Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Л. Горбачук, Ю. Г. Мокроусов, О плотности подпространств аналитических векторов замкнутого оператора в банаховом пространстве, *Функц. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 1, 77–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa234>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 13:32:55

сферы относительно одной из точек (пример 1 выше), а также вращения, переводящие эту точку на любое расстояние от исходной (пример 2). Поэтому образ есть вся группа $SO(5)$. Ядро состоит из двух матриц, ± 1 , так как любая другая матрица из $\mathbb{H}U(2)$ сдвигает некоторые точки $\mathbb{H}P^1$. Теорема доказана (при помощи кватернионного аналога тангенса половинного угла, роль которого играет кватернион q ; соответствующая ему точка s сферы S^4 играет роль самого исходного угла). Этот метод доставляет также много рациональных точек на сфере S^7 : $x_1 = (1 - q^2)(1 + q^2)^{-1}$, $x_2 = 2q(1 + q^2)^{-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $n > 2$ гиперунитарная группа $\mathbb{H}U(n)$ не спинорная: она имеет тип C_n , а не B_n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Функц. анализ и его прил., **1**, вып. 1, 1–14 (1967). 2. Арнольд В. И. Труды МИАН, **224**, 56–67 (1999). 3. Арнольд В. И. Функц. анализ и его прил., **34**, вып. 3, 63–65 (2000).

Математический институт им. В. А. Стеклова,
CEREMADE, Université Paris-Dauphine

Поступило в редакцию
31 октября 2000 г.

УДК 517.98+517.5

О плотности подпространств аналитических векторов замкнутого оператора в банаховом пространстве*

© 2001. М. Л. ГОРБАЧУК, Ю. Г. МОКРОУСОВ

1. Пусть A — замкнутый оператор с плотной областью определения $\mathcal{D}(A)$ в комплексном банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ с нормой $\|\cdot\|$. Обозначим через $C^\infty(A)$ пространство бесконечно дифференцируемых векторов оператора A :

$$C^\infty(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n) \quad (\mathbb{N}_0 = 0, 1, 2, \dots).$$

Для числа $\beta \geq 0$ положим

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \{x \in C^\infty(A) \mid \exists \alpha > 0 \exists c > 0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \|A^k x\| \leq c \alpha^k k^{k\beta}\},$$

$$\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \{x \in C^\infty(A) \mid \forall \alpha > 0 \exists c > 0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \|A^k x\| \leq c \alpha^k k^{k\beta}\}.$$

В первом из определенных выше множеств постоянные α и c зависят от x , а во втором константа c зависит также от α . Линейные пространства $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ и $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ снабжаются топологиями соответственно индуктивного и проективного пределов банаховых пространств

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}^\alpha(A) = \{x \in C^\infty(A) \mid \exists c > 0 \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \|A^k x\| \leq c \alpha^k k^{k\beta}\}, \quad \alpha > 0,$$

$$\|x\|_{\mathfrak{G}_{(\beta)}^\alpha(A)} = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{\|A^k x\|}{\alpha^k k^{k\beta}}.$$

*Работа поддержана Совместным грантом CRDF и правительства Украины UM 1-2090 и Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (проект 1.4162).

Таким образом,

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \operatorname{ind} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A), \quad \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \operatorname{proj} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A).$$

Заметим, что для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(\lambda A + \mu I) \text{ при } \beta \geq 0, \quad \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \mathfrak{G}_{(\beta)}(\lambda A + \mu I) \text{ при } \beta > 0$$

($\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел, I — тождественный оператор в $\mathfrak{B}$). Пространства $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$, $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ и $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ называются пространствами соответственно аналитических векторов [1], целых векторов [2] и целых векторов экспоненциального типа [3] оператора A .

В конкретном случае, когда $\mathfrak{B} = C[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, $A = d/dx$, $\mathcal{D}(A) = C^1[a, b]$, пространство $C^{\infty}(A)$ совпадает с множеством $C^{\infty}([a, b])$ всех бесконечно дифференцируемых на $[a, b]$ функций, а $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$, $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ и $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ суть не что иное, как пространства соответственно всех аналитических на $[a, b]$ функций, всех целых функций и всех целых функций экспоненциального типа. Пространство $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ ($\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$) с $\beta > 1$ известно как класс Жевре типа Румье (Берлинга). Если же $\mathfrak{B} = L_2(\mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел) и A — замыкание оператора $-d^2/dx^2 + x^2$, заданного на множестве $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ всех финитных бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций, то, как показано в [4], $C^{\infty}(A) = S$, а $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = S_{\beta/2}^{\beta/2}$, $\beta \geq 1$, где S — пространство Шварца, а $S_{\beta/2}^{\beta/2}$ — соответствующее пространство Гельфанда–Шилова из [5].

В приведенных примерах все рассмотренные пространства плотны в $\mathfrak{B}$. В общем случае это не так. Поэтому возникает вопрос, при каких условиях на оператор A и число β имеет место равенство $\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}$ или $\overline{\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)} = \mathfrak{B}$. Этот вопрос интересовал многих математиков в различных более частных ситуациях (по этому поводу см. [6, 7]). В [8] для $\beta > 1$ сформулированная задача решена в терминах расположения спектра оператора A и оценки роста его резольвенты при подходе к спектру. Нас будет интересовать случай $0 \leq \beta \leq 1$. Следует отметить особую важность этого случая в теории приближения функций (см. [9]) и вопросах корректной разрешимости задачи Коши для дифференциально-операторных уравнений в различных пространствах, состоящих из аналитических функций [10].

2. Для чисел $c > 0$, $R > 0$, $\gamma \in [0, 1)$ положим

$$K_R = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq R\}, \quad \Pi_{\gamma, c} = \{\lambda \in \mathbb{C} : -c |\operatorname{Re} \lambda|^{\gamma} \leq \operatorname{Im} \lambda \leq c |\operatorname{Re} \lambda|^{\gamma}\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть A — замкнутый оператор в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, $\mathcal{D}(A) = \mathfrak{B}$ и резольвента $R_z(A) = (A - zI)^{-1}$ существует в области $\mathbb{C} \setminus (K_R \cup \Pi_{\gamma, c})$ при некоторых $c > 0$, $R > 0$, $\gamma \in [0, 1)$ и там удовлетворяет оценке

$$\|R_z(A)\| \leq M(1 + |z|)^N,$$

где M, N — положительные константы. Тогда для произвольного $\beta > 0$

$$\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}.$$

Заметим, что в условиях этой теоремы тем более $\overline{\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)} = \mathfrak{B}$.

Главным моментом в доказательстве теоремы 1 является установление того факта, что при любом $\beta > 0$ множество элементов вида

$$\int_{\Gamma} h_{\varepsilon}(z) R_z(A) x \, dz, \quad \varepsilon \in (0, \infty), \, x \in C^{\infty}(A),$$

принадлежит $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ и плотно в $\mathfrak{B}$. Здесь $h_{\varepsilon}(z) = h(\varepsilon z)$, $h(z)$ — целая функция, удовлетворяющая неравенству

$$|h(z)| \leq c e^{-a|\operatorname{Re} z|^{1/\beta} + b|\operatorname{Im} z|^{1/\beta}} \quad (1)$$

с некоторыми положительными константами c , a и b , а соответствующим образом выбранный контур Γ лежит в резольвентном множестве оператора A . Существование нетривиальной целой функции $h(z)$ со свойством (1) доказано в [5].

СЛЕДСТВИЕ 1. Если A — генератор однопараметрической группы ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{B}$ класса C_0 , то $\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}$ при любом $\beta > 0$.

В самом деле, в этом случае оператор iA , как показано в [6], удовлетворяет условиям теоремы 1 с $\gamma = 0$, $N = -1$.

Заметим, что теорема 1, вообще говоря, не верна при $\beta = 0$. Можно построить пример оператора, удовлетворяющего условиям этой теоремы и даже следствия 1, для которого $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \{0\}$.

3. Напомним, что полугруппа линейных операторов $U(t)$, $t \geq 0$, класса C_0 называется аналитической с углом $\pi/2$, если она допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$, непрерывное в нуле по любому лучу, исходящему из начала координат и лежащему в этой полуплоскости. Известно [6], что спектр генератора A такой полугруппы лежит в $(-\infty, \omega]$, где ω — некоторое действительное число. Положим

$$M(s) = \sup_{|\operatorname{Im} \lambda| \geq s} \|R_{\lambda}(A)\|.$$

ТЕОРЕМА 2. (1) Пусть A — генератор аналитической полугруппы $U(t)$, $t \geq 0$, с углом $\pi/2$. Тогда $\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}$ для любого $\beta > 0$.

(2) Существуют аналитические полугруппы с углом $\pi/2$, такие, что $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \{0\}$. Однако если аналитическая полугруппа $U(t)$, $t \geq 0$, с углом $\pi/2$ такова, что

$$\int_0^1 \ln \ln M(s) \, ds < \infty,$$

то $\overline{\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)} = \mathfrak{B}$.

4. Пусть теперь A — произвольный замкнутый оператор в $\mathfrak{B}$, для которого $\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}$, $0 \leq \beta \leq 1$. Определим оператор-функцию $U(z)$, $z \in \mathbb{C}$, формулой

$$U(z)x = e^{zA}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k A^k x}{k!}. \quad (2)$$

Нетрудно показать, что для каждого $x \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$, $0 \leq \beta \leq 1$, ряд в (2) сходится в топологии пространства $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ равномерно по z на любом компакте из $\mathbb{C}$. Он также сходится в $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$, но уже при $\beta \in [0, 1)$.

ТЕОРЕМА 3. *Оператор-функция $U(z)$, $z \in \mathbb{C}$, определенная формулой (2), является аналитической группой в пространстве $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ при $0 \leq \beta \leq 1$ и в пространстве $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ при $0 \leq \beta < 1$.*

Если оператор A , фигурирующий в теореме 3, является генератором полугруппы класса C_0 и $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \mathfrak{B}$, $0 \leq \beta \leq 1$, то, каков бы ни был сегмент $[0, T]$, $T > 0$, любое решение уравнения

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t), \quad t \in [0, T],$$

можно приблизить равномерно на этом промежутке решениями, являющимися целыми вектор-функциями. Последние же равномерно приближаются частными суммами ряда (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Nelson E. Ann. of Math., **70**, No. 3, 572–615 (1959).
2. Goodman R. Trans. Amer. Math. Soc., **143**, No. 3, 55–76 (1969).
3. Радыно Я. В. Докл. АН БССР, **27**, No. 9, 791–793 (1983).
4. Кашипровский А. И. Функц. анализ и его прил., **14**, вып. 2, 60–61 (1980).
5. Гельфанд И. М., Шилев Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. Физматгиз, М., 1958.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Гармонический анализ. Самосопряженность. Мир, М., 1978.
7. Горбачук В. И., Князюк А. В. УМН, **44**, No. 3, 55–91 (1989).
8. Beals R. J. Funct. Anal., **10**, No. 3, 300–308 (1972).
9. Горбачук М. Л., Горбачук В. И. Укр. матем. ж., **47**, No. 5, 616–628 (1995).
10. Горбачук М. Л. Математичні методи та фізико-механічні поля, **41**, No. 2, 7–12 (1998).

Институт математики НАН Украины
Национальный технический университет Украины «КПИ»

Поступило в редакцию
6 августа 1999 г.

УДК 512.643.5

Асимптотика наименьших собственных значений матриц типа Гильберта*

© 2001. Г. А. Калябин

1. Рассмотрим семейство матриц $H_n = H_n(\beta, \theta)$, $\beta > 0$, $\theta > 0$, типа Гильберта

$$H_n = \|h_{j,k}\|, \quad h_{j,k} = h_{j,k}(\beta, \theta) := \frac{\beta^{j+k}}{j+k+\theta}, \quad j, k \in \{0, 1, \dots, n\},$$

являющихся матрицами Грама системы степеней $\{1, x, \dots, x^n\}$ на интервале $[0, \beta]$ с весом $w(x) = x^{\theta-1}\beta^{-\theta}$ (см. [1, § 10.1]) и играющих важную роль в различных задачах аппроксимации и экстраполяции.

Целью настоящей работы является доказательство следующей асимптотической формулы для наименьших собственных значений матриц $H_n(\beta, \theta)$.

ТЕОРЕМА. *При $n \rightarrow \infty$ имеет место предельное соотношение*

$$\lambda_{\min}(H_n(\beta, \theta)) = K\sqrt{n}\rho^{-4n}(1 + o(1)),$$

*Работа была поддержана грантами Европейского сообщества (INTAS-881-94) и Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ-99-01-00868).