Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Э. Добринская, Задача классификации квазитопических многообразий над заданным полиэдром, *Функц. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 2, 3–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa241>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:18:48

УДК 515.16

Задача классификации квазиторических многообразий над заданным полиэдром

© 2001. Н. Э. ДОБРИНСКАЯ

§1. Введение

Рассмотрим гладкое ориентированное многообразие M^{2n} размерности $2n$ с гладким действием n -мерного тора T^n на нем. Пространством орбит такого действия является многообразие с углами $M^* = M^{2n}/T^n$ (см. [2]). Ограничиваясь простейшими многообразиями с углами, а именно простыми выпуклыми полиэдрами (т.е. n -мерными выпуклыми полиэдрами, в каждой вершине которых сходится ровно n граней коразмерности 1), мы получаем важный класс многообразий. Так, в алгебраической геометрии такими многообразиями являются известные торические многообразия (здесь и далее, говоря о торических многообразиях, мы имеем в виду только неособые компактные торические многообразия). Изучение действий с пространствами орбит — простыми выпуклыми полиэдрами привело к возникновению понятия *квазиторического многообразия*. Это многообразие M^{2n} с действием тора вдвое меньшей размерности, которое локально изоморфно стандартному диагональному действию тора T^n на $\mathbb{C}^n$, причем M^{2n}/T^n диффеоморфно простому выпуклому полиэдру P^n . Итак, мы имеем четверку $(M^{2n}, P^n, \alpha: T^n \times M^{2n} \rightarrow M^{2n}, \pi: M^{2n} \rightarrow P^n)$, где α — действие тора, а проекция π — гладкое отображение, такое, что прообраз $\pi^{-1}(x)$ любой точки $x \in P^n$ есть орбита действия α . Существование такой структуры налагает весьма строгое ограничение на само многообразие (например, кольцо когомологий квазиторического многообразия порождено двумерными классами когомологий [3]). Несмотря на это, квазиторические многообразия представляют собой достаточно широкий класс. Так, например, в работе [1] показано, что в любом классе комплексных кобордизмов содержится квазиторическое многообразие.

Данная работа посвящена задаче описания с точностью до эквивариантного гомеоморфизма всех квазиторических многообразий над заданным простым полиэдром P^n .

Эта задача полностью решена для размерности $n = 2$ [6]. Любое квазиторическое многообразие размерности 4 есть либо $\mathbb{C}P(2)$, либо многообразие Хирцебруха (см. §3), либо представляется в виде эквивариантной связной суммы нескольких из перечисленных выше многообразий.

В размерностях, больших 2, задача рассматривалась для более узкого класса торических многообразий (заметим, что не всякое квазиторическое многообразие является торическим; например, всякое торическое многообразие является комплексным, а $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ таковым не является). Для классификации торических многообразий над полиэдром P^3 в статье [5] каждому такому многообразию над P ставится в соответствие по два целых веса на каждом ребре двойственного симплициального комплекса K . При помощи найденных авторами этой статьи

условий на веса («условий монодромии») в [5] построена полная классификация торических многообразий над трехмерными полиэдрами с числом гиперграней не более 8. В [4] использован другой прием (двойственная конструкция) для получения классификации торических многообразий над P^n с числом гиперграней $m = n + 2$.

В данной работе использована модификация конструкции из [5] весов на симплицальном комплексе K . Дополнительно введена двухцветная $(+, -)$ «раскраска» симплексов максимальной размерности в K . Определено действие группы $\mathbb{Z}_2^m$, где m — число вершин комплекса K , на весах и раскраске этого комплекса, которое задает отношение эквивалентности, соответствующее эквивариантным гомеоморфизмам квазиторических многообразий. При этом торическим многообразиям соответствуют системы весов с тождественно плюсовой раскраской. Дан критерий существования квазиторического многообразия с данной раскраской и системой весов. В качестве приложения вычислены все характеристические функции на трехмерном кубе I^3 .

Заключительная часть работы посвящена задаче классификации в случае полиэдров, являющихся произведениями конечного числа симплексов. Для квазиторических многообразий над такими полиэдрами получен критерий существования эквивариантного расслоения, пространство которого — данное многообразие, а база и слой также являются квазиторическими. Критерий формулируется целиком в терминах раскрасок. В качестве следствия дана классификация квазиторических многообразий, соответствующих тождественно плюсовой раскраске на произведении симплексов (а, следовательно, и описание торических многообразий над такими полиэдрами), которая поглощает случай, исследованный в [4], так как полиэдр с числом гиперграней, на 2 большим размерности, есть не что иное, как произведение двух симплексов.

§2. Характеристическая функция, раскраски и веса

Пусть $\mathcal{F}$ — множество гиперграней полиэдра P^n . Для каждого элемента $F^{n-1} \in \mathcal{F}$ стабилизатор орбиты, соответствующей произвольной точке внутренней этой грани, не зависит от выбора точки и имеет ранг 1. Он задает примитивный вектор $v \in \mathbb{Z}^n$ (определенный с точностью до знака). Таким образом, мы получаем функцию $\lambda: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}^n$, называемую *характеристической функцией*. Она удовлетворяет условию, которое в дальнейшем, следуя [3], мы будем называть условием $(*)$:

$$\text{если гипергрani } F_1, \dots, F_n \text{ пересекаются в некоторой вершине, то } \lambda(F_1), \dots, \lambda(F_n) \text{ является базисом в } \mathbb{Z}^n. \quad (*)$$

В [3] доказано, что любая функция $\lambda: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}^n$, удовлетворяющая условию $(*)$, задает квазиторическое многообразие. Будем обозначать его $M(P^n, \lambda)$.

Фиксируем базис в T^n и пронумеруем гипергрani полиэдра. Теперь характеристическую функцию $\lambda: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$, где m — число граней коразмерности 1, можно задать целочисленной $n \times m$ -матрицей A . Две характеристические функции, имеющие одинаковые ядра с учетом ориентации, эквивалентны; поэтому класс эквивалентности характеристической функции определяется минорами $A^{i_1 \dots i_n}$ матрицы A , взятыми с точностью до положительного множителя (т. е. плюккеровыми

координатами ориентированного подпространства $\text{Ker } \lambda$). Свойство (*) в терминах плюккеровых координат выглядит так:

$$\begin{aligned} &\text{если гипергрani } F_{i_1}, \dots, F_{i_n} \text{ пересекаются} \\ &\text{в некоторой вершине, то } A^{i_1 \dots i_n} = \pm 1. \end{aligned} \quad (*)$$

Но хорошо известно, что набор всех плюккеровых координат является избыточным из-за наличия большого количества соотношений между ними (так называемых плюккеровых соотношений). Поэтому укажем способ выбора некоторых из них, по которым восстанавливается класс эквивалентности характеристической функции.

Фиксируем ориентацию полиэдра P^n и рассмотрим двойственный ему симплицальный комплекс K , задающий триангуляцию сферы S^{n-1} . Грани этого комплекса — $(n-1)$ -мерные симплексы — также ориентированы. Для симплекса $(i_1, \dots, i_n)$ выберем такую перестановку $\sigma \in S_n$, что $(i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)})$ — положительно ориентированный симплекс. Будем называть цветом $\varepsilon(i_1, \dots, i_n)$ симплекса $(i_1, \dots, i_n)$ минор $A^{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}}$ (по свойству (*) этот минор равен ± 1). Таким образом, мы получаем «раскраску» полиэдра K .

Далее, рассмотрим произвольный $(n-2)$ -мерный симплекс, например, $(i_1, \dots, i_{n-1})$. Этот симплекс является пересечением двух $(n-1)$ -мерных симплексов: $(i', i_1, \dots, i_{n-1})$ и $(i'', i_1, \dots, i_{n-1})$. На симплексе $(i_1, \dots, i_{n-1})$ у вершины i_k поставим «вес»

$$W_{i_1, \dots, i_{n-1}}(i_k) = -\varepsilon(i', i_1, \dots, i_{n-1}) \varepsilon(i'', i_1, \dots, i_{n-1}) A^{i' i'' i_1 \dots \widehat{i_k} \dots i_{n-1}},$$

где набор $(i_k, i'', i_1, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_{n-1})$ задает положительную ориентацию.

Комплекс K с раскраской и весами будем обозначать K_W .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. По K_W восстанавливается класс эквивалентности характеристической функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, как, зная значения $\lambda_1 = \lambda(F_{i_1}), \dots, \lambda_n = \lambda(F_{i_n})$, где $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ — некоторый симплекс, перейти к соседнему симплексу, например, $(i'_1, i_2, \dots, i_n)$, т. е. найти $\lambda(F_{i'_1})$. Рассмотрим $(n-2)$ -мерный симплекс $(i_2, \dots, i_n)$ и веса на нем: $a_2, \dots, a_n$ у вершин $i_2, \dots, i_n$ соответственно. Так как по свойству (*) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — базис в $\mathbb{Z}^n$, то

$$\lambda(F_{i'_1}) = x_1 \lambda_1 + \dots + x_n \lambda_n \implies A^{i'_1 i_1 \dots \widehat{i_k} \dots i_n} = x_k A^{i_k i_1 \dots \widehat{i_k} \dots i_n}.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \sigma(i'_1 i_2 \dots i_n) \varepsilon(i'_1, \dots, i_n) \sigma(i_1 \dots i_n) \varepsilon(i_1, \dots, i_n) = -\varepsilon(i'_1, \dots, i_n) \varepsilon(i_1, \dots, i_n),$$

а при $k \neq 1$

$$x_k = -\sigma(i'_1 i_1 \dots \widehat{i_k} \dots i_n) a_k \sigma(i_k i_1 \dots \widehat{i_k} \dots i_n) \varepsilon(i'_1, \dots, i_n) = -a_k \varepsilon(i'_1, \dots, i_n),$$

где через $\sigma(\dots)$ обозначена ориентация.

Таким образом, шаг за шагом, восстанавливается вся характеристическая функция.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Отношение эквивалентности на множестве раскрасок с весами на комплексе K , индуцированное эквивалентностью характеристических функций, задается следующим действием группы $\mathbb{Z}_2^m$ (действием об-

разующих $e_1, \dots, e_m$ на «цвете» и «весе»):

$$e_j \varepsilon(i_1, \dots, i_n) = \begin{cases} -\varepsilon(i_1, \dots, i_n), & j \in \{i_1, \dots, i_n\}, \\ \varepsilon(i_1, \dots, i_n), & j \notin \{i_1, \dots, i_n\}, \end{cases}$$

$$e_j W_{i_1 \dots i_{n-1}}(i_k) = \begin{cases} -W_{i_1 \dots i_{n-1}}(i_k), & j \in \{i_1, \dots, i_{n-1}\} \text{ и } j \neq i_k, \\ W_{i_1 \dots i_{n-1}}(i_k) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что определение цвета и веса инвариантно относительно автоморфизмов группы $\mathbb{Z}^n$, сохраняющих ориентацию. Но нужно учесть, что замена $\lambda(F_j)$ на $-\lambda(F_j)$ приводит к эквивалентной характеристической функции. Остальное очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ. В этом утверждении мы не учитываем возможность преобразования самого комплекса K (т.е. использовали суженное понятие эквивалентности характеристических функций). На самом деле на K_W действует группа $\mathbb{Z}_2^m \oplus \text{Aut}(K)$, где $\text{Aut}(K)$ — группа автоморфизмов симплициального комплекса K .

Теперь заметим, что не всякий набор цветов и весов на K задает квазиторическое многообразие, а лишь тот, который удовлетворяет соотношениям Плюккера. Такой набор назовем *допустимым*.

Пусть $\Delta \in K$, $\dim \Delta = n - 3$. Тогда все симплексы размерности $n - 2$, содержащие Δ , можно расположить в циклическую последовательность, удовлетворяющую следующему условию:

$$\text{conv}(\Delta_i \cup \Delta_{i+1}) := \tilde{\Delta}_i \in K, \quad i = 1, \dots, s, \quad \Delta_1 = \Delta_{s+1},$$

где через conv обозначена выпуклая оболочка. Число s назовем *кратностью* симплекса Δ , а $\varepsilon(\tilde{\Delta}_i)$ обозначим через $\varepsilon_i(\Delta)$. Определим циклическую последовательность чисел $a_k(\Delta) = W_{\Delta_k}(v_k)$, где $\Delta_k = \text{conv}(\Delta \cup v_k)$. Для любой вершины $u \in \Delta$ положим $b_k(u, \Delta) = W_{\Delta_k}(u)$.

ТЕОРЕМА 3 (критерий допустимости набора цветов и весов). *Набор цветов и весов на K допустим тогда и только тогда, когда для любого симплекса $\Delta \in K$ размерности $n - 3$ и любой вершины $u \in \Delta$*

$$\prod_{k=1}^s \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon_{k-1} \varepsilon_k & -\varepsilon_k a_k & -\varepsilon_k b_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Данное уравнение распадается на две части:

1) уравнение для Δ

$$\prod_{k=1}^s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon_{k-1} \varepsilon_k & -\varepsilon_k a_k \end{pmatrix} = E;$$

2) линейную систему относительно b_k ($k = 1, \dots, s$) с коэффициентами, зависящими от a_k ($k = 1, \dots, s$), для $u \in \Delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Нам нужно доказать, что по системе весов, удовлетворяющей выписанным уравнениям, можно построить характеристическую функцию. Рассмотрим $(n - 3)$ -мерный симплекс $\Delta = (u_1, \dots, u_{n-2})$ в K . Для Δ_k и Δ_{k+1} из циклической последовательности, построенной выше, справедливо

равенство, полученное в доказательстве предложения 1 (через $\lambda(v)$ обозначено значение характеристической функции на гиперграни полиэдра P^n , соответствующей вершине v комплекса K):

$$\lambda(v_{k+1}) + \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k\lambda(v_{k-1}) + \varepsilon_k a_k \varepsilon(v_k) + \sum_{v \in \Delta} \varepsilon_k b_k(v) = 0.$$

Значит,

$$\begin{pmatrix} \lambda(v_k) \\ \lambda(v_{k+1}) \\ \lambda(u_1) \\ \lambda(u_2) \\ \vdots \\ \lambda(u_{n-2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\varepsilon_{k-1}\varepsilon_k & -\varepsilon_k a_k & -\varepsilon_k b_k(u_1) & -\varepsilon_k b_k(u_2) & \dots & -\varepsilon_k b_k(u_{n-2}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda(v_{k-1}) \\ \lambda(v_k) \\ \lambda(u_1) \\ \lambda(u_2) \\ \vdots \\ \lambda(u_{n-2}) \end{pmatrix}.$$

Аналогичные равенства верны для следующей пары соседних элементов из цикла, а так как через s таких переходов мы придем к первоначальному симплексу, справедливо равенство

$$\prod_{k=1}^s \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\varepsilon_{k-1}\varepsilon_k & -\varepsilon_k a_k & -\varepsilon_k b_k(u_1) & -\varepsilon_k b_k(u_2) & \dots & -\varepsilon_k b_k(u_{n-2}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Понятно, что этих условий достаточно, чтобы характеристическую функцию можно было продолжить с любого симплекса размерности $n-1$ на весь комплекс K . Осталось заметить, что это уравнение распадается на уравнения из формулировки теоремы для каждой вершины в отдельности, т. е. сводится к случаю $n=3$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если комплексу K_W соответствует торическое многообразие, то его раскраска тождественно плюсовая. Заметим, что незначительное усложнение определения весов связано с желанием согласовать его с весами, сопоставляемыми торическим многообразиям в [5], и при условии положительности раскраски наши веса соответствуют весам в [5].

Из сравнения с конструкцией из [5] вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (взаимосвязь с классификацией торических многообразий при $n=2$ и $n=3$). *При $n=2$ и $n=3$ комплексу K_W соответствует торическое многообразие тогда и только тогда, когда в классе эквивалентности, соответствующем K_W , существует представитель, удовлетворяющий следующим условиям:*

(a) для любого симплекса $\Delta \in K$ размерности $n-1$ выполняется равенство $\varepsilon(\Delta) = +1$;

(b) для любого симплекса $\Delta \in K$ размерности $n-2$ и кратности s

$$\sum_{i=1}^s a_i = 12 - 3s.$$

§3. Характеристические функции на I^3

В качестве приложения описанных выше результатов рассмотрим классификацию квазиторических многообразий над $P^3 = I^3$. Для этого сделаем заготовку: решим уравнение из теоремы 3 для $s = 4$. Рассмотрим «фрагмент» комплекса K ; для него есть две неэквивалентные раскраски, для каждой из которых мы решаем уравнение из теоремы:

В случае куба класс эквивалентности характеристической функции можно задать 3×3 -матрицей следующим образом. Пронумеруем грани куба $F_1, F_2, F_3, F'_1, F'_2, F'_3$ коразмерности 1 так, что $F_i \cap F'_i = \emptyset$. Пусть $\lambda(F_i) = e_i$, а $\lambda(F'_i)$ запишем в виде матрицы.

Для куба с учетом действия группы $\text{Aut}(K)$ имеется 5 неэквивалентных раскрасок (см рис. 1–5).

Найдя системы допустимых весов для каждой, получим все характеристические функции на I^3 :

• Рис. 1 соответствует семейство многообразий $M_1^6(a, b, c)$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$, со следующими 3×3 -матрицами:

$$\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\xi_b \rightarrow \mathbb{C}P(1)$ — одномерное комплексное расслоение с первым классом Чженя $c_1(\xi_b) = bu$, где u — образующая группы $H^2(\mathbb{C}P(1))$. Многообразие Хирцебруха — это двумерное комплексное многообразие $X_b^4 = \mathbb{C}P(\xi_b \oplus \mathbb{C})$, где $\mathbb{C}$ — тривиальное одномерное комплексное расслоение, а $\mathbb{C}P$ означает проективизацию комплексного расслоения. Существуют канонические эквивариантные расслоения

$$M_1^6(a, b, c) \xrightarrow{\mathbb{C}P(1)} X_b^4, \quad M_1^6(a, b, c) \xrightarrow{X_a^4} \mathbb{C}P(1).$$

• Рис. 2 соответствуют два квазиторических многообразия, различающиеся лишь ориентациями:

$$M_2^6 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3^6 = \overline{M}_2 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Рис. 3 соответствуют два семейства многообразий $M_4^6(b, c)$ и $M_5^6(b, c)$, где $b, c \in \mathbb{Z}$, с матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

соответственно. Существуют эквивариантные расслоения

$$M_4^6(b, c) \xrightarrow{\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2} \mathbb{C}P(1), \quad M_5^6(b, c) \xrightarrow{\mathbb{C}P(1)} \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2.$$

• Рис. 4 соответствуют три квазиторических многообразия, характеристические функции которых задаются следующими матрицами:

$$M_6^6 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_7^6 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_8^6 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Для раскраски рис. 5 нет ни одной системы допустимых весов, т.е. не существует ни одной характеристической функции, которой соответствует такая раскраска.

§4. Квазиторические многообразия над декартовым произведением нескольких симплексов

Назовем квазиторическое многообразие M приводимым, если для некоторого другого квазиторического многообразия N существует эквивариантное расслоение $M \rightarrow N$, где слой также является квазиторическим многообразием. Прямая проверка доказывает

Предложение 5. *Если M приводимо, то P разлагается в декартово произведение полиэдров меньшей размерности.*

Как было показано выше на примере I^3 , обратное неверно. Рассмотрим тогда полиэдр вместе с раскраской. По аналогии назовем такую пару (P, ε) приводимой, если приводим полиэдр: $P = P' \times P''$, причем на P' , P'' существуют такие раскраски ε' , ε'' , что $\varepsilon(v' \times v'') = \varepsilon'(v') \varepsilon''(v'')$ для любых вершин v' , v'' полиэдров P' , P'' соответственно.

ВОПРОС. Верно ли, что приводимость квазиторического многообразия эквивалентна приводимости соответствующего раскрашенного полиэдра?

Для произвольного полиэдра ответ на этот вопрос отрицательный. В качестве контрпримера рассмотрим призму, равную декартову произведению шестиугольника на отрезок, на основаниях которой значения характеристической функции равны $(1, 0, 0)$ и $(1, 0, b)$, а на расположенных последовательно боковых гранях — соответственно $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(a, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, причем a и b отличны от нуля. Но, оказывается, в частном случае произведения некоторого количества симплексов критерий все же верен.

Всюду далее $P^n = \Delta_1^{n_1} \times \dots \times \Delta_s^{n_s}$. Зафиксируем на P^n характеристическую функцию λ . Для $I \subset \{1, \dots, s\}$ через P_I обозначим полиэдр $\prod_{i \in I} \Delta_i^{n_i}$ размерности $\sum_{i \in I} n_i$. Отметив в каждом симплексе из произведения $\Delta_1^{n_1} \times \dots \times \Delta_s^{n_s}$ вершину, получим естественное вложение $P_I \subset P^n$. При этом на P_I индуцируется характеристическая функция λ_I (которая, вообще говоря, зависит от выбора отмеченных вершин).

Примем следующую форму записи характеристической функции на произведении симплексов: грани, соответствующие i -му симплексу, обозначим через $F_{i,1}, \dots, F_{i,n_i}, F'_i$ и положим $\lambda(F_{i,j}) = e_{n_1 + \dots + n_{i-1} + j} =: e_{i,j}$. Тогда характеристическая функция определяется своими значениями на F'_i , которые мы записываем в виде $n \times (m - n)$ -матрицы.

ТЕОРЕМА 6. Пусть разбиение множества $S = \{1, \dots, s\} = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_p$ соответствует разложению функции цвета на неприводимые множители: $\varepsilon = \varepsilon_{I_1} \times \dots \times \varepsilon_{I_p}$. Тогда найдется j , $1 \leq j \leq p$, для которого существует эквивариантное расслоение $M(P^n, \lambda) \rightarrow M(P_{S \setminus I_j}, \lambda_{S \setminus I_j})$ со слоем $M(P_{I_j}, \lambda_{I_j})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты будем вести доказательство теоремы для куба (случай произвольных симплексов разбирается аналогично). Пусть характеристическая функция задана матрицей A размера $n \times n$. Эта матрица обладает следующим свойством: для любого множества $J = J_1 \sqcup \dots \sqcup J_s$, где $J_k \subset I_k$, минор M_J равен произведению миноров $M_{J_1} M_{J_2} \dots M_{J_s}$. Введем матрицы B_k^l , стоящие на пересечении строк с номерами из I_k и столбцов с номерами из I_l матрицы A . Для удобства будем считать, что $I_i = \{\alpha_i, \alpha_i + 1, \dots, \alpha_{i+1} - 1\}$, где $\alpha_1 = 1$, $\alpha_{p+1} - 1 = n$. Тогда в матрице A можно выделить p диагональных блоков B_i^i , $1 \leq i \leq p$, соответствующих неприводимым характеристическим функциям на $I^{\alpha_{i+1} - \alpha_i}$ (далее мы называем их неприводимыми).

Будем вести доказательство индукцией по n . Утверждение теоремы для $n = 1$ очевидно. Предположим, что для кубов размерностей, меньших n , утверждение теоремы верно, а для нашего куба размерности n неверно. Тогда применение предположения индукции к его граням доказывает следующие два утверждения:

1. Существует такая перенумерация неприводимых блоков, что если $B_i^j \neq 0$, то $j = i$ или $j \equiv i + 1 \pmod{p}$.

2. Существует такая перенумерация неприводимых блоков и симплексов внутри каждого I_k , что если элемент α_i^j отличен от 0, то либо он находится внутри одного из диагональных неприводимых блоков не ниже диагонали, либо $j \equiv i + 1 \pmod{p}$.

Далее, определитель матрицы A должен быть равен произведению миноров $M_{I_1} \dots M_{I_p}$: значит, $M_{I_1} \dots M_{I_p} = M_{I_1} \dots M_{I_p} + (-1)^{n-1} a_1^2 a_2^3 \dots a_n^1$. Отсюда следует, что одно из чисел $a_1^2, a_2^3, \dots, a_n^1$ равно 0; значит, соответствующее квазиторическое многообразие приводимо. Противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 7. *Для полиэдра, разлагающегося в декартово произведение симплексов, приводимость квазиторического многообразия над ним эквивалентна приводимости соответствующей функции цвета.*

Таким образом, мы получаем, что классификация квазиторических многообразий над такими полиэдрами сводится к классификации тех из них, которые имеют неприводимые раскраски.

Становится тривиальным случай классификации квазиторических многообразий над произведениями симплексов, соответствующих тождественно плюсовой раскраске (заметим, что все торические многообразия именно такие). Согласно теореме, для них найдется такая перенумерация симплексов, для которой существует цепочка эквивариантных расслоений $M(P^n, \lambda) \rightarrow M(P_{S \setminus I_1}, \lambda_{S \setminus I_1}) \rightarrow \dots \rightarrow M(P_{I_s}, \lambda_{I_s})$. Фиксируем такую перенумерацию. Тогда нетрудно найти определяющие значения характеристической функции:

$$\lambda(F'_i) = \sum_{j=1}^{n_i} e_{i,j} + \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=1}^{n_k} a_{k,j} e_{k,j},$$

где $a_{k,j}$ — целые числа. В частном случае $s = 2$ получаем в точности многообразия, найденные Клейншмидтом при классификации торических многообразий над декартовым произведением двух симплексов в [4].

Автор выражает глубокую признательность В. М. Бухштаберу и Т. Е. Панову за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухштабер В. М., Рай Н. Торические многообразия и комплексные кобордизмы. УМН, **53**, вып. 2, 139–141 (1998).
2. Davis M. Smooth G -manifolds as collection of fiber bundles. Pacific J. Math., **77**, No. 2, 315–363 (1978).
3. Davis M., Januszkiewicz T. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions. Duke Math. J., **62**, No. 2, 417–451 (1991).
4. Kleinschmidt P. A classification of toric varieties with few generators. Aequationes Math., **35**, No. 2–3, 254–266 (1988).
5. Oda T. Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties. Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), Vol. 15, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
6. Orlik P., Raymond F. Actions of the torus on 4-manifolds. Trans. Amer. Math. Soc., **152**, 531–559 (1970).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
26 октября 1999 г.