Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Б. Симоненко, Предельные теоремы типа Сегё для многомерных дискретных операторов свертки с непрерывным символом, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 1, 91–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa238>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:33:48

УДК 517.9

Предельные теоремы типа Сегё для многомерных дискретных операторов свертки с непрерывным символом

© 2001. И. Б. СИМОНЕНКО

1. Основные результаты. Пусть число $\text{AvTr}_f(A)$, где A — линейный оператор, действующий в конечномерном линейном пространстве размерности m , а f — функция, область определения которой содержит в себе спектр оператора A , определяется равенством

$$\text{AvTr}_f(A) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m f(\lambda_j),$$

где $\{\lambda_j\}$ ($j = 1, \dots, m$) — полный набор собственных чисел оператора A с учетом их кратности. Здесь и всюду далее функция — это комплекснозначное отображение; линейное пространство — это пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Кроме того, пусть

- $\mathbb{Z}^n$, $n \in \mathbb{N}$, снабжено дискретной мерой, равной 1 на каждом одноэлементном множестве;
- $T = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ — единичная окружность с лебеговой мерой-длиной $\bar{s}$, $s = (2\pi)^{-1}\bar{s}$, T^n снабжено мерой $s^n = s \times \dots \times s$ (n сомножителей);
- $l_2 = L_2(\mathbb{Z}^n)$, $L_2 = L_2(T^n)$ — пространства суммируемых с квадратом функций с естественными для таких пространств нормами;
- fs — множество конечных непустых подмножеств множества $\mathbb{Z}^n$;
- $l_2(X)$ при $X \in \text{fs}$ — пространство, состоящее из функций, принадлежащих l_2 и обращающихся в нуль вне X ;
- $\text{card}(X)$ — число элементов в множестве X ;
- η — функция, определенная на fs следующим образом:

$$\eta(X) = \inf_{Y \subset X} \max(\text{card}(X \setminus Y) / \text{card}(X), 1 / \text{dist}(Y, \mathbb{Z}^n \setminus X)),$$

где $\text{dist}(X, Y) = \inf\{|x - y| : x \in X, y \in Y\}$, $|x|$ — длина вектора x ;

- $F : l_2 \rightarrow L_2$ — преобразование Лорана:

$$(Fg)(t) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} g(\gamma) t^\gamma, \quad \text{где } t^\gamma = (t_1, \dots, t_n)^{(\gamma_1, \dots, \gamma_n)} = t_1^{\gamma_1} \dots t_n^{\gamma_n};$$

- $\text{End}(B)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в B -пространстве B ;
- $\mathfrak{C}$ — множество тех операторов A из $\text{End}(l_2)$, для которых оператор FAF^{-1} является оператором умножения на некоторую определенную на T^n непрерывную функцию; саму эту функцию будем обозначать через $\mu(A)$;
- $A \in \mathfrak{C}$, $\nu = \mu(A)$, G — выпуклая оболочка множества значений функции ν , $A_X \in \text{End}(l_2(X))$, где $X \in \text{fs}$, — оператор, определяемый равенством $A_X = PAj$, в котором P — оператор умножения на характеристическую функцию множества X и $j : l_2(X) \subset l_2$ (заметим, что для любого $X \subset \mathbb{Z}^n$ спектр оператора A_X содержится в множестве G);

- $\Phi_f: \text{fs} \rightarrow \mathbb{C}$, где f — определенная на G функция, задается формулой

$$\Phi_f(X) = \text{AvTr}_f(A_X).$$

ТЕОРЕМА 1.1. *Если f — функция, определенная и непрерывная на множестве G и аналитическая как функция комплексного переменного во внутренних точках этого множества, то*

$$\Phi_f(X) \rightarrow I_f \stackrel{\text{def}}{=} \int_{T^n} f(\nu) ds^n, \quad \text{когда } \eta(X) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Далее в этом разделе мы предполагаем, что ν — вещественная функция, $c = \min \nu$ и $d = \max \nu$.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть f — непрерывная функция, определенная на сегменте $[c, d]$. Тогда справедливо (1).*

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть $Y \subset [c, d]$ и $N(X)$ при $X \in \text{fs}$ — число собственных чисел оператора A_X , принадлежащих множеству Y , с учетом их кратности. Тогда*

$$s^n[\nu^{-1}(\text{int}(Y))] \leq \liminf_{\eta(X) \rightarrow 0} \frac{N(X)}{\text{card}(X)} \leq \limsup_{\eta(X) \rightarrow 0} \frac{N(X)}{\text{card}(X)} \leq s^n[\nu^{-1}(\text{cl}(Y))],$$

где $\text{int}(Y)$ ($\text{cl}(Y)$) — внутренняя часть (замыкание) множества Y в сегменте $[c, d]$, а $\nu^{-1}(Z)$ — прообраз множества $Z \subset [c, d]$ при отображении ν .

2. Случай подобно расширяющейся области. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\vartheta_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($\alpha > 0$) — преобразование, определяемое формулой $\vartheta_\alpha(x) = x_0 + \alpha(x - x_0)$, D — ограниченное измеримое по Жордану (см. [1, с. 420, статья «Жордана мера»]) подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, обладающее положительной мерой, и $D_\alpha = \mathbb{Z}^n \cap \vartheta_\alpha(D)$.

ЛЕММА 2.1. $\eta(D_\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow +\infty$.

Эта лемма позволяет применить теоремы предыдущего раздела в случае подобно расширяющихся областей. Например, следствием теоремы 1.1 является

ТЕОРЕМА 2.1. *Если f удовлетворяет условиям теоремы 1.1, то*

$$\Phi_f(D_\alpha) \rightarrow I_f, \quad \text{когда } \alpha \rightarrow +\infty.$$

3. Комментарии. Интерес автора к данной проблеме возник под влиянием известной статьи [2] (см. также [3, гл. 5]), где был рассмотрен одномерный случай. Наиболее близкой к нашей работе является статья [4], в которой теорема 2.1 доказана в предположении, что символ ν — положительная функция, а $f = \ln$, при более сильных ограничениях на гладкость границы области D и символ: граница области D предполагается C^2 -кусочно-гладкой и обладающей положительной гауссовой кривизной, символ — принадлежащим $W_2^{1/2}$. Аналогичный результат в континуальном случае получен ранее в [5], где относительно области D предполагается, что она либо является выпуклой, либо представляет собой тело симплициального комплекса. Достаточно полная библиография по этому вопросу содержится в [6, pp. 167–172].

У нас на область D налагается лишь одно условие: она измерима по Жордану и имеет положительный объем, а символ только непрерывен. Отметим, однако, что в [4] и [5] вычислены два члена асимптотики, у нас же — только первый.

ЛИТЕРАТУРА

1. Математическая энциклопедия. Т. 2, Советская энциклопедия, М, 1979. 2. Szego G. In: Festschrift Marcel Riesz (Lund. 1952), pp. 228–238. 3. Гренандер У., Сегё Г. Теплицевы формы и их приложения. ИЛ, М., 1961. 4. Линник И.Ю. Изв. АН СССР, сер. матем., **39**, №6, 1393–1403 (1975). 5. Widom H. Trans. Amer. Math. Soc., **94**, No. 1, 170–180 (1960). 6. Böttcher A., Silbermann B. Invertibility and Asymptotics of Toeplitz Matrices. Akademie-Verlag, Berlin, 1983.

Ростовский госуниверситет

Поступило в редакцию
18 мая 1999 г.

УДК 517.3

Дополнение к бифуркационной диаграмме тригонометрических полиномов

© 2001. С. В. Шадрин

1. Мы рассматриваем пространство вещественных тригонометрических полиномов $F = \{f(t) = \cos nt + \sum_{j=1}^{n-1} (A_j \cos jt + B_j \sin jt) \mid A_j, B_j \in \mathbb{R}\}$, определенных на окружности ($f: S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$). Бифуркационной диаграммой $\Sigma_1 \subset F$ называется множество неморсовских полиномов.

Комплексной формой полинома $f \in F$ мы называем мероморфную функцию $g(z): \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, получаемую из f заменой $z = e^{it}$. Обозначим через Σ_2 множество полиномов $f \in F$, комплексные формы которых имеют вещественные непростые критические значения.

Очевидно, что Σ_1 и Σ_2 — гиперповерхности в F , причем $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$. Статья посвящена описанию дополнений $F \setminus \Sigma_1$ и $F \setminus \Sigma_2$. Ранее аналогичные вопросы рассматривались в [1] для обычных полиномов и в [2, 3] для тригонометрических полиномов с $2n$ критическими точками на окружности.

2. Функции $f_1, f_2: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ называются топологически эквивалентными, если существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $\alpha: S^1 \rightarrow S^1$, $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие, что $f_1\alpha = \beta f_2$. Очевидно, что если $f \in F$ и $f' \in F$ — топологически неэквивалентные морсовские полиномы, то они лежат в разных компонентах дополнения $F \setminus \Sigma_1$.

Рассмотрим морсовскую функцию $f_0: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Обозначим через $[f_0]$ подмножество в F , состоящее из всех морсовских полиномов, топологически эквивалентных f_0 . Пусть число критических точек функции f_0 на окружности равно $2k$. Очевидно, что если $k > n$, то $[f_0]$ пусто. Поэтому в дальнейшем мы во всех рассуждениях будем предполагать, что $k \leq n$.

ТЕОРЕМА 1. Для любой морсовской функции f_0 , такой, что $k \leq n$, множество $[f_0]$ непусто. Кроме того, если $k < n$, то $[f_0]$ — связное подмногообразие в F . Если же $k = n$, то $[f_0]$ — подмногообразие в F , гомотопически эквивалентное n точкам.

Эта теорема дает описание всех компонент дополнения $F \setminus \Sigma_1$.

3. Скобочным символом называется синтаксически правильная последовательность из $2k$ пар квадратных скобок, идущих подряд, и $n - k$ пар круглых скобок,