Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, Следы Диксмье и унитарные представления, *Функц. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 1, 40–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa230>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 16:16:51

УДК 517.98

Следы Диксмье и унитарные представления*

© 2001. Р. С. Исмагилов

§1. Введение

Пусть H_1, H_2 — комплексные гильбертовы пространства счетной размерности и $L(H_1, H_2)$ — пространство всех ограниченных линейных отображений $A: H_1 \rightarrow H_2$. Пусть G — топологическая группа и $g \mapsto T_k(g)$, $g \in G$, — ее унитарное представление в H_k , $k = 1, 2$. Тогда соответствие

$$A \mapsto T_2(g)AT_1(g^{-1}), \quad (1)$$

$A \in L(H_1, H_2)$, $g \in G$, задает представление группы G . Хотелось бы выделить из $L(H_1, H_2)$ линейное подпространство, инвариантное относительно этого представления, и задать в нем инвариантное скалярное произведение. Один из вариантов решения этой задачи общеизвестен: достаточно взять подпространство $J_2(H_1, H_2)$, состоящее из отображений Гильберта–Шмидта (они выделяются условием $\text{Tr}(A^*A) < \infty$) и задать в нем скалярное произведение $(A, B) = \text{Tr}(B^*A)$. В настоящей работе предлагается еще один вариант; он имеет формальное сходство с только что описанным, но вместо обычного следа Tr использует след Диксмье Tr_ω (см. [1]; ниже мы изложим необходимые сведения об этом следе). В результате возникает новое представление группы G ; мы обозначаем его через $(T_1, T_2)_\omega$.

Мы рассмотрим это представление для следующего случая: G — это группа $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm 1\}$, а T_1, T_2 — ее представления основной серии, реализованные в $L_2(\mathbb{T}^1)$, где $\mathbb{T}^1$ — окружность с мерой Лебега. Однако прояснить до конца строение представления $(T_1, T_2)_\omega$ не удастся. Поэтому мы ограничимся его подпредставлением T_ω , которое действует в подпространстве H_ω , полученном как замыкание множества псевдодифференциальных операторов (в дальнейшем пишем для краткости ПДО) с символами из класса $S^{-1/2}(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ (здесь использовано обозначение из книги М. А. Шубина [2, с. 11]). Наш основной результат можно кратко описать так: 1) для любой непрерывной борелевской меры, заданной на пространстве представлений основной серии, T_ω содержит подпредставление, которое разлагается в прямой интеграл представлений основной серии (со счетной кратностью) по указанной мере; 2) каждое представление основной серии входит в T_ω (как дискретное слагаемое) с кратностью, не меньшей двух. Добавим, что пространство H_ω несепарабельно (точнее, обладает континуальным ортонормированным базисом).

§2. След Диксмье и связанные с ним унитарные представления

2.1. След Диксмье. Обозначения $H_1, H_2, L(H_1, H_2)$ были введены выше. Для любого компактного отображения $A \in L(H_1, H_2)$ введем, как обычно, его

*Работа поддержана РФФИ, грант 96-15-96249.

сингулярные числа $s_1(A) \geq s_2(A) \geq \dots$ (это собственные значения оператора $\sqrt{A^*A}$). Все необходимые сведения об этих числах содержатся в книге [3, гл. 1]. Взяв число $p \geq 1$, обозначим через $D_p(H_1, H_2)$ множество всех компактных отображений $A \in L(H_1, H_2)$, для которых конечна величина (норма)

$$\|A\|_p = \sup_{n \geq 1} \left\{ \left(\frac{s_1^p(A) + \dots + s_n^p(A)}{1 + \ln n} \right)^{1/p} \right\}.$$

Эта норма превращает $D_p(H_1, H_2)$ в банахово пространство. Если H_1, H_2 совпадают с фиксированным гильбертовым пространством H , то мы используем сокращенные обозначения $L(H)$, $D_p(H)$. Заметим, что $D_p(H)$ есть симметрично-нормированный идеал алгебры $L(H)$, порожденный симметрично-нормирующей функцией

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots) = \sup_n \left(\frac{|\xi_1|^p + \dots + |\xi_n|^p}{1 + \ln n} \right)^{1/p},$$

которая определена на множестве последовательностей $(\xi_1, \xi_2, \dots)$ с конечным числом ненулевых членов (здесь и далее мы пользуемся терминологией упомянутой книги [3, с. 96]). В дальнейшем понадобятся лишь случаи $p = 1$, $p = 2$. В частности, при $p = 1$ получается идеал В. И. Мацаева, имеющей важные приложения в теории вольтерровых операторов [3, гл. 1].

В работе [1] Ж. Диксмье построил след на идеале $D_1(H)$ (точнее, на некотором семействе идеалов, содержащем в себе $D_1(H)$). Воспроизведем эту конструкцию. С этой целью рассмотрим банахову алгебру l_∞ , состоящую из ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ (с нормой $\|x\| = \sup_k |x_k|$), и ее идеал l_∞^0 , состоящий из последовательностей, стремящихся к нулю. Зафиксируем линейный функционал ω на l_∞ , удовлетворяющий следующим условиям: 1) $\omega(x) \geq 0$, если $x_k \geq 0$ для всех k ; 2) ω обращается в нуль на идеале l_∞^0 ; 3) $\omega(x_1, x_2, \dots) = \omega(x_1, x_1, x_2, x_2, \dots)$ для всех $x = (x_1, x_2, \dots)$; 4) $\omega(1, 1, \dots) = 1$.

(Покажем, как построить такой функционал. Для этого возьмем неотрицательный линейный функционал ϕ на банаховой алгебре l_∞/l_∞^0 , принимающий значение 1 на единичном элементе. Пусть $q: l_\infty \rightarrow l_\infty/l_\infty^0$ — канонический гомоморфизм. Тогда функционал

$$x \rightarrow \phi \circ q \left(\left\{ \frac{x_1/1 + \dots + x_n/n}{1 + \ln n} \right\} \right)$$

обладает перечисленными свойствами; доказательство этого утверждения — содержательное, хотя и несложное упражнение.)

Ж. Диксмье доказывает, что на идеале $D_1(H)$ существует единственный линейный функционал Tr_ω , такой, что для любого неотрицательного оператора $A \in D_1(H)$ выполняется равенство

$$\text{Tr}_\omega(A) = \omega \left(\left\{ \frac{s_1(A) + \dots + s_n(A)}{1 + \ln n} \right\} \right). \quad (2)$$

Этот функционал является следом, т. е. $\text{Tr}_\omega(AB) = \text{Tr}_\omega(BA)$ для любых $A \in D_1(H)$, $B \in L(H)$.

Впоследствии след Диксмье был применен в исследованиях А. Конна по «некоммутативной геометрии» ([5, pp. 299–308]).

Вернемся к паре пространств H_1, H_2 и рассмотрим пространство $D_2(H_1, H_2)$. Если $A, B \in D_2(H_1, H_2)$, то $B^*A \in D_1(H_1, H_1)$; это следует из известных неравенств для сингулярных чисел (см. [3, с. 68]). Это позволяет ввести на $D_2(H_1, H_2)$ полуторалинейную неотрицательно определенную форму

$$(A, B)_\omega = \text{Tr}_\omega(B^*A). \quad (3)$$

Профакторизовав пространство $D_2(H_1, H_2)$ по ядру этой формы (ядро задается условием $(A, A)_\omega = 0$) и пополнив по соответствующей норме, получаем гильбертово пространство; обозначим его через $\overline{D_2(H_1, H_2)}$.

В дальнейшем, имея линейное пространство с неотрицательно определенной полуторалинейной формой (и, таким образом, естественное гильбертово пространство), мы будем, допуская некоторую нестрогость, отождествлять элемент линейного пространства с соответствующим ему элементом гильбертова пространства. Кроме того, мы будем (ради краткости) называть указанную форму скалярным произведением (если даже эта форма обладает ненулевым ядром).

Закончим этот раздел важным для дальнейшего замечанием. Обозначим через $J_p(H_1, H_2)$ подпространство в $L(H_1, H_2)$, задаваемое, как обычно, условием $\sum_{k=1}^\infty s_k^p(A) < \infty$. В частности, $J_1(H_1, H_2), J_2(H_1, H_2)$ — это подпространства ядерных операторов и операторов Гильберта–Шмидта (соответственно). Тогда $J_p(H_1, H_2) \subset D_p(H_1, H_2)$. Из определений (2), (3) видно, что $\text{Tr}_\omega(A) = 0$, $A \in J_1(H)$, $(A, A)_\omega = 0$, $A \in J_2(H_1, H_2)$. Таким образом, след Диксмье определен по существу на факторпространстве $D_1(H)/J_1(H)$, а скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_\omega$ определено фактически на $D_2(H_1, H_2)/J_2(H_1, H_2)$. (Другими словами, операторы Гильберта–Шмидта представляют собой нулевой элемент гильбертова пространства $\overline{D_2(H_1, H_2)}$.)

2.2. Унитарные представления, связанные со следом Диксмье. Пусть в пространствах H_1, H_2 действуют унитарные представления T_1, T_2 топологической группы G . Тогда в пространстве $D_2(H_1, H_2)$ возникают операторы (1). Ясно, что они сохраняют скалярное произведение (3). Обозначим через $D_2^\circ(H_1, H_2)$ совокупность тех элементов A пространства $D_2(H_1, H_2)$, для которых функция $g \mapsto (T_2(g)AT_1(g^{-1}), A)_\omega$, $g \in G$, непрерывна. (Подчеркнем, что $D_2^\circ(H_1, H_2)$ отнюдь не всегда совпадает с $D_2(H_1, H_2)$.) Пополнение линейного пространства $D_2^\circ(H_1, H_2)$ по норме, задаваемой скалярным произведением (3), обозначим через $(H_1, H_2)_\omega$. (Заметим, что это пространство зависит от представлений T_1, T_2 .) Операторы, действующие в $D_2^\circ(H_1, H_2)$ по формуле (1), продолжаются до унитарного представления $(T_1, T_2)_\omega$ группы G в $(H_1, H_2)_\omega$; оно и будет предметом нашего исследования.

(Возможен другой путь: сначала пополнить $D_2(H_1, H_2)$ по указанной норме и затем выделить из него подпространство векторов, на которых действие группы G непрерывно; мы оставим в стороне эту возможность.)

В дальнейшем (в §§4, 5) мы рассмотрим подробнее группу $G = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm 1\}$; ближайший §3 содержит необходимую подготовку.

§3. След Диксмье на операторах, заданных матрицами, и на ПДО

3.1. Операторы, заданные матрицами. Пусть в гильбертовом пространстве H дан ортонормированный базис $\{e_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Каждому линейному отображению $A: H \rightarrow H$ поставим в соответствие матрицу (a_{ik}) , $a_{ik} = (Ae_k, e_i)$. Взяв число

$\alpha > 0$, обозначим через $K_\alpha(H)$ множество отображений $A: H \rightarrow H$, таких, что для любых $r > 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$ выполняются условия

$$|a_{mn} - a_{m+1, n+1}| \leq M_r(1 + |n|)^{-1-\alpha}(1 + |m - n|)^{-r}, \quad (4)$$

$$a_{n+k, n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

(Здесь число M_r зависит от r .)

Из (4), (5) вытекает неравенство

$$|a_{mn}| \leq M_r^\circ(1 + |n|)^{-\alpha}(1 + |m - n|)^{-r} \quad (6)$$

для любых $m, n \in \mathbb{Z}$.

Для любого отображения $A \in K_\alpha(H)$ введем линейные отображения A_k , задаваемые равенствами $A_k e_n = a_{n+k, n} e_{n+k}$, $n, k \in \mathbb{Z}$. Ясно, что

$$A = \sum_k A_k \quad (7)$$

(сходимость по норме).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) Если $A \in K_\alpha(H)$, а $B \in K_\beta(H)$, то $AB \in K_{\alpha+\beta}(H)$;

2) Если $p \geq 1$, $A \in K_{1/p}(H)$, то $A \in D_p(H)$, $\|A\|_p \leq M'$, где число M' зависит только от чисел M_r , входящих в неравенства (4).

3) Если $A \in K_1(H)$, то

$$\text{Tr}_\omega(A) = \omega\left(\left\{\frac{\sum_{k=-n}^n a_{kk}}{1 + \ln n}\right\}\right). \quad (8)$$

4) Если $A, B \in K_{1/2}(H)$, то

$$(A, B)_\omega = \omega\left(\left\{\frac{\sum_{k=-n}^n (Ae_k, Be_k)}{1 + \ln n}\right\}\right). \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы опустим доказательство утверждения 1), ибо оно сводится к рутинным оценкам сумм. Чтобы доказать остальное, рассмотрим сначала случай диагональной матрицы (a_{ik}) ; положим $a_k = a_{kk}$. Пусть сначала $a_k = 0$, $k < 0$. Согласно условиям предложения,

$$|a_n - a_{n+1}| \leq M(1 + |n|)^{-1-1/p}, \quad a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Положим $b_n = \sum_{k=n}^\infty (a_k - a_{k+1})_+$, $c_n = \sum_{k=n}^\infty (a_{k+1} - a_k)_+$, где $a_+ = \max\{a, 0\}$. Введем операторы B , C , полагая $Be_k = b_k e_k$, $Ce_k = c_k e_k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $A = B - C$. Далее, $\{b_k\}$, $\{c_k\}$, $k \geq 0$, — невозрастающие последовательности и, следовательно, являются последовательными сингулярными числами операторов B , C . Ясно, что $0 \leq b_k \leq M'(1 + |k|)^{-1/p}$, $0 \leq c_k \leq M'(1 + |k|)^{-1/p}$. Отсюда следует, что $\|B\|_p \leq M'$, $\|C\|_p \leq M'$; поэтому $A \in D_p(H)$. Из сказанного вытекает также равенство (8) при $p = 1$. Легко видеть, что это верно и без ограничения $a_k = 0$, $k < 0$. Этим предложение доказано для диагональных матриц.

Пусть теперь матрица (a_{ik}) не предполагается диагональной. Введенный выше оператор A_k — это композиция диагонального оператора из класса $D_p(H)$ (это следует из (6)) и унитарного оператора, переводящего каждый e_n в e_{n+k} . Таким образом, $A_k \in D_p(H)$; из (6) вытекает неравенство $\|A_k\|_p \leq M_r^\circ(1 + |k|)^{-r}$ для любых k , r . Поэтому ряд (7) сходится по операторной норме, и его частные

суммы ограничены по норме $\|\cdot\|_p$. Следовательно (см. [3, с. 113]), его сумма принадлежит идеалу $D_p(H)$.

Осталось найти $\text{Tr}_\omega(A)$ для оператора $A \in D_1(H)$. Из определения следа Диксмье легко выводится неравенство $|\text{Tr}_\omega A| \leq 2\|A\|_1$. (Действительно, если $A = A^*$, то $|\text{Tr}_\omega(A)| \leq \text{Tr}_\omega(|A|) \leq \|A\|_1$, откуда следует требуемое неравенство для любого $A \in D_1(H)$). Отсюда вытекает, что $\text{Tr}_\omega(A) = \sum_k \text{Tr}_\omega(A_k)$. Величина $\text{Tr}_\omega(A_0)$ уже найдена. Докажем, что $\text{Tr}_\omega(A_k) = 0$ при $k \neq 0$. Для этого возьмем число $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$, $\zeta^k \neq 1$, и введем унитарный оператор U , такой, что $Ue_n = \zeta^n e_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\text{Tr}_\omega(A_k) = \text{Tr}_\omega(UA_kU^{-1}) = \zeta^k \text{Tr}_\omega(A_k)$, откуда $\text{Tr}_\omega(A_k) = 0$. Мы доказали первые три утверждения предложения. Применяя доказанное к оператору B^*A , получаем четвертое утверждение.

3.2. След Диксмье на ПДО. Возьмем окружность $\mathbb{T}^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, зафиксируем число $h > 0$ и обозначим через $S^{-h}(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ пространство функций (называемых также символами), таких, что $|D_z^\alpha D_t^\beta f(z, t)| \leq M_{\alpha\beta}(1 + |t|)^{-h-\beta}$ для всех целых неотрицательных α, β ; здесь через D_z, D_t обозначены операции дифференцирования функции $f(z, t) = f(e^{is}, t)$ по переменным s, t . Подпространство функций из $S^{-h}(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$, не зависящих от переменной z , обозначим через $S^{-h}(\mathbb{R})$.

Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(\mathbb{T}^1)$ с ортонормированным базисом $\{z^n, n \in \mathbb{Z}\}$. Для каждой функции $f \in S^{-h}(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ однозначно определен линейный ограниченный оператор $\Phi(f)$ в пространстве $L_2(\mathbb{T}^1)$, такой, что $\Phi(f)z^n = f(z, n)z^n$. Легко доказывается, что $\Phi(f)$ — это ПДО с символом $f(z, t)$ (с точностью до бесконечно сглаживающего оператора).

В дальнейшем при интегрировании по $\mathbb{T}^1$ мы записываем элемент инвариантной меры в виде $dz/(iz)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. 1) Если $f \in S^{-h}(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$, то $\Phi(f) \in D_{1/h}(L_2(\mathbb{T}^1))$.

2) Если $f \in S^{-1}(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ (и, следовательно, $\Phi(f) \in D_1(L_2(\mathbb{T}^1))$), то

$$\text{Tr}_\omega(\Phi(f)) = \omega\left(\left\{\frac{\int_{\mathbb{T}^1} \int_{-\infty}^{\infty} f(z, t) \frac{dz}{iz} dt}{1 + \ln n}\right\}\right) = \int_{\mathbb{T}^1} \omega\left(\left\{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(z, t) dt}{1 + \ln n}\right\}\right) \frac{dz}{iz}. \quad (10)$$

(Последний интеграл — это интеграл Римана.)

3) Если $f_i \in S^{-1/2}(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$, $i = 1, 2$ (и, следовательно, $\Phi(f_i) \in D_2(L_2(\mathbb{T}^1))$), то

$$(\Phi(f_1), \Phi(f_2))_\omega = \int_{\mathbb{T}^1} \omega\left(\left\{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(z, t) \overline{f_2(z, t)} dt}{1 + \ln n}\right\}\right) \frac{dz}{iz}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложив функцию $f \in S^{-h}(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ в ряд Фурье по $\{z^n, n \in \mathbb{Z}\}$, видим, что матрица оператора $\Phi(f)$ в базисе $\{z^n\}$ удовлетворяет условиям (4), (5) при $\alpha = h$; таким образом, $\Phi(f) \in D_{1/h}(L_2(\mathbb{T}^1))$. Отсюда, применяя предложение 1, получаем первое утверждение.

Пусть теперь $f \in S^{-1}(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$. Чтобы найти $\text{Tr}_\omega \Phi(f)$, используем равенство (8) и затем преобразуем полученную формулу, применяя следующий простой факт: если $f \in S^{-1}(\mathbb{R})$, то $\sum_{k=-n}^n f(k) = \int_{-n}^n f(x) dx + r_n$, где $\{r_n\}$ — ограниченная последовательность. Это приводит к левому равенству в формуле (10). Для

получения правого равенства в (10) достаточно заметить, что вектор-функция

$$z \mapsto \left\{ \frac{\int_{-n}^n f(z, t) dt}{1 + \ln n} \right\},$$

действующая из $\mathbb{T}^1$ в l_∞ , непрерывна (относительно нормы в l_∞), что позволяет интегрировать ее под знаком функционала ω . Этим доказано второе утверждение предложения.

Третье утверждение выводится из равенства (9) аналогичными рассуждениями. Предложение доказано.

Можно чуть упростить формулы (10), (11), используя линейный функционал на $S^{-1}(\mathbb{R})$, заданный формулой

$$\tilde{\omega}(f) = \omega\left(\left\{ \frac{\int_{-n}^n f(t) dt}{1 + \ln n} \right\}\right). \quad (12)$$

Тогда

$$\mathrm{Tr}_\omega(\Phi(f)) = \int_{\mathbb{T}^1} \tilde{\omega}(f(z, \cdot)) \frac{dz}{iz},$$

и аналогичным образом упрощается формула (11).

Отметим важное свойство функционала $\tilde{\omega}$. С этой целью введем в $S^{-1}(\mathbb{R})$ операторы $(V(\lambda)f)(t) = f(\lambda t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Тогда

$$\tilde{\omega}(V(\lambda)(f)) = \lambda^{-1} \tilde{\omega}(f), \quad f \in S^{-1}(\mathbb{R}). \quad (13)$$

Это вытекает из того, что величины $\lambda^{-1} \int_{-n}^n f(t) dt$, $\int_{-n}^n f(\lambda t) dt$, $n = 1, 2, \dots$, отличаются на ограниченное слагаемое.

3.3. Гильбертово пространство S_ω . Введем в пространстве $S^{-1/2}(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ неотрицательную полуторалинейную форму (выше мы условились называть ее скалярным произведением) по формуле $(f_1, f_2)_\omega = (\Phi(f_1), \Phi(f_2))_\omega$. Как обычно, в результате получаем гильбертово пространство S_ω . Через S_ω^0 обозначим подпространство, полученное как замыкание подпространства $S^{-1/2}(\mathbb{R}) \subset S^{-1/2}(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$. Из равенства (11) видно, что S_ω можно отождествить с пространством S_ω^0 -значных вектор-функций на окружности $\mathbb{T}^1$; таким образом, $S_\omega = L_2(\mathbb{T}^1, S_\omega^0)$.

Вернемся к замечанию, сделанному в конце разд. 2.1. Применяя его к операторам $\Phi(f)$, $f \in S^{-1/2}(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$, приходим к следующему выводу: величина $(f_1, f_2)_\omega$ не меняется при произвольном изменении функций f_1, f_2 на любом множестве вида $\{(z, t) : z \in \mathbb{T}^1, |t| < h\}$; другими словами, эта величина зависит только от ростков этих функций в окрестности множеств $\mathbb{T}^1 \times \{+\infty\}$, $\mathbb{T}^1 \times \{-\infty\}$.

3.4. Гильбертово пространство H_ω ; изоморфизм $\bar{\Phi}: S_\omega \rightarrow H_\omega$. Определим теперь гильбертово пространство H_ω (о нем говорилось во введении). Для этого обозначим через $O^{-1/2}(L_2(\mathbb{T}^1))$ множество всех операторов вида $\Phi(f)$, $f \in S^{-1/2}(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$. Обозначим через H_ω гильбертово пространство, полученное (обычным образом) из линейного пространства $O^{-1/2}(L_2(\mathbb{T}^1))$, наделенного формой $(\cdot, \cdot)_\omega$. Отображение $f \mapsto \Phi(f)$ продолжается до унитарного изоморфизма гильбертовых пространств; будем записывать его в виде $\bar{\Phi}: S_\omega \rightarrow H_\omega$.

3.5. Замечание о подпространствах единственности. Назовем линейное подпространство $L \subset S^{-1/2}(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ *подпространством единственности*, если величина $(u, v)_\omega$, $u, v \in L$, не зависит от выбора функционала ω (указанного

в разд. 2.1). Этот же термин будем применять также к замыканию подпространства L в каждом из гильбертовых пространств S_ω . Точно так же определим подпространства единственности для H_ω и т. д. Вот простой пример. Пусть L — линейное подпространство в $S^{-1/2}(\mathbb{R})$, такое, что для любых $u, v \in L$ существует конечный предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T u(s) \overline{v(s)} ds.$$

Тогда из (11) вытекает, что величина $(u, v)_\omega$ совпадает с этим пределом для любого ω ; таким образом, подпространство L (а также его замыкание в каждом S_ω^0) есть подпространство единственности.

3.6. Некоторые свойства функций из пространства $S^{-1/2}(\mathbb{R})$. Взяв функцию $f \in S^{-1/2}(\mathbb{R})$, определим ее преобразование Фурье $\hat{f}(s)$, $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$, равенством

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{its} dt$$

(интеграл сходится при $s \neq 0$). В дальнейшем нам понадобятся свойства этой функции, собранные в следующей лемме; напомним, что

$$|f^{(k)}(t)| \leq M_k (1 + |t|)^{-1/2-k}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (14)$$

ЛЕММА 1. Функция $\hat{f}$ бесконечно дифференцируема при $s \neq 0$. Справедливы неравенства

- 1) $|\hat{f}(s)| \leq M|s|^{-1/2}$, $0 < |s| \leq 1$;
- 2) $|\hat{f}(s_1) - \hat{f}(s_2)| \leq M|s_1 - s_2|^{1/4}(|s_1|^{-1} + |s_2|^{-1})^{3/4}$, $0 < |s_1| \leq 1$, $0 < |s_2| \leq 1$;
- 3) $\hat{f}(s) = \sum_k f(k) e^{iks} + r(s)$, $0 < |s| \leq 1$, где $r(s)$, $0 < |s| \leq 1$, — ограниченная функция.

Число M зависит только от величин M_0 , M_1 , входящих в неравенство (14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оно требует лишь рутинных выкладок; поэтому ограничимся выводом неравенства 2).

Для любых s_1, s_2 , указанных в лемме, и любого $A > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |\hat{f}(s_1) - \hat{f}(s_2)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{is_1 t} - e^{is_2 t}) f(t) dt \right| \\ &\leq \int_{|t| \leq A} |s_1 - s_2| |t f(t)| dt + \left| \int_{|t| \geq A} e^{is_1 t} f(t) dt \right| + \left| \int_{|t| \geq A} e^{is_2 t} f(t) dt \right| \\ &\leq |s_1 - s_2| A^{3/2} + (|s_1|^{-1} + |s_2|^{-1}) A^{-1/2}. \end{aligned}$$

Минимизируя правую часть по переменной A , приходим к неравенству 2).

§ 4. Представления T_ω , $\mathcal{T}_\omega$ группы $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm 1\}$

В этом параграфе мы построим представление T_ω группы $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm 1\}$ (о нем говорилось во введении), а также эквивалентное ему (и более удобное) представление $\mathcal{T}_\omega$.

4.1. Представление T_ω . Указанную группу удобнее заменить изоморфной ей группой $G = SU(1, 1)/\{\pm 1\}$. Она действует на окружности по формуле

$$zg = \frac{az + \bar{b}}{bz + \bar{a}}, \quad z \in \mathbb{T}^1, \quad g = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad g \in G. \quad (15)$$

Возьмем вещественные числа ρ_k , $k = 1, 2$, и рассмотрим два представления группы G в пространстве $L_2(\mathbb{T}^1)$:

$$(T_k(g)f)(z) = |bz + \bar{a}|^{i\rho_k - 1} f(zg), \quad g \in G, f \in L_2(\mathbb{T}^1).$$

Ясно, что преобразования (1) оставляют инвариантным указанное в разд. 3.4 пространство $O^{-1/2}(L_2(\mathbb{T}^1))$ и сохраняют скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_\omega$. Таким образом, возникает унитарное представление $g \mapsto T_\omega(g)$, $g \in G$, в гильбертовом пространстве H_ω ; разумеется, оно зависит от ρ_1, ρ_2 .

4.2. Представление $\mathcal{T}_\omega$. Возьмем вещественное число ρ и зададим представление $\mathcal{T}$ в пространстве $S^{-1/2}(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ по формуле

$$(\mathcal{T}(g)f)(z, t) = |bz + \bar{a}|^{i\rho} f(zg, |bz + \bar{a}|^2 t), \quad g \in G.$$

Из формулы (13) легко выводится, что оно сохраняет скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_\omega$, введенное в §3, и, следовательно, продолжается до унитарного представления в гильбертовом пространстве S_ω ; это продолжение обозначим через $\mathcal{T}_\omega$; оно зависит от ρ .

4.3. Эквивалентность представлений T_ω и $\mathcal{T}_\omega$ при $\rho_2 - \rho_1 = \rho$.

ЛЕММА 2. Пусть $\rho_2 - \rho_1 = \rho$. Тогда для любой функции $f \in S^{-1/2}(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R})$ и элемента $g \in G$ оператор $K(f, g) = T_2(g)\Phi(f)T_1(g^{-1}) - \Phi(\mathcal{T}(g)f)$ (действующий в $C^\infty(\mathbb{T}^1)$) продолжается до оператора Гильберта–Шмидта, действующего в $L_2(\mathbb{T}^1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения оператора $\Phi(f)$ видно, что

$$(\Phi(f)u)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^1} r_f(z, \zeta) u(\zeta) \frac{d\zeta}{i\zeta}, \quad r_f(z, \zeta) = \sum_k f(z, k) \left(\frac{z}{\zeta} \right)^k$$

(интегральный оператор с ядром $r_f(z, \zeta)$). Из леммы 1 следует, что это ядро гладко при $z \neq \zeta$, а в окрестности диагонали $z = \zeta$ отличается от функции $\hat{f}(z, -i \ln(z/\zeta))$ (здесь $\hat{f}$ — преобразование Фурье функции $f(z, t)$ по переменной t) ограниченным слагаемым и удовлетворяет неравенству $|r_f(z, \zeta)| \leq M|z - \zeta|^{-1/2}$. Отсюда получаем (еще раз применяя лемму 1), что оператор $K(f, g)$, указанный в лемме, имеет ядро, отличающееся (в окрестности диагонали $z = \zeta$) лишь ограниченным слагаемым от функции $|bz + \bar{a}|^{i(\rho_2 - \rho_1) - 2} L_g(z, \zeta)$, где

$$L_g(z, \zeta) = \hat{f}\left(zg, -i \ln \frac{zg}{\zeta g}\right) - \hat{f}\left(zg, -i \frac{1}{|bz + \bar{a}|^2} \ln \frac{z}{\zeta}\right).$$

Используя неравенство 3) из леммы 1, легко получить оценку $|L_g(z, \zeta)| \leq M|z - \zeta|^{-1/4}$ в окрестности диагонали. Отсюда следует, что интегральный оператор с ядром $r_f(z, \zeta)$ принадлежит классу Гильберта–Шмидта. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\rho_2 - \rho_1 = \rho$, то представления T_ω и $\mathcal{T}_\omega$ эквивалентны; точнее, справедливо равенство $T_\omega(g)\Phi = \Phi\mathcal{T}_\omega(g)$, $g \in G$.

Доказательство немедленно вытекает из леммы 2, ибо оператор $K(f, g)$ (как и любой оператор Гильберта–Шмидта) представляет собой нулевой элемент пространства H_ω ; об этом мы уже говорили в конце разд. 2.1.

Отныне мы займемся представлением $\mathcal{T}_\omega$.

4.4. Представление $\mathcal{T}_\omega$ как индуцированное. Рассмотрим мультипликативную группу положительных чисел $\mathbb{R}^+$ и операторы $\Theta(a)$, $(\Theta(a)f)(a) = \sqrt{a}f(at)$, $f \in S^{-1/2}(\mathbb{R})$. Легко проверить (используя соотношение (13)), что они сохраняют скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_\omega$, введенное в разд. 3.3. Кроме того, $|(\Theta(a)f)(t) - f(t)| \leq M|a - 1|(1 + |t|)^{-1/2}$, откуда вытекает, что $\|\Theta(a)f - f\|_\omega \leq M|a - 1|$. Следовательно, эти операторы порождают унитарное представление топологической группы $\mathbb{R}^+$ в гильбертовом пространстве S_ω^0 ; сохраним для него обозначение Θ .

Вернемся к представлению $\mathcal{T}_\omega$. Каждый элемент пространства S_ω запишем в виде функции $f(z)$, $z \in \mathbb{T}^1$, принимающей значения в пространстве S_ω^0 (об этом говорилось в разд. 3.3). Тогда это представление можно записать в виде

$$(\mathcal{T}_\omega(g)f)(z) = |bz + \bar{a}|^{i\rho-1} \Theta(|bz + \bar{a}|^2) f(zg), \quad g \in G, f \in S_\omega. \quad (16)$$

Чтобы истолковать эту формулу, возьмем подгруппу G_0 , оставляющую на месте точку $1 \in \mathbb{T}^1$. Эта подгруппа состоит из матриц (15), удовлетворяющих условию $a + \bar{b} \in \mathbb{R}$; имеем очевидный гомоморфизм $G_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$, $g \mapsto |a + \bar{b}|^2$. Введем характер $\chi_\rho(a) = a^{i\rho/2}$, $a \in \mathbb{R}^+$. Формула (16) означает, что представление $\mathcal{T}_\omega$ индуцировано представлением группы G_0 , полученным как композиция указанного гомоморфизма с представлением $a \mapsto \chi_\rho(a)\Theta(a)$, $a \in \mathbb{R}^+$ (запишем это в виде $\mathcal{T}_\omega = \text{Ind}^{\chi_\rho\Theta}$). Отсюда вытекает следующее: если взять любое подпредставление Θ_1 представления Θ (в этом случае мы пишем $\Theta_1 \prec \Theta$), действующее в инвариантном сепарабельном подпространстве пространства S_ω^0 , и разложить его в прямой интеграл одномерных характеров группы $\mathbb{R}^+$, то получим подпредставление $\text{Ind}^{\chi_\rho\Theta_1} \prec \mathcal{T}_\omega$, разлагающееся в прямой интеграл представлений основной серии группы G . (Мы ограничиваемся сепарабельными подпространствами, ибо для них имеется естественное разложение в прямой интеграл.)

Итак, вопрос о строении представления $\mathcal{T}_\omega$ (и, следовательно, эквивалентного ему представления T_ω) свелся к вопросу о спектре представления $a \mapsto \Theta(a)$, $a \in \mathbb{R}^+$. Этим мы займемся в §5. Предварительно перейдем от мультипликативной группы $\mathbb{R}^+$ к более удобной аддитивной группе $\mathbb{R}$.

4.5. Переход от представления $a \mapsto \Theta(a)$, $a \in \mathbb{R}^+$, к представлению $b \mapsto \Psi(b)$, $b \in \mathbb{R}$. В пространстве S_ω^0 возьмем подпространства S_ω^{0+} , S_ω^{0-} , порожденные функциями, сосредоточенными на полуоси (h, ∞) (соответственно $(-\infty, -h)$), где h — некоторое положительное число (зависящее от выбора функции). Они инвариантны относительно представления Θ (здесь еще раз используется то, что скалярные произведения в $S^{-1/2}(\mathbb{R})$ зависят только от ростков функций около $+\infty$, $-\infty$). Таким образом, в них возникают эквивалентные представления Θ^+ , Θ^- . Мы ограничимся подпространством S_ω^{0+} и соответствующим представлением Θ^+ .

Обозначим через B^∞ пространство всех комплекснозначных C^∞ -функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, таких, что $|f^{(k)}(t)| \leq M_k$, $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, для любого $k = 0, 1, \dots$

(для некоторых чисел M_k). Введем неотрицательную форму

$$(u_1, u_2)_\omega = \omega\left(\left\{\frac{\int_0^{\ln n} u_1(s)\overline{u_2(s)} ds}{1 + \ln n}\right\}\right), \quad u_1, u_2 \in B^\infty.$$

Подчеркнем, что форма $(u_1, u_2)_\omega$ не меняется при произвольном изменении функций u_1, u_2 на любой полупрямой $(-\infty, h)$; значит, она зависит только от ростков этих функций в окрестности точки $+\infty$. Она порождает (обычным образом) гильбертово пространство B_ω^∞ .

Определим в нем операторы $\Psi(b)$, $b \in \mathbb{R}$, задав их на B^∞ формулой $(\Psi(b)f)(s) = f(s + b)$. Легко проверяется, что эти операторы сохраняют скалярное произведение и непрерывно зависят от b . Следовательно, они порождают унитарное представление Ψ . Чтобы связать представления Θ и Ψ , зафиксируем бесконечно дифференцируемую функцию $\chi(t)$, такую, что она равна нулю при $t < t_0$ и равна единице при $t > t_1$ для некоторых положительных t_0, t_1 . Без труда проверяется, что замены $f(t) = \chi(t)t^{-1/2}\phi(\ln t)$, $b = \ln a$ приводят к унитарному изоморфизму гильбертовых пространств S_ω^{0+} , B_ω^∞ , сплетающему представления Θ^+ , Ψ (при отождествлении изоморфных групп $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}$ по правилу $b = \ln a$). (Здесь, разумеется, используется то, что скалярные произведения функций, взятых из пространства $S^{-1/2}(\mathbb{R})$ и сосредоточенных на положительной полуоси, а также функций из B^∞ зависят только от ростков этих функций в окрестности точки $+\infty$.)

Сказанное справедливо также по отношению к подпространству S_ω^{0-} .

Итак, все свелось к анализу представления Ψ ; этому посвящен следующий параграф.

§5. О спектре представления $b \mapsto \Psi(b)$, $b \in \mathbb{R}$, и о представлении группы $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm 1\}$

5.1. О спектре представления Ψ . Начнем с дискретной части спектра. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ возьмем функцию $s \mapsto e^{i\lambda s}$, $s \in \mathbb{R}$. Она порождает вектор $f_\lambda \in B_\omega^\infty$. Ясно, что $\Psi(b)f_\lambda = e^{i\lambda b}f_\lambda$. Легко видеть, что векторы f_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$, попарно ортогональны. Таким образом, мы указали часть дискретного спектра представления Ψ . По-видимому, этим исчерпывается дискретный спектр; однако доказательство этого предположения отсутствует.

Обратимся к непрерывному спектру. Следующая теорема показывает, что он «весьма велик».

ТЕОРЕМА 1. Пусть на $\mathbb{R}$ дана произвольная непрерывная борелевская мера τ (непрерывность означает, что мера любой точки равна нулю). Тогда представление Ψ обладает подпредставлением Ψ_0 со следующими свойствами:

- 1) спектр подпредставления Ψ_0 однороден и имеет счетную кратность;
- 2) его максимальный спектральный тип — это класс мер, эквивалентных мере τ ;
- 3) представление Ψ_0 действует в пространстве единственности (см. разд. 3.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы проведем доказательство для меры, имеющей компактный носитель; ясно, что это не ограничивает общности. Ниже понадобится функция

$$\hat{\tau}(b) = \int_{\mathbb{R}} e^{ibs} d\tau(s), \quad b \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Обозначим через $\overline{B}^\infty$ линейное пространство всех C^∞ -функций $f(s)$, $s \in \mathbb{R}$, которые обладают следующим свойством: существуют такие функции $f_n \in B^\infty$, $n = 1, 2, \dots$, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(s) - f_n(s)|^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Ясно, что $\|f_m - f_n\|_\omega \rightarrow 0$ при $m, n \rightarrow \infty$. Поэтому можно считать гильбертово пространство B_ω^∞ пополнением линейного пространства $\overline{B}^\infty$ по норме $\|\cdot\|_\omega$. Представление Ψ продолжается на $\overline{B}^\infty$.

Выведем простое свойство пространства $\overline{B}^\infty$. Возьмем функции $u, v \in \overline{B}^\infty$ и положим $w_T(b) = T^{-1} \int_0^T u(t+b) \overline{v(t)} dt$, $T > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

ЛЕММА 3. Для любого отрезка $[d_0, d_1]$ семейство функций $\{w_T\}$, $T > 1$, равномерно непрерывно в $[d_0, d_1]$, т. е.

$$\sup\{|w_T(b_1) - w_T(b_2)| : b_1, b_2 \in [d_0, d_1], |b_1 - b_2| < h, T > 1\} \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow 0$.

Действительно, для любого $\delta > 0$ функцию u можно представить в виде $u_1 + u_2$, где $u_1 \in B^\infty$,

$$\frac{1}{T} \int_0^T |u_2(t)|^2 dt < \delta^2 \quad \text{при } T > T_0 \quad (19)$$

для некоторого $T_0 > 1$. Соответственно функция w_T разбивается на слагаемые w_{1T} , w_{2T} . Ясно, что семейство функций $\{w_{1T}\}$, $T > 1$, равномерно непрерывно на $[d_0, d_1]$. Из (19) и неравенства Коши–Буняковского вытекает, что $|w_{2T}(b)| < \delta^2$ при $T > T_0$. Отсюда следует утверждение леммы.

Следующее предложение — это ядро доказательства теоремы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Существуют такие функции $\phi_n \in \overline{B}^\infty$, $n = 1, 2, \dots$, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi_m(b+s) \overline{\phi_n(s)} ds = \delta_{mn} \hat{\tau}(b), \quad b \in \mathbb{R}. \quad (20)$$

(Здесь, как обычно, $\delta_{mn} = 0$ при $m \neq n$, $\delta_{nn} = 1$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем метод «случайного выбора» функций из $\overline{B}^\infty$. С этой целью возьмем эргодическую динамическую систему $(X, \sigma, \{g_t\})$. (Чуть позже мы наложим на нее некоторые ограничения.) Здесь (X, σ) — это пространство с мерой, изоморфное отрезку $[0, 1]$ с мерой Лебега, а $\{g_t\}$ — однопараметрическая группа сохраняющих меру преобразований множества X , удовлетворяющая обычным условиям слабой непрерывности по t . Пусть $\{U(t)\}$ — соответствующая группа унитарных операторов пространства $L_2(X, \sigma)$. Таким образом, $U(t) = e^{itA}$, где $A = A^*$ — производящий оператор этой группы. Наложим следующее ограничение: оператор A имеет однородный счетнократный спектр и его максимальный спектральный тип подчиняет меру τ , указанную в

теореме 1. (Достаточно взять динамическую систему, порожденную стационарным гауссовским процессом со спектральной мерой $\sum_{k=0}^{\infty} \tau^{*k}/k!$.) Пусть L^τ есть инвариантное относительно A подпространство, в котором A имеет однородный счетнократный спектр и максимальный спектральный тип задается мерой τ . Изучим некоторые свойства этого подпространства.

Ясно, что для любой функции $f \in L^\tau$ вектор-функция $t \rightarrow U(t)f$ бесконечно дифференцируема в сильном смысле (ибо мера τ имеет компактный носитель). Отсюда следует, что функция $t \rightarrow f(xg_t)$, $t \in \mathbb{R}$, бесконечно дифференцируема для почти всех $x \in X$ (разумеется, при соответствующем изменении функции f на множестве нулевой меры). Докажем, что эта функция принадлежит пространству $\overline{B}^\infty$ для почти всех $x \in X$. Для этого возьмем любое $\delta > 0$ и ограниченную измеримую функцию v_δ , такую, что $\|v_\delta - f\| < \delta/2$. Положим $f_\delta = \int_{\mathbb{R}} h(t)U(t)v_\delta dt$, где $h \in C_0^\infty$, $\int_{\mathbb{R}} h(t) dt = 1$. Пусть функция h сосредоточена в столь малой окрестности нуля, что $\|v_\delta - f_\delta\| < \delta/2$. Тогда $\|f - f_\delta\| < \delta$ и, как легко видеть, функция $t \rightarrow f_\delta(xg_t)$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству B^∞ для почти всех $x \in X$ (при некотором изменении функции f_δ на множестве нулевой меры). Согласно эргодической теореме,

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(xg_t) - f_\delta(xg_t)|^2 dt \rightarrow \|f - f_\delta\|^2 < \delta^2 \quad \text{при } T \rightarrow \infty$$

для почти всех $x \in X$. Таким образом, функция $t \rightarrow f(xg_t)$, $t \in \mathbb{R}$, обладает свойством (18) для почти всех $x \in X$ и, следовательно, принадлежит пространству $\overline{B}^\infty$, что и утверждалось.

Теперь завершим доказательство предложения 4. Ясно, что в указанном подпространстве L^τ существуют функции v_k , $k = 1, 2, \dots$, такие, что $(U(b)v_m, v_n) = \delta_{mn}\hat{\tau}(b)$, $b \in \mathbb{R}$. Можно считать (как объяснено выше), что функции $t \rightarrow v_n(xg_t)$ принадлежат пространству $\overline{B}^\infty$ для почти всех $x \in X$. Из эргодической теоремы вытекает, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T v_m(xg_{b+s})\overline{v}_n(xg_s)ds \rightarrow (U(b)v_m, v_n) = \delta_{mn}\hat{\tau}(b), \quad T \rightarrow \infty,$$

для всех рациональных чисел $b \in \mathbb{R}$ и почти всех $x \in X$. Из леммы 3 видно, что указанная сходимости имеет место для всех $b \in \mathbb{R}$ и почти всех $x \in X$. Взяв такое x и положив $\phi_n(t) = v_n(xg_t)$, приходим к равенству (20), чем доказано предложение 4.

Вернемся к представлению Ψ в пространстве B_ω^∞ . Функции ϕ_n , указанные в предложении 4, отождествим с элементами этого пространства. Тогда ясно, что $(\Psi(b)u_m, u_n)_\omega = \delta_{mn}\hat{\tau}(b)$, причем написанные здесь скалярные произведения не зависят от ω . Этим доказана теорема 1.

5.2. О некоторых частях представления T_ω группы $G = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm 1\}$. Как уже объяснялось в разд. 4.4, имея разложение представления Ψ в некотором инвариантном подпространстве, мы немедленно получаем разложение соответствующего подпредставления группы G по представлениям основной серии. Это приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2. 1) Каждое представление основной серии группы G входит (дискретно) в T_ω с кратностью, не меньшей двух. Эти подпредставления

действуют в пространствах классических ПДО (с положительно-однородным символом).

2) Для любой непрерывной борелевской меры, заданной на пространстве представлений основной серии, T_ω содержит подпредставление, которое разлагается в прямой интеграл представлений основной серии по указанной мере с однородной счетной кратностью. Это подпредставление действует в подпространстве единственности (см. разд. 3.4).

ЗАМЕЧАНИЕ. Ограничение следа Диксмье на классические ПДО называется следом Воджицкого [4].

В заключение отметим, что кроме очевидных обобщений изложенного (другие группы и пр.) представляет интерес следующее. Теория ПДО включается в общую теорию обобщенных функций на многообразии с особенностями на подмногообразии. Если на многообразии действует группа, а упомянутое подмногообразие инвариантно, то возникает представление в пространстве ростков обобщенных функций с особенностями на этом подмногообразии. Возможно, небезынтересен анализ этого представления и, в частности, вопрос о его унитарных подпредставлениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dixmier J. Existence de traces non normales. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser A-B, **262**, A-1107–A-1108 (1966).
2. Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. Наука, М., 1978.
3. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. Наука, М., 1965.
4. Труды семинара Н. Бурбаки за 1989 г. Мир, М., 1991.
5. Connes A. Noncommutative Geometry. Academic Press, 1994.

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана

Поступило в редакцию
12 октября 1999 г.