphi(s, t)$ оператор $T \in L(\overline{X} \rightarrow \overline{Y})$ будет действовать из пространства $\varphi(L_{p_0}(V_0), L_{p_1}(V_1))$ в пространство $\varphi(L_{q_0}(U_0), L_{q_1}(U_1))$, причем справедлива оценка для нормы

$$\|T\|_{\varphi(L_{p_0}(V_0), L_{p_1}(V_1)) \rightarrow \varphi(L_{q_0}(U_0), L_{q_1}(U_1))} \leq 5\|T\|_{\overline{X} \rightarrow \overline{Y}}.$$

В частности, если $\varphi(s, t) = s^{1-\theta}t^\theta$, где $0 < \theta < 1$, то это утверждение сводится к знаменитой теореме Стейна–Вейса (правда, с худшей оценкой на норму оператора). В теореме Стейна–Вейса константа равна 1 в комплексном случае и $\sqrt{2}$ в вещественном. При весах $U_0 = U_1 = V_0 = V_1 = 1$ получается теорема Рисса–Торина. Дмитриев и Семенов в [3] заметили, что для пространств функций на отрезке теорема Рисса–Торина точна при $p_0 \geq q_0$ и $p_1 \geq q_1$, т.е. для любого $a \in L_q$, где $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$, существует линейный ограниченный оператор $T: \{L_{p_0}, L_{p_1}\} \rightarrow \{L_{q_0}, L_{q_1}\}$ и элемент $b \in L_p$, где $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, такие, что $a = Tb$.

Напомним, что K -функционал для банаховой пары $\{X_0, X_1\}$ определяется формулой

$$K(t, x, \{X_0, X_1\}) = \inf_{x=x_0+x_1} \|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1}$$

для любого $t > 0$ и $x \in X_0 + X_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что банахова пара $\{X_0, X_1\}$ является K_0 -полной (см. [1]), если для любой квазивогнутой функции $\rho(t)$, такой, что $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t)/t = 0$, существует такой элемент $x \in X_0 + X_1$, что

$$K(t, x, \{X_0, X_1\}) \asymp \rho(t)$$

для $t > 0$.

Напомним, что $f \asymp g$, если существуют такие константы $c, C > 0$, что $cf \leq g \leq Cf$ на области определения функций f и g .

В частности, любая пара $\{L_{p_0}, L_{p_1}\}$ пространств Лебега на полуоси или на $\mathbb{R}$ при $p_0 \neq p_1$ будет K_0 -полной.

3. Теорема о точности. Рассмотрим пространство всех линейных операторов, действующих из пары $\overline{X} = \{L_{p_0}(V_0), L_{p_1}(V_1)\}$ в пару $\overline{Y} = \{L_{q_0}(U_0), L_{q_1}(U_1)\}$.

ТЕОРЕМА. Пусть $1 \leq q_0 \leq p_0 \leq \infty$ и $1 \leq q_1 \leq p_1 \leq \infty$, и пусть φ — произвольная интерполяционная функция. Если пара $\{L_{p_0}(V_0), L_{p_1}(V_1)\}$ K_0 -полна, то для любого $a \in \varphi(L_{q_0}(U_0), L_{q_1}(U_1))$ найдется оператор $T \in L(\overline{X} \rightarrow \overline{Y})$ и элемент $b \in \varphi(L_{p_0}(V_0), L_{p_1}(V_1))$, такие, что $a = Tb$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности мы можем рассматривать здесь строго положительные на $\mathfrak{M}$ функции a . Поскольку $a \in \varphi(L_{q_0}(U_0), L_{q_1}(U_1))$, существуют такие $a_0 \in L_{q_0}(U_0)$ и $a_1 \in L_{q_1}(U_1)$, что $a = \varphi(a_0, a_1)$.

Рассмотрим подробнее случай $q_0 < p_0 < \infty$ и $q_1 < p_1 < \infty$. Оказывается, что

$$L_{p_0}(a_0^{-q_0/r_0} U_0^{q_0/p_0}) \subset L_{q_0}(U_0), \quad (1)$$

где $1/r_0 = 1/q_0 - 1/p_0$.

В самом деле, представим $a_0 \in L_{q_0}(U_0)$ в виде произведения $a'_0 a''_0$, где $a'_0 = a_0^{q_0/r_0} U_0^{q_0/r_0} \in L_{r_0}$ и $a''_0 = a_0^{q_0/p_0} U_0^{-q_0/r_0} \in L_{p_0}(U_0)$.

Если теперь $w \in L_{p_0}(a_0^{-q_0/r_0} U_0^{q_0/p_0}) = L_{p_0}(U_0/a'_0)$, то в силу неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathfrak{M}} (w U_0)^{q_0} d\mu \right)^{1/q_0} &= \left(\int_{\mathfrak{M}} \left(\frac{w U_0}{a'_0} \cdot a'_0 \right)^{q_0} d\mu \right)^{1/q_0} \\ &\leq \left(\int_{\mathfrak{M}} \left(\frac{w U_0}{a'_0} \right)^{p_0} d\mu \right)^{1/p_0} \left(\int_{\mathfrak{M}} (a'_0)^{r_0} d\mu \right)^{1/r_0} < \infty. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$L_{p_1}(a_1^{-q_1/r_1} U_1^{q_1/p_1}) \subset L_{q_1}(U_1), \quad (2)$$

где $1/r_1 = 1/q_1 - 1/p_1$.

Таким образом, мы получили оператор вложения I_a , который действует из пары $\{L_{p_0}(a_0^{-q_0/r_0} U_0^{q_0/p_0}), L_{p_1}(a_1^{-q_1/r_1} U_1^{q_1/p_1})\}$ в пару $\{L_{q_0}(U_0), L_{q_1}(U_1)\}$ и переводит элемент a в a .

Оказывается, что a_0 остается в $L_{p_0}(a_0^{-q_0/r_0} U_0^{q_0/p_0})$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{M}} (a_0 a_0^{-q_0/r_0} U_0^{q_0/p_0})^{p_0} d\mu &= \int_{\mathfrak{M}} (a_0^{q_0/p_0} U_0^{q_0/p_0})^{p_0} d\mu \\ &= \int_{\mathfrak{M}} (a_0 U_0)^{q_0} d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Аналогично, $a_1 \in L_{p_1}(a_1^{-q_1/r_1} U_1^{q_1/p_1})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} a &\in \varphi(L_{p_0}(a_0^{-q_0/r_0} U_0^{q_0/p_0}), L_{p_1}(a_1^{-q_1/r_1} U_1^{q_1/p_1})) \\ &\subset L_{p_0}(a_0^{-q_0/r_0} U_0^{q_0/p_0}) + L_{p_1}(a_1^{-q_1/r_1} U_1^{q_1/p_1}). \end{aligned}$$

Таким образом, в принципе цель достигнута: произвольный элемент $a \in \varphi(L_{q_0}(U_0), L_{q_1}(U_1))$ оказался образом элемента $a \in \varphi(L_{p_0}(a_0^{-q_0/r_0} U_0^{q_0/p_0}), L_{p_1}(a_1^{-q_1/r_1} U_1^{q_1/p_1}))$. Осталось превратить вспомогательную пару

$$\tilde{X}_a = \{L_{p_0}(a_0^{-q_0/r_0} U_0^{q_0/p_0}), L_{p_1}(a_1^{-q_1/r_1} U_1^{q_1/p_1})\}$$

в пару $\{L_{p_0}(V_0), L_{p_1}(V_1)\}$, а элемент $a \in \varphi(L_{p_0}(a_0^{-q_0/r_0} U_0^{q_0/p_0}), L_{p_1}(a_1^{-q_1/r_1} U_1^{q_1/p_1}))$ в соответствующий элемент $b \in \varphi(L_{p_0}(V_0), L_{p_1}(V_1))$.

Для этого воспользуемся следующим результатом, вытекающим из теоремы Спарра (см. [2]).

Пусть даны две банаховы пары $\overline{X} = \{L_{p_0}(V_0), L_{p_1}(V_1)\}$ и $\tilde{X} = \{L_{p_0}(\tilde{V}_0), L_{p_1}(\tilde{V}_1)\}$. Пусть $\tilde{a} \in L_{p_0}(\tilde{V}_0) + L_{p_1}(\tilde{V}_1)$ и $\bar{a} \in L_{p_0}(V_0) + L_{p_1}(V_1)$ — такие элементы, что

$$K(t, \bar{a}, \{L_{p_0}(V_0), L_{p_1}(V_1)\}) \asymp K(t, \tilde{a}, \{L_{p_0}(\tilde{V}_0), L_{p_1}(\tilde{V}_1)\}).$$

Тогда существуют операторы $T \in L(\overline{X} \rightarrow \tilde{X})$ и $S \in L(\tilde{X} \rightarrow \overline{X})$, такие, что $T\bar{a} = \tilde{a}$ и $S\tilde{a} = \bar{a}$.

Так как по предположению банахова пара $\{L_{p_0}(V_0), L_{p_1}(V_1)\}$ K_0 -полна, то для элемента $a \in L_{p_0}(a_0^{-q_0/r_0} U_0^{q_0/p_0}) + L_{p_1}(a_1^{-q_1/r_1} U_1^{q_1/p_1})$ найдется элемент $b \in L_{p_0}(V_0) + L_{p_1}(V_1)$, такой, что

$$K(t, b, \{L_{p_0}(V_0), L_{p_1}(V_1)\}) \asymp K(t, a, \{L_{p_0}(a_0^{-q_0/r_0} U_0^{q_0/p_0}), L_{p_1}(a_1^{-q_1/r_1} U_1^{q_1/p_1})\}),$$

а по теореме Спарра найдутся операторы $\tilde{T} \in L(\overline{X} \rightarrow \tilde{X}_a)$ и $\tilde{S} \in L(\tilde{X}_a \rightarrow \overline{X})$, такие, что $\tilde{T}b = a$ и $\tilde{S}a = b$.

Так как $a \in \varphi(L_{p_0}(a_0^{-q_0/r_0} U_0^{q_0/p_0}), L_{p_1}(a_1^{-q_1/r_1} U_1^{q_1/p_1}))$, то в силу интерполяционности конструкции пространства $\varphi(X_0, X_1)$, доказанной в [4],

$$b = \tilde{S}a \in \varphi(L_{p_0}(V_0), L_{p_1}(V_1)).$$

Используя суперпозицию оператора $\tilde{T}$ и оператора вложения $I_a: \tilde{X}_a \rightarrow \overline{Y}$, получаем искомый оператор $T: \{L_{p_0}(V_0), L_{p_1}(V_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(U_0), L_{q_1}(U_1)\}$, такой, что

$$Tb = I_a \tilde{T}b = a.$$

Перечислим для полноты крайние случаи, которые прямо не укладываются в предыдущее рассмотрение, т.е. случаи $q_0 = p_0 \leq \infty$, $q_0 < p_0 = \infty$ и/или $q_1 = p_1 \leq \infty$, $q_1 < p_1 = \infty$.

Если $q_0 = p_0 \leq \infty$, то

1) при $q_1 < p_1 < \infty$ пара $\tilde{X}_a$ имеет вид $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(a_1^{-q_1/r_1} U_1^{q_1/p_1})\}$ и $a \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(a_1^{-q_1/r_1} U_1^{q_1/p_1}))$;

2) при $q_1 = p_1 \leq \infty$ пара $\tilde{X}_a$ имеет вид $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ и $a \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))$;

3) при $q_1 < p_1 = \infty$ вложение (2) превращается во вложение $L_\infty(a_1^{-1}) \subset L_{q_1}(U_1)$, пара $\tilde{X}_a$ имеет вид $\{L_{p_0}(U_0), L_\infty(a_1^{-1})\}$ и $a \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_\infty(a_1^{-1}))$.

В случае же, если $q_0 < p_0 = \infty$, вложение (1) превращается во вложение $L_\infty(a_0^{-1}) \subset L_{q_0}(U_0)$. Таким образом,

1) при $q_1 < p_1 < \infty$ пара $\tilde{X}_a$ имеет вид $\{L_\infty(a_0^{-1}), L_{p_1}(a_1^{-q_1/r_1} U_1^{q_1/p_1})\}$ и $a \in \varphi(L_\infty(a_0^{-1}), L_{p_1}(a_1^{-q_1/r_1} U_1^{q_1/p_1}))$;

2) при $q_1 = p_1 \leq \infty$ пара $\tilde{X}_a$ имеет вид $\{L_\infty(a_0^{-1}), L_{p_1}(U_1)\}$ и $a \in \varphi(L_\infty(a_0^{-1}), L_{p_1}(U_1))$;

3) при $q_1 < p_1 = \infty$ пара $\tilde{X}_a$ имеет вид $\{L_\infty(a_0^{-1}), L_\infty(a_1^{-1})\}$ и $a \in \varphi(L_\infty(a_0^{-1}), L_\infty(a_1^{-1}))$.

Поэтому вновь с помощью теоремы Спарра получаем утверждение нашей теоремы.

Теорема доказана.

Заметим в заключение, что если хотя бы одно из условий $q_0 \leq p_0$ или $q_1 \leq p_1$ либо условие K_0 -полноты не выполняется, то можно построить интерполяционную функцию φ , для которой утверждение теоремы не выполняется для некоторой пары $\{L_{q_0}(U_0), L_{q_1}(U_1)\}$, т.е. точность отсутствует.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brudnyi Ju. A., Krugliak N. Ya.* Interpolation Functors and Interpolation Spaces I. North Holland, Amsterdam, 1991.
2. *Sparr G.* Studia Math., **62**, 229–271 (1978).
3. *Дмит-*

риев А. А., Семенов Е. М. Докл. АН СССР, **258**, №6, 1298–1300 (1981). **4.** *Овчинников В. И.* Функц. анализ и его прил., **10**, вып. 4, 45–54 (1976).

Воронежский госуниверситет, математический факультет
e-mail: vio@func.vsu.ru, vio@comch.ru

Поступило в редакцию
22 июля 2004 г.

Воронежский госуниверситет, математический факультет
e-mail: the_yaroslav@rambler.ru