Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Паршин, Соответствие Кричевера для алгебраических поверхностей, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 1, 88–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa237>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 04:56:38

УДК 512.7

Соответствие Кривевера для алгебраических поверхностей*

© 2001. А. Н. ПАРШИН

В теории интегрируемых систем известна конструкция И. М. Кривевера, сопоставляющая алгебраическим кривым и векторным расслоениям на них бесконечномерное подпространство в пространстве $k((z))$ степенных рядов Лорана [6]. Эта конструкция имеет многочисленные применения к уравнениям типа КП и к теории модулей алгебраических кривых [6, 14, 2, 7, 1, 13, 3].

Недавно автор заметил [11, 10] некоторые связи между уравнениями КП и n -мерными локальными полями [9, 5, 4]. Основываясь на этой связи, мы предлагаем обобщение конструкции Кривевера для алгебраических поверхностей. Сначала опишем эту конструкцию для случая алгебраических кривых.

Пусть $\mathcal{M}_1 = \{(C, P, z, \mathcal{F}, e_P)\}$, где C — проективная неприводимая кривая над полем k , $P \in C$ — гладкая точка, z — формальный локальный параметр в P , $\mathcal{F}$ — пучок без кручения ранга r на C и e_P — тривиализация пучка $\mathcal{F}$ в P . Независимо мы имеем поле $k((z))$ и пространство $V = k((z))^{\oplus r}$ с фильтрацией $V(n) = z^n k[[z]]^{\oplus r}$. Пусть $V_1 = V(0)$.

ТЕОРЕМА 1. *Существует такое каноническое отображение $\Phi_1: \mathcal{M}_1 \rightarrow \{\text{векторные подпространства } A \subset k((z)), W \subset V\}$, что*

- (i) *когомологии комплексов $A \oplus k[[z]] \rightarrow k((z))$, $W \oplus V_1 \rightarrow V$ изоморфны соответственно $H^*(C, \mathcal{O}_C)$ и $H^*(C, \mathcal{F})$,*
- (ii) *если $(A, W) \in \text{Im } \Phi_1$, то $A \cdot A \subset A$, $A \cdot W \subset W$,*
- (iii) *если $m, m' \in \mathcal{M}_1$ и $\Phi_1(m) = \Phi_1(m')$, то m изоморфен m' .*

Если $m = (C, P, z, \mathcal{F}, e_P) \in \mathcal{M}_1$, то можно положить $A := \Gamma(C - P, \mathcal{O}_C)$, $W := \Gamma(C - P, \mathcal{F})$.

Покажем, как эта конструкция связана с иерархией КП. Пусть $r = 1$. Обозначим через $\text{Gr}(V)$ множество подпространств W в V , удовлетворяющих условию теоремы. Это (бесконечномерное) проективное многообразие, связные компоненты которого нумеруются эйлеровой характеристикой комплекса $W \oplus V_1 \rightarrow V$. Если $W \in \text{Gr}(V)$, то касательное пространство в точке W имеет вид $T_W = \text{Hom}(W, V/W)$ и определено естественное отображение $\text{Hom}(V, V) \rightarrow T_W$. Для $n \in \mathbb{Z}$ на $\text{Gr}(V)$ имеется векторное поле T_n . Оно равно образу оператора умножения на z^{-n} в пространстве V . Поля T_n переходят в иерархию КП после применения соответствия Сато.

Пусть $E = k[[x]]((\partial^{-1}))$ — кольцо формальных псевдодифференциальных операторов с регулярными коэффициентами. Имеется разложение $E = E_+ \oplus E_-$ на дифференциальные и вольтерровы операторы. Тогда иерархия КП в лаксовой форме имеет вид $\partial_n L = [(L^n)_+, L]$, где $L \in \partial + E_- =: E'$. Множество $G = 1 + E_-$ будет группой, также несущей векторные поля $\partial_n S = -(S \partial^n S^{-1})_- S$. Отображение $E \rightarrow E/Ex = V$ (если отождествить образ оператора ∂^{-1} с z) дает линейное действие кольца E на V и затем на $\text{Gr}(V)$. Имеем диаграмму биекций (соответствие Сато)

$$E' \xleftarrow{\varphi} G/G_0 \xrightarrow{\psi} \text{Gr}_+(V)/k[[z]]^*,$$

*Работа поддержана грантом РФФИ, проект 00-01-00170.

где $G_0 = G \cap k((\partial^{-1}))$, $\varphi(S) = S\partial S^{-1}$, $\psi(S) = S^{-1}(W_0)$ ($W_0 = k[z^{-1}] \in \text{Gr}(V)$) и $\text{Gr}_+(V)$ — открытое подмножество (большая клетка). Отображение φ переводит поля $\partial_n S$ в иерархию КП, а отображение ψ переносит $\partial_n S$ в T_n .

Соответствие Кричевера Φ_1 позволяет построить интегральные многообразия в $X = \text{Gr}(V)/k[[z]]^*$. Зафиксируем C , P , z . Тогда образ $\Phi_1(C, P, z, \mathcal{F}, e_P)$ в X не зависит от e_P и при переменном обратимом пучке $\mathcal{F}$ замечает обобщенный якобиан $\text{Jас}(C)$ кривой C . Это вытекает из точной последовательности $A + V_1 \rightarrow k((z)) \rightarrow T_{X,W}$, в которой $k((z))/A + V_1 = H^1(C, \mathcal{O}_C)$ — касательное пространство к обобщенному якобиану кривой C и все векторные поля T_n принадлежат образу $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ в $T_{X,W}$ (см. [7]). Если C — проективная прямая с одной двойной точкой, то $\text{Jас}(C) = k^*$, и мы получаем 1-солитонное решение.

Можно предположить, что аналогичные конструкции имеют место и для более высоких размерностей (относительно колец ПДО см. [11]). Здесь мы предлагаем обобщение отображения Кричевера Φ_1 на случай алгебраических поверхностей.

Пусть X — неприводимая проективная поверхность над полем k , η — ее общая точка, K — поле рациональных функций на X , $\widehat{\mathcal{O}}_x$ — пополненное локальное кольцо в точке $x \in X$, $K_{x,D}$ — двумерное локальное поле, отвечающее флагу $x \in D \subset X$ [9, 5, 4], $\widehat{\mathcal{O}}_{x,D}$ — его кольцо дискретного нормирования, $K_x = K\widehat{\mathcal{O}}_x$ и K_D — поле отношений локального кольца дивизора D на X . Зафиксируем на X неприводимую проективную кривую C и точку $P \in C$, гладкую на C и X . Пусть $\mathcal{F}$ — пучок без кручения на X и $\widehat{\mathcal{F}}_x$, $\widehat{\mathcal{F}}_C$ — его пополненные слои соответственно в точке x и вдоль кривой C . Если $x \in C$, то положим $B_x(\mathcal{F}) = \bigcap_{D \neq C} ((\widehat{\mathcal{F}}_x \otimes K_x) \cap (\widehat{\mathcal{F}}_x \otimes \widehat{\mathcal{O}}_{x,D}))$, где пересечение берется внутри $\widehat{\mathcal{F}}_x \otimes K_x$, $B_C(\mathcal{F}) = (\widehat{\mathcal{F}}_C \otimes K_C) \cap (\bigcap_{x \neq P} B_x(\mathcal{F}))$, где пересечение берется внутри $\widehat{\mathcal{F}}_x \otimes K_{x,C}$, $A_C(\mathcal{F}) = B_C(\mathcal{F}) \cap \widehat{\mathcal{F}}_C$ и $A(\mathcal{F}) = \widehat{\mathcal{F}}_\eta \cap (\bigcap_{x \in X-C} \widehat{\mathcal{F}}_x)$.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что дивизор C обилен на X . Тогда адельный комплекс $\widehat{\mathcal{F}}_\eta \oplus \prod_D \widehat{\mathcal{F}}_D \oplus \prod_x \widehat{\mathcal{F}}_x \rightarrow \prod'_D (\widehat{\mathcal{F}}_D \otimes K_D) \oplus \prod'_x (\widehat{\mathcal{F}}_x \otimes K_x) \oplus \prod'_{x \in D} (\widehat{\mathcal{F}}_x \otimes \widehat{\mathcal{O}}_{x,D}) \rightarrow \prod'_{x \in D} \widehat{\mathcal{F}}_x \otimes K_{x,D}$ для пучка $\mathcal{F}$ квазиизоморфен комплексу $A(\mathcal{F}) \oplus A_C(\mathcal{F}) \oplus \widehat{\mathcal{F}}_P \rightarrow B_C(\mathcal{F}) \oplus B_P(\mathcal{F}) \oplus (\widehat{\mathcal{F}}_P \otimes \widehat{\mathcal{O}}_{P,C}) \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}_P \otimes K_{P,C}$.*

ПРИМЕР. Пусть $X = \mathbf{P}_2 \supset C = \mathbf{P}_1 \ni P$. Выберем такие однородные координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$, что $C = (x_0 = 0)$, $P = (x_0 = x_1 = 0)$ и $U = X - C = \text{Срес } k[x, y]$ с $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$. Тогда $k(C) = k(y/x)$ и x^{-1} — последний параметр каждого двумерного локального поля $K_{Q,C}$ с $Q \neq P$. Имеем тогда $K_{P,C} = k((u))((t))$ (поле итерированных рядов Лорана), $u = xy^{-1}$, $t = y^{-1}$, $\widehat{\mathcal{O}}_{P,C} = k((u))[[t]]$ и $\widehat{\mathcal{O}}_P = k[[u, t]]$ и для пучка $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ легко находим, что $B_P = k[[u]]((t))$, $B_C = k[u^{-1}]((u^{-1}t))$, $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = k[ut^{-1}, t^{-1}]$ и $A_C = k[u^{-1}][[u^{-1}t]]$.

Для случая алгебраической поверхности соответствующие данные имеют вид $\mathcal{M}_2 = \{(X, C, P, (z_1, z_2), \mathcal{F}, e_P)\}$, где X — неприводимая проективная поверхность над полем k , $C \subset X$ — проективная неприводимая кривая над k , $P \in C$ — точка, гладкая на X и C , z_1, z_2 — такие формальные локальные параметры в P , что $(z_2 = 0) = C$ около P , $\mathcal{F}$ — пучок без кручения ранга r на X и e_P — тривиализация пучка $\mathcal{F}$ в P . Тогда мы имеем $\widehat{\mathcal{O}}_{X,P} = k[[z_1, z_2]]$, $K_{P,C} = k((z_1))((z_2))$ и $\widehat{\mathcal{F}}_P = \widehat{\mathcal{O}}_{P,e_P} = \widehat{\mathcal{O}}_P^{\oplus r}$. В поле $K = k((z_1))((z_2))$ имеются следующие фильтрации

и подпространства: $K_{02} = k[[z_1]]((z_2))$, $K_{12} = k((z_1))[[z_2]]$, $K(n) = z_2^n K_{12}$. Они переносятся на пространство $V = K^{\oplus r}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть C — гиперплоское сечение. Существует такое каноническое отображение $\Phi_2: \mathcal{M}_2 \rightarrow \{\text{векторные подпространства } B \subset K, W \subset V\}$, что

(i) для всех n

$$\frac{B \cap K(n)}{B \cap K(n+1)} \oplus \frac{K_{02} \cap K(n)}{K_{02} \cap K(n+1)} \longrightarrow \frac{K(n)}{K(n+1)},$$

$$\frac{W \cap V(n)}{W \cap V(n+1)} \oplus \frac{V_{02} \cap V(n)}{V_{02} \cap V(n+1)} \longrightarrow \frac{V(n)}{V(n+1)}$$

— фредгольмовы комплексы индексов соответственно $\chi(C, \mathcal{O}_C) + nC \cdot C$ и $\chi(C, \mathcal{F}|_C) + nC \cdot C$;

(ii) когомологии комплексов $(B \cap K_{02}) \oplus (B \cap K_{12}) \oplus (K_{02}) \cap K_{12} \rightarrow B \oplus K_{02} \oplus K_{12} \rightarrow K$ и $(W \cap V_{02}) \oplus (W \cap V_{12}) \oplus (V_{02}) \cap V_{12} \rightarrow W \oplus V_{02} \oplus V_{12} \rightarrow V$ изоморфны соответственно $H^*(X, \mathcal{O}_X)$ и $H^*(X, \mathcal{F})$;

(iii) если $(B, W) \in \text{Im } \Phi_2$, то $B \cdot B \subset B$, $B \cdot W \subset W$;

(iv) для всех n отображение

$$(C, P, z_1|_C, \mathcal{F}(-nC)|_C, e_P(-n)|_C) \mapsto \left(\frac{B \cap K(n)}{B \cap K(n+1)} \subset \frac{K(n)}{K(n+1)} = k((z_1)), \right. \\ \left. \frac{W \cap V(n)}{W \cap V(n+1)} \subset \frac{V(n)}{V(n+1)} = k((z_1))^{\oplus r} \right)$$

совпадает с Φ_1 ;

(v) если пучок $\mathcal{F}$ локально свободен и X — поверхность Козна–Маколея и если $\Phi_2(m) = \Phi_2(m')$, $m, m' \in \mathcal{M}_2$, то m изоморфен m' .

Если $m = (X, C, P, (z_1, z_2), \mathcal{F}, e_P) \in \mathcal{M}_2$, то для определения отображения Φ_2 положим $B = B_C(\mathcal{O}_X)$, $W = B_C(\mathcal{F})$, $\Phi_2(m) = (B, W)$. Доказательство см. в [12]. Заметим, что свойство (v) означает, что поверхность X и пучок $\mathcal{F}$ можно восстановить по данным, связанным только с бесконечно малой окрестностью кривой C . Это свойство не переносится на произвольные пучки без кручения на X . Дальнейшее обобщение соответствия Кричевера на многообразия любой размерности было недавно предложено Д. В. Осиповым [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Álvarez Vázquez A., Munoz Porras J. M., Plaza Martín F. J. alg-geom/9606009.
2. Arbarello E., De Concini C., Kac V. G., Procesi C. Comm. Math. Phys., **117**, 1–36 (1988).
3. Ben-Zvi D., Frenkel E. alg-geom/9802068.
4. Fimmel T., Parshin A. N. Introduction to the Higher Adelic Theory, Preprint, Moscow, 1996.
5. Huber A. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **61**, 249–273 (1991).
6. Кричевер И. М. УМН, **32**, 185–214 (1977).
7. Mulase M. Int. J. Math., **1**, 293–342 (1990).
8. Osipov D. V. math/0003188.
9. Паршин А. Н. Изв. АН СССР, сер. матем., **40**, 736–773 (1976).
10. Паршин А. Н. В кн.: Гильберт Д. Избранные труды, т. 2. Факториал, М., 1998, с. 535–538.
11. Паршин А. Н. Труды МИРАН, **224**, 266–280 (1999).
12. Parshin A. N. alg-geom/9911097.
13. Quandt I. alg-geom/9606015.
14. Segal G., Wilson G. Publ. Math. IHES, **80**, 301–342 (1985).