Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Шадрин, Дополнение к бифуркационной диаграмме тригонометрических полиномов, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 1, 93–95

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa239>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 05:50:17

ЛИТЕРАТУРА

1. Математическая энциклопедия. Т. 2, Советская энциклопедия, М, 1979. 2. Szego G. In: Festschrift Marcel Riesz (Lund. 1952), pp. 228–238. 3. Гренандер У., Сегё Г. Теплицевы формы и их приложения. ИЛ, М., 1961. 4. Линник И.Ю. Изв. АН СССР, сер. матем., 39, №6, 1393–1403 (1975). 5. Widom H. Trans. Amer. Math. Soc., 94, No. 1, 170–180 (1960). 6. Böttcher A., Silbermann B. Invertibility and Asymptotics of Toeplitz Matrices. Akademie-Verlag, Berlin, 1983.

Ростовский госуниверситет

Поступило в редакцию
18 мая 1999 г.

УДК 517.3

Дополнение к бифуркационной диаграмме тригонометрических полиномов

© 2001. С. В. Шадрин

1. Мы рассматриваем пространство вещественных тригонометрических полиномов $F = \{f(t) = \cos nt + \sum_{j=1}^{n-1} (A_j \cos jt + B_j \sin jt) \mid A_j, B_j \in \mathbb{R}\}$, определенных на окружности ($f: S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$). Бифуркационной диаграммой $\Sigma_1 \subset F$ называется множество неморсовских полиномов.

Комплексной формой полинома $f \in F$ мы называем мероморфную функцию $g(z): \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, получаемую из f заменой $z = e^{it}$. Обозначим через Σ_2 множество полиномов $f \in F$, комплексные формы которых имеют вещественные непростые критические значения.

Очевидно, что Σ_1 и Σ_2 — гиперповерхности в F , причем $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$. Статья посвящена описанию дополнений $F \setminus \Sigma_1$ и $F \setminus \Sigma_2$. Ранее аналогичные вопросы рассматривались в [1] для обычных полиномов и в [2, 3] для тригонометрических полиномов с $2n$ критическими точками на окружности.

2. Функции $f_1, f_2: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ называются топологически эквивалентными, если существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $\alpha: S^1 \rightarrow S^1$, $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие, что $f_1\alpha = \beta f_2$. Очевидно, что если $f \in F$ и $f' \in F$ — топологически неэквивалентные морсовские полиномы, то они лежат в разных компонентах дополнения $F \setminus \Sigma_1$.

Рассмотрим морсовскую функцию $f_0: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Обозначим через $[f_0]$ подмножество в F , состоящее из всех морсовских полиномов, топологически эквивалентных f_0 . Пусть число критических точек функции f_0 на окружности равно $2k$. Очевидно, что если $k > n$, то $[f_0]$ пусто. Поэтому в дальнейшем мы во всех рассуждениях будем предполагать, что $k \leq n$.

ТЕОРЕМА 1. Для любой морсовской функции f_0 , такой, что $k \leq n$, множество $[f_0]$ непусто. Кроме того, если $k < n$, то $[f_0]$ — связное подмногообразие в F . Если же $k = n$, то $[f_0]$ — подмногообразие в F , гомотопически эквивалентное n точкам.

Эта теорема дает описание всех компонент дополнения $F \setminus \Sigma_1$.

3. Скобочным символом называется синтаксически правильная последовательность из $2k$ пар квадратных скобок, идущих подряд, и $n - k$ пар круглых скобок,

вписанных в квадратные. Для примера перечислим все скобочные символы для $n = 3, k = 1$: $[(())][], [(())][], [(())][], [][((())], [][((())]$. В [1] доказано, что при фиксированных n и k число всех скобочных символов равно $\binom{2n-1}{n-k} - \binom{2n-1}{n-k-1}$.

Каждому полиному $f \in [f_0] \setminus \Sigma_2$ мы поставим в соответствие скобочный символ. Для этого рассмотрим комплексную форму g полинома $f \in F$. Очевидно, что $g(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1}) + \sum_{j=1}^{n-1} (C_j z^j + \overline{C}_j z^{-j})$.

Опишем подмножество единичного круга, на котором g принимает вещественные значения: это единичная окружность, $2k$ линий λ_i , соединяющих нуль с критическими точками на единичной окружности и $n - k$ окружностей ω_m , содержащих точку нуль. Иных точек пересечения, кроме явно указанных, перечисленные линии не имеют ($\lambda_j \cap \lambda_i = \lambda_i \cap \omega_m = \omega_m \cap \omega_l = \{0\}$, $1 \leq i, j \leq 2k$, $1 \leq m, l \leq n - k$).

Сделаем обход вокруг нуля в положительном направлении, стартуя с линии λ_1 , соединяющей нуль с глобальным минимумом функции g на единичной окружности. При пересечении с прообразом вещественных чисел мы будем выставлять скобки, руководствуясь следующими правилами: 1) в начале ставим «[», в конце — «]»; 2) при пересечении линии λ_i , $2 \leq i \leq 2k$, мы ставим «[»]; 3) при пересечении окружности ω_m , $1 \leq m \leq n - k$, в первый раз мы ставим «(», во второй раз «)». Естественно, обход предполагается таким, что каждую линию λ_i мы пересечем один раз, а каждую окружность ω_m — два раза.

Очевидно, что полученная последовательность — скобочный символ. Мы будем называть его скобочным символом полинома f . Очевидно, что полиномы с различными скобочными символами лежат в разных компонентах дополнения $[f_0] \setminus \Sigma_2$.

Обозначим через $[f_0, \text{smb}]$ подмножество в $[f_0] \setminus \Sigma_2$, состоящее из всех полиномов, скобочный символ которых равен smb.

ТЕОРЕМА 2. *Для каждого скобочного символа smb множество $[f_0, \text{smb}]$ непусто. Более того, $[f_0, \text{smb}]$ — подмногообразие в $[f_0]$, гомотопически эквивалентное n точкам.*

Эта теорема дает полное описание всех компонент дополнения $F \setminus \Sigma_2$.

4. Изложим схему доказательства теоремы 2. На пространстве F действует группа $\mathbb{Z}_n$, порожденная отображением $\varphi: f(t) \mapsto f(t + 2\pi/n)$. Очевидно, что $\varphi(\Sigma_i) = \Sigma_i$, $i = 1, 2$, $\varphi([f_0]) = [f_0]$, $\varphi([f_0, \text{smb}]) = [f_0, \text{smb}]$. Рассмотрим n -листное накрытие $[f_0, \text{smb}] \rightarrow [f_0, \text{smb}]/\mathbb{Z}_n$. Проведя рассуждения, обобщающие рассуждения из [1] на наш случай, можно доказать гомеоморфность пространства $[f_0, \text{smb}]/\mathbb{Z}_n$ стягиваемому многообразию. Из этого, помимо теоремы 2, следует, что отображение φ порождает циклическую перестановку компонент связности многообразия $[f_0, \text{smb}]$.

Изложим схему доказательства теоремы 1. Тот факт, что множество $[f_0]$ непусто, мы получаем в ходе доказательства теоремы 2. Далее, рассматривая комплексные формы полиномов, несложно убедиться в связности пространства $[f_0]/\mathbb{Z}_n$. Подчеркнем, что это верно и при $k = n$.

Следующий шаг заключается в построении пути в $[f_0]$, соединяющего f и φf для некоторого $f \in [f_0]$. При $k = n$ такой путь построить невозможно [3]. При $k < n$ мы делаем следующее: рассмотрим множество M -полиномов (полиномов с $2n$ критическими точками на окружности). Пользуясь конструкцией многогранника M -полиномов из [3], можно построить в явном виде путь на границе этого

многогранника, из которого сколь угодно малым шевелением можно получить искомый путь в $[f_0]$.

Третье утверждение теоремы непосредственно следует из результатов [3]. Кроме того, в силу единственности скобочного символа при $k = n$ это утверждение вытекает из теоремы 2.

5. Автор выражает благодарность В. И. Арнольду, В. М. Закалюкину, П. Е. Пушкарю и Ю. В. Чеканову за многочисленные полезные советы и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранников С. А. Функци. анализ и его прил., **26**, вып. 2, 10–17 (1992). **2.** Шапиро Б. З. Мат. заметки, **62**, №4, 635–640 (1997). **3.** Arnold V. I. In: Arnold–Gelfand Mathematical Seminars, Boston, Birkhäuser, 1997, pp. 101–106.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Независимый московский университет
e-mail: shadrin@mccme.ru

Поступило в редакцию
21 декабря 1999 г.