Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Локтев, Б. Л. Фейгин, О финитизации тождеств Гордона, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 1, 53–61

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa231>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 10:34:06

О финитизации тождеств Гордона

© 2001. С. А. Локтев, Б. Л. Фейгин

Введение

Пусть $\widehat{SL}_2$ — группа, отвечающая аффинной алгебре Ли $\widehat{sl}_2$. Она является центральным расширением группы матриц размера 2×2 с определителем единица над кольцом функций на окружности. Символом $\widehat{\mathcal{N}}$ обозначим подгруппу группы $\widehat{SL}_2$, состоящую из верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали, а символом $\widehat{n}$ обозначим алгебру Ли группы $\widehat{\mathcal{N}}$. Группа $\widehat{\mathcal{N}}$ состоит из токов на окружности со значениями в максимальной нильпотентной подгруппе группы SL_2 . Алгебра $\widehat{n}$ абелева и может быть отождествлена с пространством функций на окружности. Выберем базис $\{e_i\}$, $i \in \mathbb{Z}$, в $\widehat{n}$, такой, что элементу e_m соответствует функция $e^{2\pi i m \phi}$, где ϕ — угловой параметр на окружности. Пусть Gr — аффинный грассманиан для группы $\widehat{SL}_2$, т.е. фактор группы $\widehat{SL}_2$ по максимальной параболической подгруппе P . Будем предполагать, что e_i принадлежат алгебре Ли группы P при $i \leq 0$. Обозначим через $p \in Gr$ образ P в многообразии Gr .

В работе [2] изучается замыкание $\widehat{\mathcal{N}}$ -орбиты точки p на Gr . Обозначим это многообразие через $\mathcal{M}$. Геометрическое определение многообразия $\mathcal{M}$ довольно сложно, более простым и прозрачным представляется описание $\mathcal{M}$ в терминах его координатного кольца.

Напомним, что на многообразии Gr существует линейное расслоение ξ , такое, что в сечениях расслоения $\xi^{\otimes k}$ реализуется неприводимое вакуумное представление $L_{0,k}$ уровня k алгебры $\widehat{sl}_2$. Более точно, $H^0(Gr, \xi^{\otimes k}) \cong (L_{0,k})^*$. Таким образом, координатное кольцо многообразия Gr есть прямая сумма всех $(L_{0,k})^*$ с естественным умножением $(L_{0,k_1})^* \otimes (L_{0,k_2})^* \rightarrow (L_{0,k_1+k_2})^*$.

Многообразие $\mathcal{M}$ — подмногообразие многообразия Gr , и, значит, его координатное кольцо есть фактор координатного кольца многообразия Gr . А именно, пусть v_k — старший вектор представления $L_{0,k}$ относительно подгруппы P . В $L_{0,k}$ имеется подпространство $D(k) = U(\widehat{n})v_k$. Тогда координатное кольцо многообразия $\mathcal{M}$ есть прямая сумма пространств $D(k)^*$ с индуцированным умножением.

В интегрируемых представлениях алгебры $\widehat{sl}_2$ уровня k выполняется соотношение $e(t)^{k+1} = 0$, где $e(t) = \sum e_i t^{-i}$. Исходя из этого соотношения, в [2] строится следующая функциональная реализация пространств $D(k)^*$:

$$D(k)^* = \Sigma_0(k) \oplus \Sigma_1(k) \oplus \Sigma_2(k) \oplus \dots,$$

где $\Sigma_m(k)$ — пространство симметрических многочленов от m переменных $t_1, \dots, t_m$, делящихся на произведение $t_1 \cdots t_m$ и обращающихся в нуль при $t_1 = \dots = t_{k+1}$.

В этих терминах умножение на прямой сумме пространств $D(k)^*$ определяется как набор отображений $\Sigma_{m_1}(k_1) \otimes \Sigma_{m_2}(k_2) \rightarrow \Sigma_{m_1+m_2}(k_1+k_2)$. При этом образом пары полиномов $P_1(t_1, \dots, t_{m_1})$ и $P_2(t_1, \dots, t_{m_2})$ будет симметризация по переменным $t_1, \dots, t_{m_1+m_2}$ их произведения:

$$(P_1 \circ P_2)(t_1, \dots, t_{m_1+m_2}) = \text{Symm}(P_1(t_1, \dots, t_{m_1})P_2(t_{m_1+1}, \dots, t_{m_1+m_2})). \quad (1)$$

Пусть N — натуральное число. Пусть $\hat{n}_N$ — подалгебра алгебры $\hat{n}$, порожденная e_i при $i > N$, и пусть $\hat{\mathcal{N}}_N$ — соответствующая подгруппа. Определим многообразие $\mathcal{M}_N$ как фактор многообразия $\mathcal{M}$ по группе $\hat{\mathcal{N}}_N$. С геометрической точки зрения для этого необходимо удалить из многообразия $\mathcal{M}$ нестабильные орбиты, а остаток профакторизовать по действию группы. С алгебраической точки зрения координатное кольцо многообразия $\mathcal{M}_N$ будет подкольцом $\hat{\mathcal{N}}_N$ -инвариантов (или, что то же самое, $\hat{n}_N$ -инвариантов) в координатном кольце многообразия $\mathcal{M}$.

Таким образом, координатным кольцом многообразия $\mathcal{M}_N$ будет прямая сумма пространств $D_N(k)^*$, двойственных к пространствам $D_N(k) = \hat{n}_N \setminus D(k)$ коинвариантов пространства $D(k)$ относительно алгебры $\hat{n}_N$. Умножение на этом пространстве определяется тем же самым способом. Теперь определим многообразие $\mathcal{M}_N$ как проективный спектр градуированной алгебры $\bigoplus D_N(k)^*$. Автоматически при этом получим линейное расслоение ξ_N на $\mathcal{M}_N$, такое, что $H_0(\mathcal{M}_N, \xi_N^{\otimes k}) \cong D_N(k)^*$.

На многообразии Gr действует двумерный тор T , касательное пространство которого в единице порождено картановским элементом h_0 и элементом энергии L_0 . Легко проверить, что это действие продолжается до действия тора T на многообразиях $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_N$; при этом действие тора T на $D(k)$ и $D_N(k)$ определяется тем, что $[h_0/2, e_i] = e_i$, $[L_0, e_i] = ie_i$.

Пусть

$$d_N(k; q, z) = \text{Tr}_{D_N(k)} q^{L_0} z^{h_0/2}$$

— полином Гильберта градуированного пространства $D_N(k)$. Вычислить этот полином можно двумя способами, как это было сделано для пространств $D(k)$ в [2]. Первый из них — чисто алгебраический. Он основан на функциональной интерпретации пространства $D_N(k)^*$ и фильтрации Гордона на пространстве симметрических полиномов. Соответствующее вычисление сделано в [1], и его результат мы приводим в левой части формулы (2) ниже. Второй способ — применение голоморфной формулы Лефшеца к расслоению $\xi_N^{\otimes k}$. Остановимся на нем подробнее.

Можно доказать, что при четном N многообразие $\mathcal{M}_N$ неособо (а при нечетном $N > 3$ содержит единственную особую точку) и $H^i(\mathcal{M}_N, \xi_N^{\otimes k}) = 0$ для $i > 0$. При этом неподвижные точки действия тора T на $\mathcal{M}_N$ нумеруются парой неотрицательных чисел m и n , таких, что $m + n \leq N/2$. Неподвижная точка $x_{0,0}$ — образ выделенной точки $p \in Gr$ в $\mathcal{M}_N$. Положим для $t \in \mathbb{R}$

$$x_{m,n}(t) = \prod_{i=0}^{m-1} \exp(te_{2i+1}) \prod_{i=0}^{n-1} \exp(te_{N-2i}) \cdot x_{0,0}.$$

Тогда неподвижной точкой $x_{m,n}$ будет предел $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{m,n}(t)$. Учитывая вклады этих точек, получим правую часть формулы (2). Это выражение также приведено в [6].

Таким образом, для четного N получаем формулу

$$\sum_{v_1, \dots, v_k \in \mathbb{Z}_+} q^{\sum_{i,j} v_i v_j \min(i,j)} z^{\sum_i i v_i} \prod_{i=1}^k \left[(N+1)i - 2 \sum_j v_j \min(i,j) + v_i \right]_q$$

$$= \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z}_+ \\ m+n \leq N/2}} \frac{z^{k(m+n)} q^{k(m^2 + (N+1)n - n^2)}}{\prod_{i=1}^m (1-q^i)(1-q^{-i-m+1}z^{-1}) \prod_{i=2m+1}^{N-2n} (1-q^i z) \prod_{i=1}^n (1-q^{-i})(1-q^{-N+i+n-2}z^{-1})}, \quad (2)$$

где $[n]_q$ есть q -биномиальный коэффициент, а выражение $1/(1-q^\alpha z^\beta)$ следует понимать как $\sum_{i \geq 0} q^{i\alpha} z^{i\beta}$ при $\alpha, \beta \geq 0$ и как $-\sum_{i < 0} q^{i\alpha} z^{i\beta}$ при $\alpha, \beta \leq 0$.

Правая часть этой формулы похожа на знакопеременную сумму в формуле Вейля. Напомним, что формулу Вейля для характеров интегрируемых представлений алгебры Каца–Мути можно интерпретировать геометрически как формулу Лефшеца для расслоений на соответствующем многообразии флагов. Неподвижные точки действия тора на многообразии флагов нумеруются элементами группы Вейля и, таким образом, соответствуют экстремальным векторам рассматриваемого представления. При этом вклад неподвижной точки в формулу Лефшеца можно интерпретировать как характер представления «в окрестности» соответствующего экстремального вектора. Поясним это для представлений группы $\widehat{SL}_2$.

Пусть $L_{l,k-l}$ — интегрируемое представление группы $\widehat{SL}_2$ и $v_{k,l}$ — его старший вектор. Рассмотрим экстремальный вектор $w(v_{k,l})$, где w — элемент группы Вейля группы $\widehat{SL}_2$. Пусть $c_q(w; k, l)$, $c_z(w; k, l)$ — градуировки этого вектора. Будем называть предел

$$q^{c_q(w; k, l)} z^{c_z(w; k, l)} \lim_{r \rightarrow \infty} (q^{-c_q(w; rk, rl)} z^{-c_z(w; rk, rl)} \text{ch } L_{rl, r(k-l)}) \quad (3)$$

характером представления $L_{l,k-l}$ «в окрестности» вектора $w(v_{k,l})$. Легко проверить, что это характер модуля Верма $M_{l,k-l}$, к которому применен элемент w . Чтобы получить вклад вектора $w(v_{k,l})$, необходимо разложить выражение (3) по положительным степеням q . При этом получится характер некоторого модуля Верма со знаком, равным $(-1)^{l(w)}$. Формула Вейля утверждает, что характер представления $L_{l,k-l}$ будет равен сумме таких вкладов.

Мы применим эти соображения для вычисления характеров пространств $D_N(k)$. А именно, мы представим характер пространства $D_N(k)$ в виде суммы характеров «в окрестности» некоторых векторов. В результате мы получим обобщение формулы (2), которое докажем комбинаторными методами. На самом деле знакопеременная часть этой формулы также будет формулой Лефшеца для расслоений на некотором многообразии.

1. Рассмотрим пространство

$$D_N(k, l, r) = \mathbb{C}[e_1, \dots, e_N] / I_N(k, l, r), \quad N \geq 2,$$

где идеал $I_N(k, l, r)$ порожден элементами

$$e_1^{l+1}, \quad e_N^{r+1}, \quad \sum_{\substack{1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_{k+1} \leq N \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_{k+1} = i}} e_{\alpha_1} \dots e_{\alpha_{k+1}}, \quad k+1 \leq i \leq N(k+1).$$

Другими словами, $I_N(k, l, r)$ порожден элементами e_1^{l+1} , e_N^{r+1} , $e(t)^{k+1}$, $t \in \mathbb{C}$, где $e(t) = \sum_{i=1}^N e_i t^i$.

В частности, пространство $D_N(k)$, обсуждаемое во введении, изоморфно $D_N(k, k, k)$.

Введем на пространстве $D_N(k, l, r)$ биградуировку $(\deg_q, \deg_z)$. Для этого биградулируем алгебру $\mathbb{C}[e_1, \dots, e_N]$, полагая $\deg_q e_i = i$, $\deg_z e_i = 1$. Поскольку элементы из $I_N(k, l, r)$ однородны, биградуировка алгебры $\mathbb{C}[e_1, \dots, e_N]$ определяет биградуировку на $D_N(k, l, r)$. Символом $d_N(k, l, r; q, z)$ обозначим полином Гильберта этого пространства:

$$d_N(k, l, r; q, z) = \sum_{i, j \geq 0} q^i z^j \dim(D_N(k, l, r))^{i, j}.$$

2. Пространство, двойственное к $D_N(k, l, r)$, допускает удобную функциональную реализацию, которую мы сейчас опишем.

Пусть Σ_m^N — пространство симметрических полиномов вида

$$t_1 \cdots t_m f(t_1, \dots, t_m) \quad (4)$$

степени не выше N по каждой из m переменных. Обозначим через $\Sigma_m^N(k, l, r)$ подпространство в Σ_m^N , состоящее из полиномов вида (4), таких, что

- 1) $f(t_1, \dots, t_m) = 0$, если $t_1 = \dots = t_{k+1}$,
- 2) $f(t_1, \dots, t_m) = 0$, если $t_1 = \dots = t_{l+1} = 0$,
- 3) многочлен $f(t, \dots, t, t_{r+2}, t_{r+3}, \dots, t_m)$ имеет степень, строго меньшую $(r+1)(N-1)$, по переменной t .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пространство $D_N(k, l, r)$ двойственно прямой сумме

$$\Sigma_0^N(k, l, r) \oplus \Sigma_1^N(k, l, r) \oplus \Sigma_2^N(k, l, r) \oplus \dots$$

При этом подпространство $(D_N(k, l, r))^{i, j}$ двойственно подпространству в $\Sigma_j^N(k, l, r)$, состоящему из полиномов степени i .

Двойственность строится следующим образом. Пусть S_m^N — пространство однородных полиномов степени m от N переменных $e_1, \dots, e_N$. Определим отображение $\mathcal{P}: (S_m^N)^* \rightarrow \Sigma_m^N$, полагая для $\phi \in (S_m^N)^*$

$$\mathcal{P}(\phi)(t_1, \dots, t_m) = \phi(e(t_1) \cdots e(t_m)).$$

Для доказательства предложения теперь достаточно заметить, что это отображение — изоморфизм, а также то, что условие 1) на подпространство $\Sigma_m^N(k, l, r)$ соответствует факторизации двойственного пространства по $e(t)^{k+1}$, условие 2) — по e_1^{l+1} , условие 3) — по e_N^{r+1} .

3. Заметим, что на пространстве $D_N^\vee = \bigoplus_{m, k, l, r} \Sigma_m^N(k, l, r)$ определено ассоциативное коммутативное умножение. Произведение полиномов $P_1 \in \Sigma_{m_1}^N(k_1, l_1, r_1)$ и $P_2 \in \Sigma_{m_2}^N(k_2, l_2, r_2)$ определим по формуле (1). Ясно, что $P_1 \circ P_2 \in \Sigma_{m_1+m_2}^N(k_1+k_2, l_1+l_2, r_1+r_2)$.

Наличие структуры коммутативной алгебры на пространстве $D_N^\vee$ приводит к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Существует многообразие $\mathcal{M}'_N$, а также линейные расслоения ξ_K , ξ_L , ξ_R и векторные поля L_q , L_z на $\mathcal{M}'_N$, такие, что $D_N(k, l, r)$

двойственно $H^0(\mathcal{M}'_N, \xi_K^{\otimes k} \otimes \xi_L^{\otimes l} \otimes \xi_R^{\otimes r})$ и $d_N(k, l, r; q, z)$ — след действия оператора $q^{L_q} z^{L_z}$ на этом пространстве.

Многообразие $\mathcal{M}'_N$ строится следующим образом. Пусть S — спектр алгебры $D_N^\vee$. Алгебра $D_N^\vee = \bigoplus D_N(k, l, r)^*$ триградуирована числами k, l и r , что определяет действие трехмерного комплексного тора T_3 на S . Пусть $\widetilde{\mathcal{M}}'_N$ — максимальное подмногообразие в S , на котором тор T_3 действует свободно. Положим $\mathcal{M}'_N = \widetilde{\mathcal{M}}'_N / T_3$. Тогда в качестве расслоений ξ_K, ξ_L, ξ_R можно взять расслоения, ассоциированные с соответствующими одномерными представлениями тора T_3 .

4. Фильтрация Гордона на пространствах Σ_m^N (см. [1, 2]) позволяет получить формулу, обобщающую левую часть формулы (2). А именно:

ТЕОРЕМА 1. Пусть Q — матрица размера $k \times k$, такая, что $Q_{i,j} = \min(i, j)$; пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ — векторы в $\mathbb{R}^k$, такие, что

$$\mathcal{L}_i = \begin{cases} i - l, & i \geq l, \\ 0, & i \leq l, \end{cases} \quad \mathcal{R}_i = \begin{cases} i - r, & i \geq r, \\ 0, & i \leq r. \end{cases}$$

Тогда

$$d_N(k, l, r; q, z) = \sum_{\substack{v=(v_1, \dots, v_k) \\ v_i \in \mathbb{Z}_+}} q^{v^t Q v + \mathcal{L}^t v} z^{\sum i v_i} \prod_{i=1}^k \left[\begin{matrix} (N+1)i - (2Qv + \mathcal{L} + \mathcal{R} - v)_i \\ v_i \end{matrix} \right]_q,$$

где значок t превращает вектор-столбец в вектор-строку, а

$$\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]_q = \frac{\prod_{i=1}^n (1 - q^i)}{\prod_{i=1}^m (1 - q^i) \prod_{i=1}^{n-m} (1 - q^i)}.$$

Доказательство этой формулы повторяет доказательства аналогичных формул в [1] и [2].

5. Далее построим базис в пространстве $D_N(k, l, r)$.

ТЕОРЕМА 2. Мономы $e_1^{a_1} \dots e_N^{a_N}$, такие, что

$$a_1 \leq l, \quad a_N \leq r, \quad a_i + a_{i+1} \leq k \quad \text{для всех } 1 \leq i < N, \quad (5)$$

образуют базис в $D_N(k, l, r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [1] это утверждение доказано для $r = k$ и, поскольку $D_N(k, l, 0) \cong D_{N-1}(k, l, k)$, для $r = 0$.

Прежде всего, из того, что мономы $e_1^{a_1} \dots e_N^{a_N}$, удовлетворяющие условию $a_i + a_{i+1} \leq k$, порождают пространство $D_N(k, k, k)$, следует, что мономы, удовлетворяющим условиям (5), порождают $D_N(k, l, r)$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно сравнить размерность пространства $D_N(k, l, r)$ и количество элементов предполагаемого мономиального базиса.

Обозначим через $\tilde{D}_N(k, l, r)$ множество мономов, удовлетворяющих условиям (5). Кроме того, пусть $d_N(k, l, r) = \dim D_N(k, l, r)$, а $\tilde{d}_N(k, l, r)$ — количество элементов в $\tilde{D}_N(k, l, r)$. Имеет место

ЛЕММА 1. (i) $\tilde{d}_N(k, l, r) = \tilde{d}_N(k, l, r-1) + \tilde{d}_{N-1}(k, l, k-r)$.

(ii) $d_N(k, l, r) \leq d_N(k, l, r-1) + d_{N-1}(k, l, k-r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $m = e_1^{a_1} \cdots e_N^{a_N} \in \tilde{D}_N(k, l, r)$. Тогда либо $a_N < r$ и $m \in \tilde{D}_N(k, l, r-1)$, либо $a_N = r$ и $m' = e_1^{a_1} \cdots e_{N-1}^{a_{N-1}} \in \tilde{D}_{N-1}(k, l, k-r)$. И наоборот, по любому элементу из $\tilde{D}_N(k, l, r-1)$ или из $\tilde{D}_{N-1}(k, l, k-r)$ восстанавливается соответствующий элемент из $\tilde{D}_N(k, l, r)$.

(ii) Рассмотрим отображение $\tilde{i}_N(r): \mathbb{C}[e_1, \dots, e_{N-1}] \rightarrow D_N(k, l, r)$, такое, что $\tilde{i}_N(r)(P) = P \cdot e_N^r$. Легко проверить, что образ идеала $I_{N-1}(k, l, k-r)$ при этом отображении нулевой; таким образом, $\tilde{i}_N(r)$ индуцирует отображение $i_N(r): D_{N-1}(k, l, k-r) \rightarrow D_N(k, l, r)$. В частности, получаем, что $\dim \text{Im}(i_N(r)) \leq d_{N-1}(k, l, k-r)$.

Также легко проверить, что образ идеала $I_N(k, l, r-1)$ при проекции $D_N(k, l, r) \rightarrow \text{Coker}(i_N(r))$ нулевой, а значит, $\dim \text{Coker}(i_N(r)) \leq d_N(k, l, r-1)$. А поскольку $\dim D_N(k, l, r) = \dim \text{Im}(i_N(r)) + \dim \text{Coker}(i_N(r))$, верно утверждение леммы. $\square$

Из равенства $d_N(k, l, r) = \tilde{d}_N(k, l, r)$ для $r = 0, k$, а также для $N = 2$ следует, что неравенство в утверждении (ii) леммы 1 является равенством. Тем самым получаем равенство $d_N(k, l, r) = \tilde{d}_N(k, l, r)$ для всех r и утверждение теоремы 2. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. $d_N(k, l, r; q, z) = d_N(k, l, r-1; q, z) + (q^N z)^r d_{N-1}(k, l, k-r; q, z)$.

6. Другое следствие из теоремы 2 можно сформулировать так. Пусть $P_N(k, l, r)$ — многогранник в $\mathbb{R}^N = \{(x_1, \dots, x_N)\}$, заданный условиями

$$x_1 \leq l, \quad x_N \leq r, \quad x_i + x_{i+1} \leq k \quad \text{для всех } 1 \leq i < N.$$

Пусть $\varphi_z = \sum x_i$, $\varphi_q = \sum ix_i$ — функционалы на $\mathbb{R}^N$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Размерность пространства $D_N(k, l, r)$ совпадает с количеством целых точек многогранника $P_N(k, l, r)$, а*

$$d_N(k, l, r; q, z) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^N \cap P_N(k, l, r)} q^{\varphi_q(\mathbf{x})} z^{\varphi_z(\mathbf{x})}.$$

Следуя идеям, изложенным в [4], представим полином $d_N(k, l, r; q, z)$ как сумму вкладов вершин многогранника $P_N(k, l, r)$. А именно, мы предъявим (см. теорему 3) формулу вида $d_N(k, l, r; q, z) = \sum d_M$, где суммирование ведется по всем вершинам многогранника $P_N(k, l, r)$.

Пусть M — некоторая вершина. В ее малой окрестности наш многогранник выглядит как конус над некоторым $(N-1)$ -мерным многогранником. Обозначим этот конус через $C(M)$. В нашем случае для вершины M

$$d_M = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^N \cap C(M)} q^{\varphi_q(\mathbf{x})} z^{\varphi_z(\mathbf{x})}.$$

В соответствии с [4] будем говорить, что вершина M простая, если $C(M)$ — конус над симплексом. В этом случае получается простое выражение для вклада. Легко видеть, что при общих k, l, r (при $k > l > 0$, $k > r > 0$, $l \neq r$, $l+r \neq k$) простые вершины многогранника $P_N(k, l, r)$ суть

$$M_{m,n} = \left(\underbrace{l, k-l, l, k-l, \dots}_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-m-n}, \underbrace{\dots, r, k-r, r}_n \right).$$

При этом $n + m \leq N$, а в случае $n + m = N$ дополнительно требуется, чтобы сумма m -й и $(m + 1)$ -й координат не превышала k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть k, l и r общие. Тогда всякая целая точка конуса $C(M_{m,n})$ получается из $M_{m,n}$ добавлением линейной комбинации с целыми неотрицательными коэффициентами векторов $v^1, \dots, v^N$, где

$$v^i = \begin{cases} (\underbrace{0, \dots, 0}_{m-i}, \underbrace{-1, 1, \dots, (-1)^{i-1}, (-1)^i}_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-m}), & i \leq m, \\ (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{N-i}), & m < i \leq N - n, \\ (\underbrace{0, \dots, 0}_{N-n}, \underbrace{(-1)^{N-i+1}, (-1)^{N-i}, \dots, 1, -1}_{N-i+1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+i-N-1}), & N - n < i. \end{cases}$$

Таким образом,

$$d_{M_{m,n}} = q^{\varphi_q(M_{m,n})} z^{\varphi_z(M_{m,n})} \prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - q^{\varphi_q(v^i)} z^{\varphi_z(v^i)}}.$$

Величины $\varphi_q(M_{m,n})$ и $\varphi_z(M_{m,n})$ являются линейными функциями от k, l, r . Величины $\varphi_q(v^i)$ и $\varphi_z(v^i)$ не зависят от k, l, r и равны следующим числам:

	$m \geq i$		$N - n \geq i,$	$i > N - n$	
	i четно	i нечетно	$i > m$	$N - i$ четно	$N - i$ нечетно
$\varphi_z(v^i)$	0	-1	1	-1	0
$\varphi_q(v^i)$	$i/2$	$(i-1)/2 - m$	i	$n - 1 - (3N - i)/2$	$-(N - i + 1)/2$

Таким образом,

$$d_{M_{m,n}} = \frac{q^{\varphi_q(M_{m,n})} z^{\varphi_z(M_{m,n})}}{\prod_{i=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (1 - q^i) \prod_{i=\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}^m (1 - q^{-i} z^{-1}) \prod_{i=m+1}^{N-n} (1 - q^i z) \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (1 - q^{-i}) \prod_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^n (1 - q^{i-N-1} z^{-1})}. \quad (6)$$

Чтобы придать смысл этому выражению как ряду от положительных степеней q и z , положим выражение $1/(1 - q^\alpha z^\beta)$ равным $\sum_{i \geq 0} q^{i\alpha} z^{i\beta}$ при $\alpha, \beta \geq 0$ и равным $-\sum_{i < 0} q^{i\alpha} z^{i\beta}$ при $\alpha, \beta \leq 0$ (других случаев не возникает). Обозначим получившийся ряд через $d_N^{m,n}(k, l, r; q, z)$. Формула (6) определяет его при любых целых k, l, r .

7. Эти соображения позволяют нам обобщить правую часть формулы (2). Окажется, что в нашем случае достаточно сложить вклады простых вершин $M_{m,n}$, т. е. суммарный вклад остальных вершин нулевой. Положим

$$d_N^e(k, l, r; q, z) = \sum_{\substack{m+n < N \text{ или} \\ m+n=N, m \text{ четно}}} d_N^{m,n}(k, l, r; q, z),$$

$$d_N^o(k, l, r; q, z) = \sum_{\substack{m+n < N \text{ или} \\ m+n=N, m \text{ нечетно}}} d_N^{m,n}(k, l, r; q, z).$$

ТЕОРЕМА 3. (i) Если N нечетно, $l \leq r$, то $d_N(k, l, r; q, z) = d_N^o(k, l, r; q, z)$.

(ii) Если N нечетно, $l \geq r$, то $d_N(k, l, r; q, z) = d_N^e(k, l, r; q, z)$.

(iii) Если N четно, $l + r \leq k$, то $d_N(k, l, r; q, z) = d_N^o(k, l, r; q, z)$.

(iv) Если N четно, $l + r \geq k$, то $d_N(k, l, r; q, z) = d_N^e(k, l, r; q, z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 2. (i) $d_N^e(k, l, r; q, z) = d_N^e(k, l, r-1; q, z) + (q^N z)^r d_{N-1}^e(k, l, k-r; q, z)$.

(ii) $d_N^o(k, l, r; q, z) = d_N^o(k, l, r-1; q, z) + (q^N z)^r d_{N-1}^o(k, l, k-r; q, z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения следуют из того, что

$$d_N^{m,n}(k, l, r; q, z) = d_N^{m,n}(k, l, r-1; q, z) + (q^N z)^r d_{N-1}^{m,n-1}(k, l, k-r; q, z)$$

при $n > 0$ и $d_N^{m,0}(k, l, r; q, z) = d_N^{m,0}(k, l, r-1; q, z)$. $\square$

ЛЕММА 3. $d_N^e(k, l, -1; q, z) = 0$ для нечетного N , а $d_N^o(k, l, -1; q, z) = 0$ для четного N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма следует из равенства

$$d_N^{m,2n}(k, l, -1; q, z) = -d_N^{m,2n+1}(k, l, -1; q, z). \quad \square$$

ЛЕММА 4. Если $l + r = k$, то $d_{2N}^e(k, l, r; q, z) = d_{2N}^o(k, l, r; q, z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам надо доказать, что

$$\sum_{m=0}^{2N} (-1)^m d_{2N}^{m,2N-m}(k, a, k-a; q, z) = 0$$

при всех k и a . Пусть

$$\Phi(n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-q^i}, \quad \Psi(m, n) = \prod_{i=m}^n \frac{1}{1-q^{-i}z^{-1}}, \quad \Phi^\vee(n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-q^{-i}}.$$

Тогда

$$d_{2N}^{2s,2N-2s}(k, a, k-a; q, z) = P_{q,z} \cdot \Phi(s) \Psi(s+1, N+s) \Phi^\vee(N-s),$$

$$d_{2N}^{2s+1,2N-2s-1}(k, a, k-a; q, z) = P_{q,z} \cdot \Phi(s) \Psi(s+1, N+s+1) \Phi^\vee(N-s-1),$$

где $P_{q,z}$ — числитель этих дробей, не зависящий от s . Легко доказать по индукции, что при $s < N$

$$\sum_{m=0}^{2s} (-1)^m d_{2N}^{m,2N-m}(k, a, k-a; q, z) = \frac{P_{q,z}}{1-q^{-N}} \Phi(s) \Psi(s+1, N+s) \Phi^\vee(N-s-1),$$

$$\sum_{m=0}^{2s+1} (-1)^m d_{2N}^{m,2N-m}(k, a, k-a; q, z) = -\frac{P_{q,z}}{1-q^{-N}} \Phi(s) \Psi(s+2, N+s+1) \Phi^\vee(N-s-1).$$

Используя вторую формулу для $s = N-1$, получаем утверждение леммы. $\square$

Докажем утверждения теоремы 3. Для $N = 2$ они поддаются прямой проверке. Именно в этот момент происходит разделение на два случая в зависимости от l и r . Предположим, что все утверждения теоремы верны для $N-1$, и докажем их для N .

Пусть N нечетно. По леммам 2 и 3 $d_N^e(k, l, 0; q, z) = d_{N-1}^e(k, l, k; q, z)$. Поскольку $D_N(k, l, 0) \cong D_{N-1}(k, l, k)$, из предположения индукции следует, что $d_N(k, l, 0; q, z) = d_N^e(k, l, 0; q, z)$. Индукция по r , основанная на лемме 2 и следствии 1, доказывает, что $d_N(k, l, r; q, z) = d_N^e(k, l, r; q, z)$ при $r \leq l$, т. е. утверждение (ii).

Утверждение (i) выводится из (ii) применением преобразования пространства $D_N(k, l, r)$, переводящего e_i в e_{N-i+1} .

Теперь пусть N четно. Утверждение (iii) доказывается аналогично (ii). Для $r = k - l$ утверждение (iv) следует из утверждения (iii) и леммы 4, после чего утверждение (iv) для произвольного $r \geq k - l$ доказывается аналогичной индукцией по r . $\square$

8. Чтобы получить правую часть формулы (2), рассмотрим частный случай $l = r = k$. В этом случае вершины $M_{2m,2n}$, $M_{2m-1,2n}$, $M_{2m,2n-1}$ и $M_{2m-1,2n-1}$ склеиваются в одну (обозначим ее через $M'_{m,n}$) и, кроме того, при нечетном N склеиваются между собой все вершины вида $M_{n,N-n}$ (обозначим соответствующую вершину через M').

Положим

$$d_{M'_{m,n}} = \sum_{i,j=0,1} d_N^{2m-i,2n-j}(k, k, k; q, z),$$

считая, что $d_N^{i,j}(k, k, k; q, z) = 0$ при $i < 0$ или $j < 0$. Теперь правая часть формулы (2) получается из следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.

$$d_{M'_{m,n}} = \frac{z^{k(m+n)} q^{k(m^2 + (N+1)n - n^2)}}{\prod_{i=1}^m (1 - q^i)(1 - q^{-i-m+1} z^{-1}) \prod_{i=2m+1}^{N-2n} (1 - q^i z) \prod_{i=1}^n (1 - q^{-i})(1 - q^{-N+i+n-2} z^{-1})}.$$

Кроме того, пусть

$$d_{M'} = \sum_{i+j=N, i \text{ четно}} d_N^{i,j}(k, k, k; q, z)$$

для нечетного N . Мы предлагаем следующее утверждение, характеризующее вклад особой точки многообразия $\mathcal{M}_N$.

ГИПОТЕЗА 1. Пусть N нечетно. Тогда

$$d_{M'} = \frac{P_N(q, z)}{\prod_{i=1}^N (1 - q^{-i} z^{-1})},$$

где $P_N(q, z)$ — полином.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feigin B., Frenkel E. Coinvariants of nilpotent subalgebras of the Virasoro algebra and partition identities. Adv. Sov. Math., Vol. 16, 1993, pp. 139–148 (hep-th/9301039).
2. Feigin B., Stoyanovsky A. Quasi-particles models for the representations of Lie algebras and geometry of flag manifold, hep-th/9308079, RIMS 942; Стояновский А. В., Фейгин Б. Л. Функциональные модели представлений алгебр токов и полубесконечные клетки Шуберта. Функц. анализ и его прил., **28**, вып. 1, 68–90 (1994).
3. Kedem R., Klassen T., McCoy B., Melzer E. Fermionic sum representations for conformal field theory characters. Phys. Lett. B, **307**, 68–76 (1993).
4. Пухликов А. В., Хованский А. Г. Теорема Римана–Роха для интегралов и сумм квази-полиномов по виртуальным многогранникам. Алгебра и анализ, **4**, 188–216 (1992).
5. Schilling A., Warnaar S. O. Supernomial coefficients, polynomial identities and q -series. q-alg/9701007, Ramanujan J., **2**, 459–494 (1998).
6. Warnaar S. O. The Andrews–Gordon identities and q -multinomial coefficients. q-alg/9601012, Comm. Math. Phys., **184**, 203–232 (1997).