Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Лившиц, О непрерывном почти наилучшем приближении функций в пространстве $C[0, 1]$, *Функц. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 1, 85–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa236>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 16:56:34

УДК 517.9

О непрерывном почти наилучшем приближении функций в пространстве $C[0, 1]$

© 2001. Е. Д. Лившиц

Рассматривается задача о почти наилучшем приближении функций в пространстве $C[0, 1]$. Пусть $\varepsilon > 0$. Напомним, что *оператором почти наилучшего приближения*, или ε -*проекцией* элемента $x \in C[0, 1]$ на множество $L \subset C[0, 1]$, называется многозначное отображение

$$x \mapsto P_{L,\varepsilon}(x) = \{z \in L : \|x - z\| \leq \rho(x, L) + \varepsilon\},$$

где $\rho(x, L) = \inf_{y \in L} \|x - y\|$ — расстояние от x до L . При $\varepsilon = 0$ оператор $P_{L,\varepsilon}$ является оператором метрической проекции. Отображение $G: x \mapsto z \in P_{L,\varepsilon}$ называется ε -*выборкой* (из оператора почти наилучшего приближения); в случае его непрерывности G называют *непрерывной ε -выборкой*.

В 1859 г. П. Л. Чебышёв [1] отметил, что множество $R_{m,n}$ алгебраических рациональных дробей $R_{m,n} = \left\{ \frac{a_m x^m + \dots + a_0}{b_n x^n + \dots + b_0}, a_i, b_j \in \mathbb{R} \right\}$ является множеством существования и единственности (как говорят сейчас, чебышёвским множеством) в $C[0, 1]$. Мэли и Вицгилом [3] было показано, что метрическая проекция на $R_{m,n}$ разрывна. Тем не менее, как установил С. В. Конягин [2], для любого $\varepsilon > 0$ на $R_{m,n}$ существует непрерывная ε -выборка.

Ниже будет показано, что непрерывная ε -выборка на множество L существует в случае, когда L принадлежит некоторому классу множеств, включающему в себя, в частности, множество алгебраических рациональных дробей и множество кусочно-линейных функций.

Пусть $n \geq 2$, $m \geq 0$. Рассмотрим непустое открытое множество $D \subset [0, 1]^{n-1}$ и множество $L = \text{Im } F$, где $F: D \times \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow C[0, 1]$ — некоторое непрерывное и инъективное отображение.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим отображение $Y_{\varepsilon,L}: C[0, 1] \times D \rightarrow 2^{\mathbb{R}^{m+1}}$, положив для $f \in C[0, 1]$ и $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$

$$\begin{aligned} Y_{\varepsilon,L}(f, x_1, \dots, x_{n-1}) \\ = \{(y_0, \dots, y_m) : \|F(x_1, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_m) - f\| < \rho(f, L) + \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Определим K как класс множеств L , удовлетворяющих следующим условиям:

(i) для любых $\varepsilon > 0$, функции $f \in C[0, 1]$ и набора $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$ множество $Y_{\varepsilon,L}(f, x_1, \dots, x_{n-1})$ ограничено и выпукло;

(ii) для произвольных $f \in C[0, 1]$, $\varepsilon > 0$ и целого k , $0 \leq k \leq n-2$, при любых действительных $x_1, \dots, x_k$ множество, состоящее из таких x_{k+1} , что найдутся $(x_{k+2}, \dots, x_{n-1})$, при которых $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$, $Y_{\varepsilon,L}(f, x_1, \dots, x_{n-1}) \neq \emptyset$, связно в $\mathbb{R}$ (пустое множество считается связным);

(iii) отображение $Y_{\varepsilon,L}$ непрерывно во всех точках, где $Y_{\varepsilon,L}(f, x_1, \dots, x_{n-1}) \neq \emptyset$ (в образе рассматривается хаусдорфова метрика).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $L \in K$ и $\varepsilon > 0$; тогда существует отображение $G \in C(C[0, 1], L)$ (непрерывная ε -выборка), такое, что для любой функции $f \in$

$C[0, 1]$ справедливо неравенство

$$\|G(f) - f\| \leq \rho(f, L) + \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ — лебегова мера на пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$. Рассмотрим строго монотонную функцию $\varphi \in C(\mathbb{R}_+, [0, 1])$, такую, что $\varphi(0) = 0$. Для любой функции $f \in C[0, 1]$ положим

$$V_f(x_1, \dots, x_{n-1}) = \begin{cases} \varphi(\mu(Y_{\varepsilon, L}(f, x_1, \dots, x_{n-1}))), & (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D, \\ 0, & (x_1, \dots, x_{n-1}) \notin D. \end{cases}$$

Определение функции V_f корректно в силу условия (i).

Укажем способ построения непрерывной ε -выборки G . В силу того что L — образ непрерывного и инъективного отображения, топология в L , индуцируемая евклидовой нормой в $D \times \mathbb{R}^{m+1}$, не слабее топологии в L , порожденной равномерной нормой. Поэтому при любых $f \in C[0, 1]$ и $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$ множество $Y_{\varepsilon, L}(f, x_1, \dots, x_{n-1})$ открыто, и, следовательно, если $Y_{\varepsilon, L}(f, x_1, \dots, x_{n-1})$ непусто, то $V_f(x_1, \dots, x_{n-1}) > 0$. Пусть $f \in C[0, 1]$. Из условия (ii) нетрудно вывести, что множество тех наборов $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, для которых $V_f(x_1, \dots, x_{n-1}) > 0$, измеримо; по условию (iii) функция V_f непрерывна на этом множестве и, следовательно, интегрируема на $[0, 1]^{n-1}$. Последовательно определим отображение $X_i(f): C[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ($1 \leq i \leq n-1$) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_0^{X_i(f)} \int_0^1 \cdots \int_0^1 V_f(X_1(f), \dots, X_{i-1}(f), x_i, \dots, x_{n-1}) dx_i dx_{i+1} \dots dx_{n-1} \\ &= \int_{X_i(f)}^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 V_f(X_1(f), \dots, X_{i-1}(f), x_i, \dots, x_{n-1}) dx_i dx_{i+1} \dots dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Пусть $x_i^0 = X_i(f)$. Из условия (ii) следует, что определение отображения $X_i(f)$ корректно и множество $Y_{\varepsilon, L}(f, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$ непусто. Для $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$ и $0 \leq j \leq m$ определим отображение $Z_j: C[0, 1] \times D \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$Z_j(f, x_1, \dots, x_{n-1}) = \int \cdots \int \frac{y_j dy_0 \dots dy_n}{\mu(Y_{\varepsilon, L}(f, x_1, \dots, x_{n-1}))}.$$

Пусть набор $(y_0^0, y_1^0, \dots, y_m^0)$ является центром масс множества $Y_{\varepsilon, L}(f, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$, $y_j^0 = Z_j(f, x_1^0, \dots, x_{n-1}^0)$. Тогда отображение $G: C[0, 1] \rightarrow L$, $G(f) = F(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, y_0^0, \dots, y_m^0)$, является непрерывной ε -выборкой на множество L . Действительно, тот факт, что отображение G есть ε -выборка, вытекает из определения отображения G и условия (i). Доказательство непрерывности G может быть проведено с использованием условия (iii).

Через S_n^d обозначим множество всех непрерывных кусочно-полиномиальных функций $l \in C[0, 1]$, т.е. функций, для которых найдется такое разбиение $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$, что $l|_{[x_{i-1}, x_i]}$ является полиномом степени $\leq d$ для всех i , $1 \leq i \leq n$. Отметим, что S_n^d является множеством существования, но не является множеством единственности при $n \geq 2$. Из теоремы 1 можно вывести такие следствия:

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любых $\varepsilon > 0$ и $n > 1$ существует непрерывная ε -выборка на множество S_n^1 .

Для доказательства следствия 1 достаточно рассмотреть множество $D = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) : 0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < 1\}$ и отображение F , сопоставляющее точке $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in D$ и точке $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ломаную с вершинами в $(0, y_0)$, $(x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$, $(1, y_n)$, и проверить, что $S_n^1 = L = \text{Im } F \in K$.

Из теоремы 1 также можно вывести следующий результат Конягина [2].

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого $\varepsilon > 0$ и произвольных целых $m \geq 0$ и $n \geq 0$ существует непрерывная ε -выборка на множество $R_{m,n}$.

ТЕОРЕМА 2. Ни при каких $n, d > 1$ и $\varepsilon \geq 0$ не существует непрерывной ε -выборки на S_n^d .

Укажем основные идеи доказательства теоремы 2 для $n = 2$, $d \geq 2$. Обозначим через $\|\cdot\|_\Delta$ равномерную норму на отрезке Δ . Пусть $\varepsilon = (100D)^{-2}$, где $D = \sup\{\|P\|_{[0,2]} : P = a_d x^d + \dots + a_0, (-1)^i P(i/(2d+1)) < 1, i \in \{0, \dots, 2d+1\}\}$. Рассмотрим $h_1, h_2 \in C[0, 1]$, такие, что $h_1|_{[0, 2/3]} = 0$, $h_1|_{[2/3, 1]} = (x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{3})$ и $h_2|_{[0, 1/3]} = 0$, $h_2|_{[1/3, 1]} = (x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{3})$. Положим для $g_1, g_2 \in C[0, 1]$

$$M(g_1, g_2) = \left\{ f \in C[0, 1] : \|f\|_{[1/3, 2/3]} \leq 5, \|f - g_1\|_{[0, 1/3]} = \|f - g_2\|_{[2/3, 1]} = 7 \text{ и} \right. \\ \left. (-1)^{i-1} \left(f\left(\frac{i}{3(2d+1)}\right) - g_1\left(\frac{i}{3(2d+1)}\right) \right) = (-1)^{i-1} \left(f\left(\frac{2}{3} + \frac{i}{3(2d+1)}\right) \right. \right. \\ \left. \left. - g_2\left(\frac{2}{3} + \frac{i}{3(2d+1)}\right) \right) = 7 \text{ при } i \in \{0, \dots, 2d+1\} \right\}.$$

Предположим, что G — непрерывная ε -выборка. Рассмотрим $f_0 \in M(h_1, h_2)$; тогда или $\|G(f_0) - h_1\|_{[2/5, 3/5]} < \varepsilon D$, или $\|G(f_0) - h_2\|_{[2/5, 3/5]} < \varepsilon D$. В первом случае (второй случай разбирается аналогично) рассмотрим отображение $A \in C([0, 1], C[0, 1])$, такое, что $A(0) = f_0$ и $A(t) \in M(\varepsilon^{1/2} t(x - \frac{1}{3})x, h_2)$. Заметим, что $\rho(A(1), S_n^d) = 7$ и или $\|G(A(1)) - h_2\|_{[2/5, 3/5]} < \varepsilon D$, или $\|G(A(1)) - \varepsilon^{1/2} x(x - \frac{1}{3})\|_{[2/5, 3/5]} < \varepsilon D$. Последнее невозможно, так как в этом случае $G(A(1))(\frac{2}{3}) - A(1)(\frac{2}{3}) \geq 7 + \frac{2}{9}\varepsilon^{1/2} - \varepsilon D > \rho(A(1), S_n^d) + \varepsilon$. Отсюда вытекает, что множество $\{G(A(t))(\frac{1}{2}) : t \in [0, 1]\}$ несвязно в $\mathbb{R}$. Следовательно, $G(A(t))$ имеет разрыв на $[0, 1]$, что противоречит непрерывности ε -выборки G . Доказательство теоремы для произвольного ε дает соответствующая гомотетия.

Похожая конструкция может дать доказательство прямой импликации в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. Непрерывная ε -выборка на S_n^1 при $\varepsilon = 0$ существует тогда и только тогда, когда $n = 1$ или $n = 2$.

Автор выражает благодарность И. Г. Царькову, М. И. Карлову и А. Р. Алимову за помощь, оказанную при написании этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чебышёв П. Л. В кн.: Сочинения, т. II, 1859, с. 151–235.
2. Конягин С. В. Матем. заметки, **44**, №3, 404 (1988).
3. Maehly H., Witzgall Ch. Num. Math., **2**, No. 5, 293–307 (1960).