Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Арнольд, Лагранжев грассманиан кватернионного гиперсимплектического пространства, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 1, 74–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa233>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:14:17

Лагранжев грассманиан кватернионного гиперсимплектического пространства*

© 2001. В. И. Арнольд

1. Гиперсимплектическое кватернионное пространство. *Гиперсимплектическое пространство* — это четномерное кватернионное векторное пространство, снабженное кватернионно-эрмитовой формой, которая невырождена и вещественная часть которой определяет квадратичную форму сигнатуры нуль. Такое пространство имеет три вещественные симплектические структуры — мнимые части эрмитовой:

$$\Omega(\xi, \eta) = S(\xi, \eta) + i\Omega_i(\xi, \eta) + j\Omega_j(\xi, \eta) + k\Omega_k(\xi, \eta).$$

Здесь $\xi \in \mathbb{H}^{2n}$, $\eta \in \mathbb{H}^{2n}$, $\Omega(\xi, \eta) \in \mathbb{H}$, $\Omega(\eta, \xi) = \overline{\Omega}(\xi, \eta)$, $\Omega(\lambda\xi, \eta) = \lambda\Omega(\xi, \eta)$, $\Omega(\xi, \lambda\eta) = \Omega(\xi, \eta)\overline{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{H}$ — кватернион.

Примером такой формы является *стандартная гиперсимплектическая структура*, заданная формулой $\Omega(\xi, \eta) = \langle x, w \rangle + \langle y, v \rangle$, где $\langle x, w \rangle = \sum x_s \overline{w}_s$ — стандартное эрмитово произведение в кватернионном векторном пространстве $\mathbb{H}^n$ и где $\xi = x \oplus y$, $\eta = v \oplus w$. В таком виде можно записать всякую гиперсимплектическую структуру.

Симметрическая вещественная форма S в $\mathbb{R}^{8n}$ и кососимметрические вещественные формы Ω_i , Ω_j , Ω_k связаны соотношениями

$$\Omega_i(\xi, \eta) = -S(i\xi, \eta), \quad \Omega_j(\xi, \eta) = -S(j\xi, \eta), \quad \Omega_k(\xi, \eta) = -S(k\xi, \eta).$$

Форма S инвариантна относительно умножения на кватернион нормы 1 обоих аргументов. Мы будем рассматривать $\mathbb{H}^n$ и $\mathbb{H}^{2n}$ как *левокватернионные* векторные пространства (умножая компоненты их векторов на кватернионы слева). Соответственно, *кватернионные линейные преобразования* задаются матрицами $(a_{k,l})$ из кватернионов, действующими на вектор с компонентами (x_r) справа:

$$(xa)_s = x_1 a_{1,s} + \dots + x_m a_{m,s}.$$

Отсюда видно, что $\langle x, wa \rangle = \langle xa^*, w \rangle$, где *кватернионно-сопряженная матрица* a^* получается из матрицы a транспонированием и кватернионным сопряжением.

2. Гиперлагранжевы подпространства гиперсимплектического пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Кватернионное n -мерное подпространство $2n$ -мерного гиперсимплектического пространства называется *гиперлагранжевым*, если на нем гиперсимплектическая структура тождественно равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ. На таком пространстве равна нулю симметрическая форма S и все три симплектические вещественные структуры Ω_i , Ω_j , Ω_k . Обратно, тождественное равенство нулю любой из этих четырех вещественных форм на кватернионном подпространстве половинной размерности в гиперсимплектическом

*Работа была частично поддержана грантом РФФИ 99-01-01109.

пространстве влечет гиперлагранжевость этого подпространства (вследствие указанных выше соотношений между формами).

ПРИМЕР. «Вертикальное подпространство» $x = 0$ и «горизонтальное подпространство» $y = 0$ стандартного гиперсимплектического пространства гиперлагранжевы. Действительно, в первом случае $x = v = 0$, а во втором $y = w = 0$, так что $\Omega = 0$ в обоих случаях.

Предположим, что гиперлагранжево подпространство трансверсально «вертикальному» подпространству.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Такое невертикальное гиперлагранжево пространство является графиком линейного кватернионного оператора, $y = xa$, причем оператор a антиэрмитов: $a^* + a = 0$ (и обратно, каждый антиэрмитов оператор в $\mathbb{H}^n$ задает гиперлагранжево пространство, трансверсальное вертикали в $\mathbb{H}^{2n}$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $y = xa$, $w = va$ находим $\Omega(\xi, \eta) = \langle x, w \rangle + \langle y, v \rangle = \langle x, va \rangle + \langle xa, v \rangle = \langle x(a^* + a), v \rangle$. Это произведение равно 0 при всех x и v , если и только если $a^* + a = 0$, что и требовалось доказать.

3. Гиперлагранжевы плоскости и гиперунитарная группа. Вместо координат x и y вектора ξ из $\mathbb{H}^{2n}$ введем координаты $X = x + y \in \mathbb{H}^n$, $Y = x - y \in \mathbb{H}^n$ (и аналогично для вектора η введем $V = v + w$, $W = v - w$), так что $x = (X + Y)/2$, $y = (X - Y)/2$; $v = (V + W)/2$, $w = (V - W)/2$.

В новых координатах стандартная гиперсимплектическая структура записывается в виде

$$\Omega(\xi, \eta) = [\langle X, V \rangle - \langle Y, W \rangle]/2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Гиперлагранжева плоскость пересекает «диагональ» $Y = 0$ только в нуле (и только там же пересекает «антидиагональ» $X = 0$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На диагонали $y = x$, $w = v$. Поэтому $S(\xi, \xi) = 2\langle x, x \rangle = 0$, только если $x = 0$. На антидиагонали $y = -x$, $w = -v$. Поэтому $S(\xi, \xi) = -2\langle x, x \rangle = 0$ только при $x = 0$.

Из доказанного предложения следует, что каждая гиперлагранжева плоскость является графиком кватернионного линейного оператора: $Y = Xa$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *График кватернионного линейного оператора является гиперлагранжевой плоскостью, если и только если оператор гиперунитарен: $aa^* = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На графике $Y = Xa$, $W = Va$; поэтому для любых $X \in \mathbb{H}^n$, $V \in \mathbb{H}^n$ выполняется условие $2\Omega(\xi, \eta) = \langle X, V \rangle - \langle Xa, Va \rangle$. Гиперлагранжевость графика ($\Omega \equiv 0$) эквивалентна сохранению кватернионно-эрмитова скалярного произведения оператором a . Иными словами, $\langle Xa, Va \rangle = \langle Xaa^*, V \rangle$; поэтому $\Omega \equiv 0$, если и только если $aa^* = 1$.

ТЕОРЕМА. *Многообразие гиперлагранжевых плоскостей стандартного гиперсимплектического пространства кватернионной размерности $2n$ вещественно диффеоморфно многообразию гиперунитарных матриц порядка n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диффеоморфизм сопоставляет матрице a плоскость $Y = Xa$, гиперлагранжеву по предложению 3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Многообразие гиперунитарных матриц n -го порядка является косым произведением сфер вещественных размерностей $4k - 1$ ($k = n, n - 1, \dots, 1$).

Соответствующий индексу Маслова трехмерный класс когомологий является индексом пересечения с подмногообразием гиперлагранжевых плоскостей, содержащих ненулевые вертикальные векторы (для которых $x = 0$).

В качестве трехмерного трансверсального подмногообразия можно взять образ орбиты действия группы $S^3 = SU(2)$ скалярных кватернионов нормы 1: при указанном выше диффеоморфизме эта группа начинает действовать (умножением компонент вектора в подходящем кватернионном базисе справа на кватернионы нормы единица) на многообразии гиперлагранжевых плоскостей.

Индекс пересечения равен n , подобно тому, как это происходит в вещественном случае, рассмотренном в [1]. Это следует из возможности кватернионной диагонализации гиперунитарной матрицы при помощи выбора эрмитово-ортонормированного кватернионного базиса и из связности многообразия всех таких базисов (ср. [2]). Комплексный случай (см. [3]) также заслуживает подробного топологического исследования обобщения индекса.

ТЕОРЕМА. *Группа $\mathbb{H}U(2)$ гиперунитарных матриц второго порядка есть двулистная универсальная накрывающая группы $SO(5)$ вращений евклидова пространства $\mathbb{R}^5$:*

$$(\mathbb{H}U(2) = \text{Spin}(5)) \rightarrow (SO(5) = \mathbb{H}U(2)/\pm 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $\mathbb{H}U(2)$ действует на кватернионной проективной прямой $\mathbb{H}P^1 = S^4$. Покажем, что это действие сохраняет некоторую метрику.

Воспользуемся аффинной кватернионной координатой $q = x_2^{-1}x_1$ на $\mathbb{H}P^1$ (где $(x_1, x_2) \in \mathbb{H}^2$ — однородные кватернионные координаты). Рассмотрим стереографическую проекцию плоскости $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H} = \{2q\}$ на сферу S^4 радиуса 1 в $\mathbb{R}^5$, касающуюся этой плоскости в точке 0. Двойка в выражении $2q$ — решающий момент доказательства (подобно двойке в формуле Родригеса для $SO(3)$).

ЛЕММА. *Стандартная метрика сферы инвариантна относительно действия матриц из $\mathbb{H}U(2)$ на сфере, заданного дробно-линейными преобразованиями кватернионов $q \mapsto (qb + d)^{-1}(qa + c)$.*

ПРИМЕР 1. Гиперунитарные диагональные матрицы ($b = c = 0$, $|a| = |d| = 1$) переводят q в $d^{-1}qa$. Так представляется любое вращение пространства $\mathbb{R}^4 = \{q\}$ вокруг точки $q = 0$. Мы получаем двулистное накрытие

$$(\{a, d\} = S^3 \times S^3 = \text{Spin}(4)) \rightarrow SO(4).$$

На сфере S^4 эти вращения действуют как все вращения, сохраняющие точку касания $q = 0$ с плоскостью $\mathbb{R}^4$.

ПРИМЕР 2. «Поворот» $g^t q = (\cos t + q \sin t)^{-1}(q \cos t - \sin t)$ сохраняет сферическую метрику. Например, это верно для $t = \pi/2$, когда $g^t q = -1/q$. На сфере преобразование g^t передвигает точку $q = 0$ в точку, соответствующую $q = -\tan t$ (на любом меньшем π расстоянии от исходной точки на сфере).

Явное выражение сферической метрики через координату q дается формулой $|ds| = 2|dq|/(1 + |q|^2)$ (следующей из элементарной геометрии стереографической проекции). Из этой формулы легко вывести сохранение метрики $|ds|$ гиперунитарными преобразованиями (достаточно проверить это в примерах 1 и 2).

Из доказанной леммы следует, что наша стереографическая проекция задает представление группы $\mathbb{H}U(2)$ вращениями сферы S^4 , так что мы построили отображение $\mathbb{H}U(2) \rightarrow SO(5)$. Образ этого отображения содержит все вращения

сферы относительно одной из точек (пример 1 выше), а также вращения, переводящие эту точку на любое расстояние от исходной (пример 2). Поэтому образ есть вся группа $SO(5)$. Ядро состоит из двух матриц, ± 1 , так как любая другая матрица из $\mathbb{H}U(2)$ сдвигает некоторые точки $\mathbb{H}P^1$. Теорема доказана (при помощи кватернионного аналога тангенса половинного угла, роль которого играет кватернион q ; соответствующая ему точка s сферы S^4 играет роль самого исходного угла). Этот метод доставляет также много рациональных точек на сфере S^7 : $x_1 = (1 - q^2)(1 + q^2)^{-1}$, $x_2 = 2q(1 + q^2)^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $n > 2$ гиперунитарная группа $\mathbb{H}U(n)$ не спинорная: она имеет тип C_n , а не B_n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Функц. анализ и его прил., **1**, вып. 1, 1–14 (1967). 2. Арнольд В. И. Труды МИАН, **224**, 56–67 (1999). 3. Арнольд В. И. Функц. анализ и его прил., **34**, вып. 3, 63–65 (2000).

Математический институт им. В. А. Стеклова,
CEREMADE, Université Paris-Dauphine

Поступило в редакцию
31 октября 2000 г.

УДК 517.98+517.5

О плотности подпространств аналитических векторов замкнутого оператора в банаховом пространстве*

© 2001. М. Л. ГОРБАЧУК, Ю. Г. МОКРОУСОВ

1. Пусть A — замкнутый оператор с плотной областью определения $\mathcal{D}(A)$ в комплексном банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ с нормой $\|\cdot\|$. Обозначим через $C^\infty(A)$ пространство бесконечно дифференцируемых векторов оператора A :

$$C^\infty(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n) \quad (\mathbb{N}_0 = 0, 1, 2, \dots).$$

Для числа $\beta \geq 0$ положим

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \{x \in C^\infty(A) \mid \exists \alpha > 0 \exists c > 0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \|A^k x\| \leq c \alpha^k k^{k\beta}\},$$

$$\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \{x \in C^\infty(A) \mid \forall \alpha > 0 \exists c > 0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \|A^k x\| \leq c \alpha^k k^{k\beta}\}.$$

В первом из определенных выше множеств постоянные α и c зависят от x , а во втором константа c зависит также от α . Линейные пространства $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ и $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ снабжаются топологиями соответственно индуктивного и проективного пределов банаховых пространств

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}^\alpha(A) = \{x \in C^\infty(A) \mid \exists c > 0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \|A^k x\| \leq c \alpha^k k^{k\beta}\}, \quad \alpha > 0,$$

$$\|x\|_{\mathfrak{G}_{(\beta)}^\alpha(A)} = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{\|A^k x\|}{\alpha^k k^{k\beta}}.$$

*Работа поддержана Совместным грантом CRDF и правительства Украины UM 1-2090 и Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (проект 1.4162).