Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Калябин, Асимптотика наименьших собственных значений матриц типа Гильберта, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 1, 80–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa235>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 14:09:53

ТЕОРЕМА 3. *Оператор-функция $U(z)$, $z \in \mathbb{C}$, определенная формулой (2), является аналитической группой в пространстве $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ при $0 \leq \beta \leq 1$ и в пространстве $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ при $0 \leq \beta < 1$.*

Если оператор A , фигурирующий в теореме 3, является генератором полугруппы класса C_0 и $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \mathfrak{B}$, $0 \leq \beta \leq 1$, то, каков бы ни был сегмент $[0, T]$, $T > 0$, любое решение уравнения

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t), \quad t \in [0, T],$$

можно приблизить равномерно на этом промежутке решениями, являющимися целыми вектор-функциями. Последние же равномерно приближаются частными суммами ряда (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Nelson E. Ann. of Math., **70**, No. 3, 572–615 (1959).
2. Goodman R. Trans. Amer. Math. Soc., **143**, No. 3, 55–76 (1969).
3. Радыно Я. В. Докл. АН БССР, **27**, No. 9, 791–793 (1983).
4. Кашипровский А. И. Функц. анализ и его прил., **14**, вып. 2, 60–61 (1980).
5. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. Физматгиз, М., 1958.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Гармонический анализ. Самосопряженность. Мир, М., 1978.
7. Горбачук В. И., Князюк А. В. УМН, **44**, No. 3, 55–91 (1989).
8. Beals R. J. Funct. Anal., **10**, No. 3, 300–308 (1972).
9. Горбачук М. Л., Горбачук В. И. Укр. матем. ж., **47**, No. 5, 616–628 (1995).
10. Горбачук М. Л. Математичні методи та фізико-механічні поля, **41**, No. 2, 7–12 (1998).

Институт математики НАН Украины
Национальный технический университет Украины «КПИ»

Поступило в редакцию
6 августа 1999 г.

УДК 512.643.5

Асимптотика наименьших собственных значений матриц типа Гильберта*

© 2001. Г. А. Калябин

1. Рассмотрим семейство матриц $H_n = H_n(\beta, \theta)$, $\beta > 0$, $\theta > 0$, типа Гильберта

$$H_n = \|h_{j,k}\|, \quad h_{j,k} = h_{j,k}(\beta, \theta) := \frac{\beta^{j+k}}{j+k+\theta}, \quad j, k \in \{0, 1, \dots, n\},$$

являющихся матрицами Грама системы степеней $\{1, x, \dots, x^n\}$ на интервале $[0, \beta]$ с весом $w(x) = x^{\theta-1}\beta^{-\theta}$ (см. [1, § 10.1]) и играющих важную роль в различных задачах аппроксимации и экстраполяции.

Целью настоящей работы является доказательство следующей асимптотической формулы для наименьших собственных значений матриц $H_n(\beta, \theta)$.

ТЕОРЕМА. *При $n \rightarrow \infty$ имеет место предельное соотношение*

$$\lambda_{\min}(H_n(\beta, \theta)) = K\sqrt{n}\rho^{-4n}(1 + o(1)),$$

*Работа была поддержана грантами Европейского сообщества (INTAS-881-94) и Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ-99-01-00868).

где использованы обозначения

$$\rho = \rho(\beta) := \sqrt{\beta^{-1}} + \sqrt{1 + \beta^{-1}}, \quad K = K(\beta, \theta) := \frac{8\pi\sqrt{2\pi}(1 + \beta)^{1/4}}{\beta^{\theta+1/2}\rho^{2\theta+2}}. \quad (1)$$

Отметим, что (более грубый) результат $(\ln \lambda_{\min}(H_n(\beta, \theta)))/n \rightarrow -4 \ln \rho(\beta)$ при $n \rightarrow \infty$ был анонсирован автором в [4] и доказан в [5].

2. Доказательство теоремы. Пусть $U^{(n)} = U^{(n)}(\beta, \theta) := \|u_{j,k}^{(n)}(\beta, \theta)\|$ — матрицы, обратные к матрицам Гильберта $H_n = H_n(\beta, \theta)$.

Будет установлено даже несколько больше, чем утверждается в теореме, а именно

$$\frac{1}{\lambda_{\min}(H_n(\beta, \theta))} = \lambda_{\max}(U^{(n)}(\beta, \theta)) \approx \text{tr } U^{(n)}(\beta, \theta) \approx \frac{\rho^{4n}}{K\sqrt{n}}. \quad (2)$$

Для исследования матриц $U^{(n)}$ воспользуемся известной формулой для так называемых определителей Коши (см. [2, §14]):

$$\det \left\| \frac{1}{x_r + y_s} \right\| = \prod_{r>s} \prod_s (x_r - x_s)(y_r - y_s) \prod_r \prod_s (x_r + y_s)^{-1}.$$

Выбирая здесь $x_r = y_r = (r + \theta)/2$, $r \in \{0, \dots, n\}$, получаем для $\beta = 1$

$$\begin{aligned} \Delta := \det(H_n(1, \theta)) &= \left(\prod_{r=s+1}^n \prod_{s=0}^{n-1} (r-s)^2 \right) \prod_r \prod_s (r+s+\theta)^{-1} \\ &= \left(\prod_s \prod_{r \neq s} |r-s| \right) \prod_r \prod_s (r+s+\theta)^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Миноры $M_{j,k}$ этой матрицы отличаются от ее определителя Δ только тем, что индексы r, s в двойных произведениях не принимают соответственно значений j, k . Поэтому в отношении $M_{j,k}/\Delta$ остаются только множители, в которых $r = j$, $s = k$, что приводит к явной формуле для элементов матрицы $\|u_{j,k}^{(n)}(\beta, \theta)\|$ для случая $\beta = 1$:

$$u_{j,k}^{(n)}(1, \theta) = \frac{(-1)^{j+k} \varphi_j^{(n)} \varphi_k^{(n)}}{j+k+\theta}, \quad (4)$$

$$\varphi_j^{(n)} = \varphi_j^{(n)}(\theta) := \frac{(j+\theta)(j+1+\theta) \cdots (j+n+\theta)}{(n-j)!j!} = \frac{\Gamma(j+\theta+n+1)}{\Gamma(j+\theta)\Gamma(n-j+1)\Gamma(j+1)}.$$

Разумеется, здесь и далее $\Gamma(x)$ обозначает классическую Γ -функцию Эйлера. Учитывая, кроме того, что

$$H_n(\beta, \theta) = \text{diag}(1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^m) H_n(1, \theta) \text{diag}(1, \beta, \beta^2, \dots, \beta^m),$$

получаем для любого $\beta > 0$

$$u_{j,k}^{(n)} = u_{j,k}^{(n)}(\beta, \theta) = \frac{(-1)^{j+k}}{j+k+\theta} v_j v_k, \quad v_k := v_k^{(n)}(\beta, \theta) := \beta^{-k} \varphi_k^{(n)}(\theta). \quad (5)$$

3. Отметим, что матрица W с элементами $w_{j,k} = (-1)^{j+k} v_j v_k$ есть матрица ранга 1 и вектор x с координатами $x_j := (-1)^j v_j$ есть ее собственный вектор,

отвечающий собственному значению $\lambda_1 = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_1^2$. Другим собственным значением матрицы W является $\lambda_2 = 0$, а соответствующее собственное подпространство состоит из всех векторов, ортогональных вектору x . Будет установлено, что у чисел v_k имеется резко выраженный (шириной порядка $\sqrt{n}$) максимум, в силу чего множитель $1/(j+k+\theta)$ в (5) можно считать «практически постоянным». Далее дается реализация этой эвристической идеи.

ЛЕММА. При любых $\beta > 0$, $\theta > 0$ и $n \rightarrow \infty$ для чисел v_k выполняется соотношение

$$v_k = \Phi \rho^{2n} \left(\exp \left(-\sigma^* n \left(\frac{k}{n} - \alpha^* \right)^2 \right) + \frac{\delta}{n} \right), \quad (6)$$

где

$$\Phi = \Phi(\beta, \theta) := \frac{\beta^{\theta/2} \rho^{\theta+1}(\beta)}{2\pi}, \quad (7)$$

$$\sigma^* = \sigma^*(\beta) := \frac{(1+\beta)^{3/2}}{\beta}, \quad \alpha^* = \alpha^*(\beta) := \frac{1}{\sqrt{1+\beta}}$$

а числа $\delta = \delta_{k,n,\beta,\theta}$ равномерно ограничены при $0 \leq k \leq n$.

4. Доказательство леммы. Непосредственно из определяющих формул (4) и (5) явствует, что отношение

$$\frac{v_{s+1}}{v_s} = \frac{(s+n+1+\theta)(n-s)}{\beta(s+\theta)(s+1)} = \frac{(\alpha+1+(1+\theta)/n)(1-\alpha)}{\beta(\alpha+\theta/n)(\alpha+1/n)}, \quad \alpha := \frac{s}{n},$$

строго убывает при увеличении s , и поэтому v_s для достаточно больших n возрастает при $s < s(n, \beta, \theta)$ и убывает при $s > s(n, \beta, \theta)$. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что при фиксированных β, θ для произвольного $\varepsilon > 0$ при всех $n > N_\varepsilon$

$$s/n < \alpha^* - \varepsilon \implies v_{s+1} > (1+2\varepsilon/\beta)v_s, \quad s/n > \alpha^* + \varepsilon \implies v_{s+1} < (1-2\varepsilon/\beta)v_s.$$

Следовательно, при всех достаточно больших n максимальное значение v_s достигается, когда $\alpha = s/n$ принадлежит интервалу $(\alpha^* - \varepsilon, \alpha^* + \varepsilon)$.

Чтобы найти это максимальное значение, мы переходим в (4) и (5) к логарифмам и подставляем $s = \alpha n$, что приводит к равенству

$$\ln v_{\alpha n} = -\alpha n \ln \beta + \ln \Gamma((\alpha+1)n+1+\theta) - \ln \Gamma(\alpha n + \theta) - \ln \Gamma((1-\alpha)n+1) - \ln \Gamma(\alpha n + 1). \quad (8)$$

Далее, при $A > 0$ и $n \rightarrow +\infty$ легко проверяется справедливость следующего соотношения, вытекающего из классической формулы Стирлинга и ее обобщающего:

$$\ln \Gamma(An+B) = An \ln n + A(\ln A - 1)n + \left(B - \frac{1}{2}\right)(\ln n + \ln A) + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{R_n(A, B)}{n}. \quad (9)$$

Следует подчеркнуть, что в этой формуле $R_n(A, B)$ есть величина, равномерно ограниченная при $A > A_0 > 0$, $B > -B_0$, $n > N(A, B)$. Подставляя (9) в (8) (важно заметить, что при этом все слагаемые, содержащие $n \ln n$ и $\ln n$, полностью взаимно сокращаются), получаем

$$\ln v_{\alpha n} = nF(\alpha, \beta) + \theta(\ln(1+\alpha) - \ln \alpha) + \frac{1}{2}(\ln(1+\alpha) - \ln(1-\alpha)) - \ln 2\pi + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (10)$$

где через $F(\alpha, \beta)$ обозначена функция

$$F(\alpha, \beta) := (\alpha + 1) \ln(\alpha + 1) - (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha) - 2\alpha \ln \alpha - \alpha \ln \beta. \quad (11)$$

Для нахождения максимума функции $F(\alpha, \beta)$ на отрезке $[0, 1]$ (при фиксированном $\beta > 0$) вычисляем первую и вторую производные

$$\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \ln(\alpha + 1) + \ln(1 - \alpha) - 2 \ln \alpha - \ln \beta, \quad \frac{\partial^2 F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} = -\frac{2}{\alpha(1 - \alpha^2)}. \quad (12)$$

Условие $\partial F(\alpha, \beta)/\partial \alpha = 0$ равносильно уравнению $(1 - \alpha^2) = \beta \alpha^2$, решением которого, лежащим в интервале $(0, 1)$, является (как естественно можно было бы ожидать) число $\alpha^* = (1 + \beta)^{-1/2}$ (см. (7)) в силу чего с учетом определения (1) числа $\rho(\beta)$

$$\begin{aligned} \max\{F(\alpha, \beta) : 0 \leq \alpha \leq 1\} &= F(\alpha^*, \beta) = \alpha^* \ln \frac{1 - (\alpha^*)^2}{(\alpha^*)^2 \beta} + \ln \frac{1 + \alpha^*}{1 - \alpha^*} \\ &= \ln \frac{\sqrt{1 + \beta} + 1}{\sqrt{1 + \beta} - 1} = 2 \ln \rho(\beta). \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая, что вторая производная (по α) функции $F(\alpha, \beta)$ при $\alpha = \alpha^*$ в силу (12) и (7) равна $-2\sigma^*$, $\sigma^* = \sigma^*(\beta) := (1 + \beta)^{3/2} \beta^{-1}$, мы с учетом формулы (13) получаем по формуле Тейлора равенство

$$F(\alpha, \beta) = 2 \ln \rho(\beta) - \sigma^*(\alpha - \alpha^*)^2(1 + \delta(\alpha)(\alpha - \alpha^*)), \quad (14)$$

где величина $\delta(\alpha)$ ограничена на всем отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$. Всегда можно подобрать такие натуральные s_n , что $|s_n/n - \alpha^*| \leq 1/n$, и тем самым обеспечить неравенство $F(s_n/n, \beta) - 2 \ln \rho(\beta) \leq c\beta/n^2$. Таким образом, мы можем заключить, что

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq s \leq n} \ln v_s &= \ln v_{s_n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 2n \ln \rho(\beta) + \theta \ln \frac{1 + \alpha^*}{\alpha^*} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \alpha^*}{1 - \alpha^*} - \ln 2\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \ln \Phi(\beta, \theta) + 2n \ln \rho(\beta) + O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

а это соответствует доказываемому соотношению (6), поскольку из определения чисел α^* , Φ (см. (7)) и $\rho(\beta)$ (см. (1)) вытекают тождества

$$\left(\frac{1 + \alpha^*}{\alpha^*}\right)^\theta \left(\frac{1 + \alpha^*}{1 - \alpha^*}\right)^{1/2} = \beta^{\theta/2} \rho^{\theta+1}.$$

В силу асимптотической формулы (10) для элементов и с учетом равенства (14) мы имеем при $n \rightarrow \infty$ и любом k , расположенном в промежутке $L_n := (n\alpha^* - \sqrt{n} \ln n, n\alpha^* + \sqrt{n} \ln n)$,

$$v_k = \Phi \rho^{2n} \left(\exp \left(-n\sigma^* \left(\frac{k}{n} - \alpha^* \right)^2 \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

и, следовательно, номер s_n^* максимального из всех элементов v_k расположен в L_n . Учитывая, кроме того, что числа v_s строго возрастают при $s < s_n^*$ и строго убывают при $s > s_n^*$, мы завершаем доказательство леммы.

5. Завершение доказательства теоремы. Из определяющих формул (4), (5) и доказанного асимптотического равенства (6) явствует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} U^{(n)} &:= \sum_{k=0}^n u_{k,k}^{(n)} \approx \sum_{k \in L_n} \frac{v_k^2}{2k + \theta} \approx \frac{\Phi^2 \rho^{4n}}{2\alpha^* n} \sum_{k \in L_n} \exp\left(-2n\sigma^* \left(\frac{k}{n} - \alpha^*\right)^2\right) \\ &\approx \frac{\Phi^2 \rho^{4n}}{2\alpha^* n} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma^* t^2} dt \approx \frac{\Phi^2 \rho^{4n}}{2\alpha^*} \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma^* n}}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь мы представили интеграл как предел (при $n \rightarrow \infty$) интегральных сумм, соответствующих выбору точек разбиения $t_{k,n} := \sqrt{n}(k/n - \alpha^*)$, $k \in L_n$, и приняли во внимание экспоненциальную малость v_k вне L_n .

Сопоставление (15) с определением (7) чисел Φ , σ^* , α^* и константы K (см. (1)) приводит к асимптотической формуле (2) для следа матрицы $U^{(n)}(\beta, \theta)$.

Наконец, введем в рассмотрение вектор y с координатами $y_k = (-1)^k v_k$, $k \in L_n$, $y_k = 0$, $k \notin L_n$. Для этого вектора непосредственно из определения (см. (4), (5)) вытекает справедливость равенств

$$(y, y) = \sum_{k \in L_n} v_k^2, \quad (U^{(n)} y, y) = \sum_{k \in L_n} \sum_{j \in L_n} \frac{v_k^2 v_j^2}{j + k + \theta},$$

и, следовательно, снова в силу (15),

$$\lambda_{\max}(U^{(n)}(\beta, \theta)) \geq \frac{(U^{(n)} y, y)}{(y, y)} \geq \frac{1}{2(\alpha^* n + \sqrt{n} \ln n) + \theta} \sum_{j \in L_n} v_j^2 \approx \operatorname{tr} U^{(n)}(\beta, \theta),$$

откуда вытекает асимптотическая формула (2) для $\lambda_{\max}(U^{(n)}(\beta, \theta))$, и, таким образом, теорема доказана полностью.

В заключение отметим, что для простого и важного случая $\beta = \theta = 1$ в качестве следствия получаем асимптотическую формулу

$$\lambda_{\min}\left(\left\|\frac{1}{j+k+1}\right\|_{j,k=0}^n\right) = 2^{15/4} \pi^{3/2} \sqrt{n} (\sqrt{2} - 1)^{4(n+1)} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

Автор выражает глубокую благодарность участникам Семинара по теории функций МИРАН под руководством С. М. Никольского, Л. Д. Кудрявцева и О. В. Бесова, Семинара МФТИ по спектральным задачам под руководством В. Б. Лидского, а также С. А. Теляковскому и В. И. Буренкову за полезную дискуссию и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Наука, М., 1966.
2. Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. ИЛ, М., 1948.
3. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. Наука, М., 1965.
4. Kalyabin G. A. In: Abstracts of the Annual Congress of German Mathematical Society, University of Jena, Germany, October 19–24, 1997, p. 23.
5. Kalyabin G. A. In: Proceedings of Razmadze Mathematical Institute, Vol. 119, Tbilisi, 1999, pp. 85–92.
6. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Мир, М., 1989.