Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Согласованные и почти согласованные псевдоримановы метрики, *Функц. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 2, 24–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa243>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 18:10:12

УДК 517.9+514.7

Согласованные и почти согласованные псевдоримановы метрики*

© 2001. О. И. МОХОВ

В настоящей работе вводятся понятия согласованных и почти согласованных римановых и псевдоримановых метрик, мотивированные теорией согласованных пуассоновых структур гидродинамического типа (локальных и нелокальных) и обобщающие понятие плоского пучка метрик, которое играет важную роль в теории интегрируемых систем гидродинамического типа и теории Дубровина-Фробениусовых многообразий [1] (см. также [2–8]). Согласованные метрики порождают согласованные пуассоновы структуры гидродинамического типа (эти структуры являются локальными для плоских метрик [9] и нелокальными, если метрики неплоские [10–14]), и их исследование необходимо для теории интегрируемых систем гидродинамического типа. Для «неособого» случая, когда собственные значения пары метрик различны, в данной работе получено полное явное описание согласованных и почти согласованных метрик. «Особый» случай совпадающих собственных значений пары метрик существенно сложнее для полного анализа и пока до конца не исследован. Тем не менее задача о двухкомпонентных согласованных плоских метриках изучена нами полностью, все такие пары, и «неособые», и «особые», классифицированы. В данной статье представлено полное описание неособых пар двухкомпонентных согласованных плоских метрик. Задачи классификации согласованных плоских метрик и согласованных метрик постоянной римановой кривизны представляют особый интерес, в частности, с точки зрения теории гамильтоновых систем гидродинамического типа. Более детальные классификационные результаты по этим задачам будут опубликованы в другой работе. В настоящей работе показано, что подход, предложенный Ферапонтовым в [4] для изучения плоских пучков метрик, применим с соответствующей модификацией и коррекцией и к пучкам метрик постоянной римановой кривизны, и к общим согласованным римановым или псевдоримановым метрикам, а также исправлена содержащаяся в [4] ошибка в критерии согласованности локальных невырожденных пуассоновых структур гидродинамического типа (или, другими словами, согласованности плоских метрик).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Две псевдоримановы контравариантные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ постоянной римановой кривизны K_1 и K_2 соответственно называются *согласованными*, если любая линейная комбинация этих метрик

$$g^{ij}(u) = \lambda_1 g_1^{ij}(u) + \lambda_2 g_2^{ij}(u), \quad (0.1)$$

где λ_1 и λ_2 — произвольные константы, для которых $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, является метрикой постоянной римановой кривизны $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$, а коэффициенты

*Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта (Германия), а также РФФИ (гранты №99-01-00010 и №96-15-96027) и INTAS (грант №99-1782).

соответствующих связностей Леви-Чивиты связаны тем же самым линейным соотношением:

$$\Gamma_k^{ij}(u) = \lambda_1 \Gamma_{1,k}^{ij}(u) + \lambda_2 \Gamma_{2,k}^{ij}(u). \quad (0.2)$$

Мы также будем говорить в этом случае, что метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ образуют пучок метрик постоянной римановой кривизны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.2. Две псевдоримановы контравариантные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называются *согласованными*, если для любой линейной комбинации (0.1) этих метрик коэффициенты соответствующих связностей Леви-Чивиты и компоненты соответствующих тензоров римановой кривизны связаны тем же самым линейным соотношением, т. е. имеют место равенства (0.2) и

$$R_{kl}^{ij}(u) = \lambda_1 R_{1,kl}^{ij}(u) + \lambda_2 R_{2,kl}^{ij}(u). \quad (0.3)$$

Мы также будем говорить в этом случае, что метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ образуют пучок метрик.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.3. Две псевдоримановы контравариантные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называются *почти согласованными*, если для любой линейной комбинации (0.1) этих метрик выполняется условие (0.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.4. Пара псевдоримановых метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называется *неособой*, если собственные значения этой пары метрик, т. е. корни уравнения

$$\det(g_1^{ij}(u) - \lambda g_2^{ij}(u)) = 0,$$

различны.

Эти определения мотивированы теорией согласованных скобок Пуассона гидродинамического типа. В случае когда метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ плоские, т. е. $R_{1,jkl}^i(u) = R_{2,jkl}^i(u) = 0$, соотношение (0.3) превращается в условие, что произвольная линейная комбинация плоских метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ тоже является плоской метрикой, и определение 0.2 эквивалентно известному определению плоского пучка метрик или, другими словами, согласованной пары локальных невырожденных пуассоновых структур гидродинамического типа [1] (см. также [2–8]). В случае когда метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ — метрики постоянной римановой кривизны K_1 и K_2 соответственно, т. е. $R_{1,kl}^{ij}(u) = K_1(\delta_k^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_k^j)$, $R_{2,kl}^{ij}(u) = K_2(\delta_k^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_k^j)$, соотношение (0.3) превращается в условие, что произвольная линейная комбинация (0.1) метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является метрикой постоянной римановой кривизны $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$, а определение 0.2 эквивалентно определению 0.1 пучка метрик постоянной римановой кривизны или, другими словами, согласованной пары соответствующих нелокальных пуассоновых структур гидродинамического типа, введенных и изученных автором и Ферапонтовым в [10]. Согласованные метрики более общего типа соответствуют согласованным парам нелокальных пуассоновых структур гидродинамического типа, введенных и изученных Ферапонтовым в [11].

Как было ранее отмечено автором в [6–8], условие (0.3) следует из условия (0.2) в случае некоторых специальных редукций, связанных с уравнениями ассоциативности. Это неслучайно. При некоторых естественных и достаточно общих предположениях о метриках (достаточно, но не необходимо, в частности, чтобы собственные значения рассматриваемой пары метрик были различными) из почти

согласованности метрик следует их согласованность, хотя в общем случае это, вообще говоря, неверно даже для плоских метрик (мы укажем соответствующие контрпримеры). В связи с этим мы подчеркиваем, что условие (0.2), которое существенно проще условия (0.3), «почти обеспечивает» согласованность метрик и заслуживает отдельного изучения, но в общем случае для согласованности соответствующих пуассоновых структур гидродинамического типа необходимо требовать и выполнения условия (0.3). Интересно было бы выяснить, гарантирует ли условие (0.3) выполнение условия (0.2) (задача).

§1. Согласованные локальные пуассоновы структуры гидродинамического типа

Локальной пуассоновой структурой гидродинамического типа или *структурой Дубровина–Новикова* [9] называется произвольная локальная однородная скобка Пуассона первого порядка, т. е. скобка Пуассона вида

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx, \quad (1.1)$$

где $u^1, \dots, u^N$ — локальные координаты на некотором гладком N -мерном многообразии M ; здесь $u^i(x)$, $1 \leq i \leq N$, — функции (поля) одной независимой переменной x , $I[u]$ и $J[u]$ — произвольные функционалы на пространстве полей $u^i(x)$, а коэффициенты $g^{ij}(u)$ и $b_k^{ij}(u)$ скобки (1.1) — гладкие функции на M . Скобка (1.1) называется *невыврожденной*, если $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$.

ТЕОРЕМА 1.1 [9]. *Если $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, то скобка (1.1) является скобкой Пуассона тогда и только тогда, когда $g^{ij}(u)$ — произвольная плоская псевдориманова метрика и $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u)\Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ — риманова связность, порождаемая метрикой $g^{ij}(u)$.*

Следовательно, для любой локальной невырожденной пуассоновой структуры гидродинамического типа всегда существуют локальные координаты $v^1, \dots, v^N$ (плоские координаты метрики $g^{ij}(u)$), в которых скобка имеет постоянный вид

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta v^i(x)} \eta^{ij} \frac{d}{dx} \frac{\delta J}{\delta v^j(x)} dx, \quad (1.2)$$

где (η^{ij}) — невырожденная симметричная постоянная матрица: $\eta^{ij} = \eta^{ji}$, $\eta^{ij} = \text{const}$, $\det(\eta^{ij}) \neq 0$.

С другой стороны, еще в 1978 г. в [15] Магри предложил бигамильтонов подход к интегрированию нелинейных систем, продемонстрировав, что интегрируемость тесно связана с бигамильтоновостью, т. е. наличием у системы двух согласованных гамильтоновых представлений. Бигамильтонову подходу и построению согласованных пуассоновых структур для многих конкретных важных интегрируемых уравнений математической физики и теории поля посвящена обширная литература, начиная с [15] (см., например, [16] и приведенные там ссылки). Что касается задачи описания достаточно широких классов согласованных пуассоновых структур определенных специальных типов, то, по-видимому, первая такая постановка была рассмотрена в [17, 18] (см. также [19, 20]), где автором данной статьи была поставлена и полностью решена задача описания всех согласованных локальных скалярных скобок Пуассона первого и третьего порядков, т. е. всех согласованных скобок Пуассона, задаваемых произвольными скалярными дифференциальными

операторами первого и третьего порядков (обобщающих хорошо известную согласованную пару скобок Гарднера–Захарова–Фаддеева (первого порядка) и Магри (третьего порядка) для уравнения Кортевега–де Фриза).

В случае однородных систем гидродинамического типа многие интегрируемые системы обладают согласованными локальными пуассоновыми структурами гидродинамического типа, задачи описания которых для конкретных систем и многочисленные примеры рассматривались во многих работах (см., например, ссылки в [4] или [7]). В частности, в [21] Нутку изучал специальный класс согласованных двухкомпонентных локальных пуассоновых структур гидродинамического типа и связанные с ним бигамильтоновы гидродинамические системы.

В общем виде задача описания плоских пучков метрик (или, другими словами, согласованных невырожденных локальных пуассоновых структур гидродинамического типа) была рассмотрена Дубровиным в [1, 2] в связи с построением важных примеров плоских пучков метрик, порождаемых естественными парами плоских метрик на пространствах орбит групп Кокстера и на других фробениусовых многообразиях и связанных с квазиоднородными решениями уравнений ассоциативности. В теории фробениусовых многообразий, которые введены и изучены Дубровиным [1, 2] (они отвечают двумерным топологическим теориям поля), ключевую роль играют плоские пучки метрик, обладающие рядом специальных дополнительных (и весьма жестких) свойств (удовлетворяющие так называемым условиям квазиоднородности). Более того, в [3] Дубровин доказал, что теория фробениусовых многообразий эквивалентна теории квазиоднородных плоских пучков метрик.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [15]. Две скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_1$ и $\{\cdot, \cdot\}_2$ называются *согласованными*, если произвольная линейная комбинация этих скобок Пуассона $\{\cdot, \cdot\} = \lambda_1 \{\cdot, \cdot\}_1 + \lambda_2 \{\cdot, \cdot\}_2$, где λ_1 и λ_2 — произвольные константы, также является скобкой Пуассона.

Соответственно задача описания согласованных невырожденных локальных пуассоновых структур гидродинамического типа является чисто дифференциально-геометрической задачей описания плоских пучков метрик (см. [1, 2]). В [1, 2] Дубровин выписал все тензорные соотношения для общих плоских пучков метрик.

В работе автора [5] сформулирован явный и простой *критерий* согласованности двух пуассоновых структур гидродинамического типа, т. е. указано, какой явный вид необходимо и достаточно иметь пуассоновым структурам гидродинамического типа, чтобы быть согласованными. Пока такой явный общий критерий удастся сформулировать только на языке именно пуассоновых структур, но не на языке метрик (см. также [1]).

ЛЕММА 1.1 [5] (явный критерий согласованности пуассоновых структур гидродинамического типа). *Произвольная локальная пуассонова структура гидродинамического типа $\{I, J\}_2$ является согласованной с постоянной невырожденной скобкой Пуассона (1.2) тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$\{I, J\}_2 = \int \frac{\delta I}{\delta v^i(x)} \left(\left(\eta^{is} \frac{\partial h^j}{\partial v^s} + \eta^{js} \frac{\partial h^i}{\partial v^s} \right) \frac{d}{dx} + \eta^{is} \frac{\partial^2 h^j}{\partial v^s \partial v^k} v_x^k \right) \frac{\delta J}{\delta v^j(x)} dx, \quad (1.3)$$

где $h^i(v)$, $1 \leq i \leq N$, — гладкие функции, определенные в некоторой окрестности.

Невырожденность скобки Пуассона гидродинамического типа $\{I, J\}_2$ в лемме 1.1 не требуется.

В 1995 г. в работе [4] Ферапонтов предложил подход к задаче о плоских пучках метрик, мотивированный теорией операторов рекурсии, и сформулировал без доказательства следующую теорему в качестве критерия согласованности невырожденных локальных пуассоновых структур гидродинамического типа:

ТЕОРЕМА 1.2 [4]. *Две локальные невырожденные пуассоновы структуры гидродинамического типа, задаваемые плоскими метриками $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$, согласованы тогда и только тогда, когда тензор Нейенхейса, т. е.*

$$N_{ij}^k(u) = v_i^s(u) \frac{\partial v_j^k}{\partial u^s} - v_j^s(u) \frac{\partial v_i^k}{\partial u^s} + v_s^k(u) \frac{\partial v_i^s}{\partial u^j} - v_s^k(u) \frac{\partial v_j^s}{\partial u^i}, \quad (1.4)$$

тождественно равен нулю для аффинора

$$v_j^i(u) = g_1^{is}(u) g_{2,sj}(u). \quad (1.5)$$

Кроме того, в замечании указывалось, что в случае, если спектр $v_j^i(u)$ простой, обнуление тензора Нейенхейса влечет за собой существование координат $R^1, \dots, R^N$, в которых все объекты $v_j^i(u)$, $g_1^{ij}(u)$, $g_2^{ij}(u)$ становятся диагональными. Более того, в этих координатах i -е собственное значение аффинора $v_j^i(u)$ зависит только от координаты R^i . Соответственно в случае, если все собственные значения не являются постоянными, они могут быть выбраны в качестве новых координат. В этих новых координатах $\tilde{v}_j^i(R) = \text{diag}(R^1, \dots, R^N)$, $\tilde{g}_2^{ij}(R) = \text{diag}(g^1(R), \dots, g^N(R))$, $\tilde{g}_1^{ij}(R) = \text{diag}(R^1 g^1(R), \dots, R^N g^N(R))$.

К сожалению, в общем случае теорема 1.2 неверна и в связи с этим не является критерием согласованности плоских метрик. Из обнуления соответствующего тензора Нейенхейса, вообще говоря, не следует согласованность плоских метрик. Мы приведем далее соответствующие контрпримеры. В общем случае, как будет показано ниже, теорема 1.2 является в действительности критерием почти согласованности плоских метрик, что не гарантирует согласованность соответствующих невырожденных локальных пуассоновых структур гидродинамического типа. Но если спектр аффинора $v_j^i(u)$ простой, т. е. все собственные значения различны, то, как доказано в данной работе, теорема 1.2 не только верна, но и допускает существенное обобщение на случай произвольных согласованных римановых или псевдоримановых метрик, в частности, на особенно важные в теории систем гидродинамического типа случаи метрик постоянной римановой кривизны или метрик, порождающих общие нелокальные пуассоновы структуры гидродинамического типа. А именно, имеет место следующая теорема:

ТЕОРЕМА 1.3. 1. *Если для произвольной линейной комбинации (0.1) двух метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ выполняется условие (0.2), то тензор Нейенхейса (1.4) аффинора (1.5) тождественно равен нулю. Таким образом, для согласованных и почти согласованных метрик соответствующий тензор Нейенхейса всегда тождественно равен нулю.*

2. *Если пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является неособой, то из обнуления тензора Нейенхейса аффинора (1.5) следует согласованность метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$. Таким образом, неособая пара метрик является согласованной тогда и только тогда, когда она является почти согласованной.*

§2. Почти согласованные метрики и тензор Нейенхейса

Рассмотрим две произвольные контравариантные псевдоримановы метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$, а также соответствующие им коэффициенты связностей Леви-Чивиты $\Gamma_{1,k}^{ij}(u)$ и $\Gamma_{2,k}^{ij}(u)$.

Введем тензор

$$M^{ijk}(u) = g_1^{is}(u)\Gamma_{2,s}^{jk}(u) - g_2^{js}(u)\Gamma_{1,s}^{ik}(u) - g_1^{js}(u)\Gamma_{2,s}^{ik}(u) + g_2^{is}(u)\Gamma_{1,s}^{jk}(u). \quad (2.1)$$

ЛЕММА 2.1. *Тензор $M^{ijk}(u)$ тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ являются почти согласованными.*

Введем аффиноры (1.5) и рассмотрим тензор Нейенхейса (1.4) этого аффинора.

ТЕОРЕМА 2.1. *Метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ являются почти согласованными тогда и только тогда, когда соответствующий тензор Нейенхейса $N_{ij}^k(u)$ (1.4) тождественно равен нулю.*

ЛЕММА 2.2. *Имеют место следующие тождества:*

$$g_{1,sp}(u)N_{rq}^p(u)g_2^{ri}(u)g_2^{qj}(u)g_2^{sk}(u) = M^{kji}(u) + M^{ikj}(u) + M^{ijk}(u), \quad (2.2)$$

$$2M^{kji}(u) = g_{1,sp}(u)N_{rq}^p(u)g_2^{ri}(u)g_2^{qj}(u)g_2^{sk}(u) - g_{1,sp}(u)N_{rq}^p(u)g_2^{ri}(u)g_2^{qk}(u)g_2^{sj}(u). \quad (2.3)$$

§3. Согласованные метрики и тензор Нейенхейса

Допустим, что пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является неособой, и предположим, что соответствующий тензор Нейенхейса тождественно равен нулю. Докажем, что в этом случае метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ являются согласованными. Очевидно, что собственные значения пары метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ совпадают с собственными значениями аффинора $v_j^i(u)$, а хорошо известно, что если все собственные значения аффинора различны, то из тождественного равенства нулю его тензора Нейенхейса следует, что локальной заменой координат этот аффиноры приводится к диагональному виду в соответствующей окрестности [22]. Будем далее считать, что аффиноры $v_j^i(u)$ является диагональным: $v_j^i(u) = \lambda^i(u)\delta_j^i$.

ЛЕММА 3.1. *Если аффиноры (1.5) является диагональным в некоторых локальных координатах и все его собственные значения различны, то в этих координатах метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ тоже являются диагональными.*

Действительно, $g_1^{ij}(u) = \lambda^i(u)g_2^{ij}(u)$. Из симметричности метрик следует, что $(\lambda^i(u) - \lambda^j(u))g_2^{ij}(u) = 0$ для любых i, j , т. е. $g_2^{ij}(u) = g_1^{ij}(u) = 0$ при $i \neq j$.

ЛЕММА 3.2. *Пусть аффиноры $w_j^i(u)$ является диагональным, т. е. $w_j^i(u) = \mu^i(u)\delta_j^i$.*

1. *Если все собственные значения диагонального аффинора различны, то тензор Нейенхейса этого аффинора тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда i -е собственное значение $\mu^i(u)$ зависит только от координаты u^i .*

2. *Если все собственные значения совпадают, то тензор Нейенхейса тождественно равен нулю.*

3. *В общем случае диагонального аффинора тензор Нейенхейса равен нулю тогда и только тогда, когда $\partial\mu^i/\partial u^j = 0$ для всех i, j , таких, что $\mu^i(u) \neq \mu^j(u)$.*

Для диагонального аффинора $w_j^i(u) = \mu^i(u)\delta_j^i$ тензор Нейенхейса имеет вид

$$N_{ij}^k(u) = (\mu^i - \mu^k) \frac{\partial \mu^j}{\partial u^i} \delta^{kj} - (\mu^j - \mu^k) \frac{\partial \mu^i}{\partial u^j} \delta^{ki}.$$

Таким образом, тензор Нейенхейса тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда для всех i, j

$$(\mu^i(u) - \mu^j(u)) \frac{\partial \mu^i}{\partial u^j} = 0,$$

где нет суммирования по индексам.

Из лемм 3.1 и 3.2 следует, что для неособой пары почти согласованных метрик всегда существуют локальные координаты, в которых метрики имеют вид

$$g_2^{ij}(u) = g^i(u)\delta^{ij}, \quad g_1^{ij}(u) = \lambda^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}, \quad \lambda^i = \lambda^i(u^i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Более того, мы немедленно получаем, что диагональные метрики вида $g_2^{ij}(u) = g^i(u)\delta^{ij}$ и $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$ для любых ненулевых функций $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$ (функции $f^i(u^i)$ могут быть здесь, например, совпадающими ненулевыми константами, т. е. пара метрик может быть «особой»), всегда являются почти согласованными. Докажем, что они всегда согласованы.

Рассмотрим диагональные метрики $g_2^{ij}(u) = g^i(u)\delta^{ij}$ и $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$, где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, — произвольные функции одной переменной, не равные нулю тождественно, и рассмотрим их произвольную линейную комбинацию $g^{ij}(u) = (\lambda_2 + \lambda_1 f^i(u^i))g^i(u)\delta^{ij}$. Докажем, что всегда выполняется соотношение (0.3) для соответствующих тензоров римановой кривизны. Напомним, что для любой диагональной метрики $\Gamma_{jk}^i(u) = 0$, если все индексы i, j, k различны. Соответственно $R_{kl}^{ij}(u) = 0$, если все индексы i, j, k, l различны. Кроме того, в силу хорошо известных симметрий тензора римановой кривизны имеем

$$R_{kl}^{ii}(u) = R_{kk}^{ij}(u) = 0, \quad R_{il}^{ij}(u) = -R_{li}^{ij}(u) = R_{li}^{ji}(u) = -R_{il}^{ji}(u).$$

Таким образом, достаточно доказать соотношение (0.3) для компонент тензора римановой кривизны вида $R_{il}^{ij}(u)$, где $i \neq j$, $i \neq l$. Необходимо рассмотреть отдельно два случая.

1) $j \neq l$.

$$\begin{aligned} R_{2,il}^{ij}(u) &= \frac{1}{2} g^i(u) \frac{\partial}{\partial u^l} \left(\frac{g^j(u)}{(g^i(u))^2} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \right) + \frac{1}{4} \frac{g^j(u)}{(g^i(u))^2} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \frac{\partial g^i}{\partial u^l} \\ &\quad - \frac{1}{4g^i(u)} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \frac{\partial g^j}{\partial u^l} + \frac{1}{4} \frac{g^j(u)}{g^i(u)g^l(u)} \frac{\partial g^l}{\partial u^j} \frac{\partial g^i}{\partial u^l}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для метрики $g^{ij}(u) = (\lambda_2 + \lambda_1 f^i(u^i))g^i(u)\delta^{ij}$ получаем

$$\begin{aligned} R_{il}^{ij}(u) &= (\lambda_2 + \lambda_1 f^j(u^j)) \left[\frac{1}{2} g^i(u) \frac{\partial}{\partial u^l} \left(\frac{g^j(u)}{(g^i(u))^2} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \frac{g^j(u)}{(g^i(u))^2} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \frac{\partial g^i}{\partial u^l} - \frac{1}{4g^i(u)} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \frac{\partial g^j}{\partial u^l} + \frac{1}{4} \frac{g^j(u)}{g^i(u)g^l(u)} \frac{\partial g^l}{\partial u^j} \frac{\partial g^i}{\partial u^l} \right] \\ &= \lambda_1 R_{1,il}^{ij}(u) + \lambda_2 R_{2,il}^{ij}(u). \end{aligned} \quad (3.2)$$

2) $j = l$.

$$\begin{aligned}
 R_{2,ij}^{ij}(u) &= \frac{1}{2} g^i(u) \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{1}{g^j(u)} \frac{\partial g^j}{\partial u^i} \right) + \frac{1}{2} g^i(u) \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{g^j(u)}{(g^i(u))^2} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \right) \\
 &+ \frac{1}{4} \frac{g^j(u)}{(g^i(u))^2} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \frac{\partial g^j}{\partial u^i} - \frac{1}{4} \frac{g^i(u)}{(g^j(u))^2} \frac{\partial g^j}{\partial u^i} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \\
 &+ \frac{1}{4g^j(u)} \frac{\partial g^j}{\partial u^i} \frac{\partial g^i}{\partial u^i} - \sum_{s \neq i} \frac{1}{4} \frac{g^s(u)}{g^i(u)g^j(u)} \frac{\partial g^j}{\partial u^s} \frac{\partial g^i}{\partial u^s}. \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Для метрики $g^{ij}(u) = (\lambda_2 + \lambda_1 f^i(u^i))g^i(u)\delta^{ij}$ получаем

$$\begin{aligned}
 R_{ij}^{ij}(u) &= \frac{1}{2} (\lambda_2 + \lambda_1 f^i(u^i))g^i(u) \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{1}{g^j(u)} \frac{\partial g^j}{\partial u^i} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} g^i(u) \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{(\lambda_2 + \lambda_1 f^j(u^j))g^j(u)}{(g^i(u))^2} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \right) \\
 &+ \frac{1}{4} (\lambda_2 + \lambda_1 f^j(u^j)) \frac{g^j(u)}{(g^i(u))^2} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \frac{\partial g^j}{\partial u^i} \\
 &- \frac{1}{4} (\lambda_2 + \lambda_1 f^i(u^i)) \frac{g^i(u)}{(g^j(u))^2} \frac{\partial g^j}{\partial u^i} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} + \frac{1}{4g^j(u)} \frac{\partial g^j}{\partial u^i} \frac{\partial((\lambda_2 + \lambda_1 f^i(u^i))g^i)}{\partial u^i} \\
 &- \frac{1}{4g^i(u)} \frac{\partial g^i}{\partial u^j} \frac{\partial((\lambda_2 + \lambda_1 f^j(u^j))g^j)}{\partial u^j} \\
 &- \sum_{s \neq i, s \neq j} \frac{1}{4} \frac{(\lambda_2 + \lambda_1 f^s(u^s))g^s(u)}{g^i(u)g^j(u)} \frac{\partial g^j}{\partial u^s} \frac{\partial g^i}{\partial u^s} \\
 &= \lambda_1 R_{1,ij}^{ij}(u) + \lambda_2 R_{2,ij}^{ij}(u). \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Теорема 1.3 доказана. Более того, получено полное описание неособых согласованных и почти согласованных метрик и доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. *Произвольная неособая пара метрик является согласованной тогда и только тогда, когда существуют локальные координаты $u = (u^1, \dots, u^N)$, такие, что $g_2^{ij}(u) = g^i(u)\delta^{ij}$ и $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$, где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, — функции одной переменной.*

Рассмотрим задачу о неособых парах согласованных плоских метрик. В силу теоремы 3.1 достаточно классифицировать плоские метрики вида $g_2^{ij}(u) = g^i(u)\delta^{ij}$ и $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$, где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, — произвольные функции одной переменной. Задача описания плоских диагональных метрик, т.е. плоских метрик $g_2^{ij}(u) = g^i(u)\delta^{ij}$, является классической задачей дифференциальной геометрии; она эквивалентна задаче описания ортогональных криволинейных координат в псевдоевклидовом пространстве, хорошо изучена и решена в начале 20-го века (см. [23]). Локально такие системы координат определяются $N(N-1)/2$ произвольными функциями двух переменных. Недавно Захаров показал, что уравнения Ламе, описывающие ортогональные криволинейные системы координат, интегрируются методом обратной задачи [24]. Условие, что метрика $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$ тоже является плоской, дает в точности $N(N-1)/2$ уравнений, линейных по функциям $f^i(u^i)$. Отметим, что компоненты (3.1) тензора

римановой кривизны в этом случае обнуляются автоматически в силу равенства (3.2), а обнуление компонент (3.3) дает соответствующие $N(N-1)/2$ уравнений. В частности, в случае $N = 2$ это полностью решает задачу описания неособых пар согласованных плоских метрик. Автором доказано, что и при любом N эта задача, а также более общая задача описания всех неособых пар согласованных метрик постоянной римановой кривизны являются интегрируемыми методом обратной задачи теории рассеяния. Соответствующие результаты по интегрируемости мы изложим в другой статье. Приведем здесь полное описание неособых пар двухкомпонентных согласованных плоских метрик. Выше было доказано, что всегда существуют локальные координаты u^1, u^2 , в которых неособая пара согласованных двухкомпонентных метрик имеет вид

$$(g_2^{ij}(u)) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon^1}{(b^1(u))^2} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon^2}{(b^2(u))^2} \end{pmatrix}, \quad (g_1^{ij}(u)) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon^1 f^1(u^1)}{(b^1(u))^2} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon^2 f^2(u^2)}{(b^2(u))^2} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

где $\varepsilon^i = \pm 1$, $i = 1, 2$, $b^i(u)$ и $f^i(u^i)$, $i = 1, 2$, — произвольные ненулевые функции.

ЛЕММА 3.3. *Произвольная диагональная метрика $g_2^{ij}(u)$ (3.5) является плоской тогда и только тогда, когда функции $b^i(u)$, $i = 1, 2$, являются решениями линейной системы*

$$\frac{\partial b^2}{\partial u^1} = \varepsilon^1 \frac{\partial F}{\partial u^2} b^1(u), \quad \frac{\partial b^1}{\partial u^2} = -\varepsilon^2 \frac{\partial F}{\partial u^1} b^2(u), \quad (3.6)$$

где $F(u)$ — произвольная функция.

ТЕОРЕМА 3.2. *Метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ из формулы (3.5) образуют плоский пучок метрик тогда и только тогда, когда функции $b^i(u)$, $i = 1, 2$, являются решениями линейной системы (3.6), где функция $F(u)$ есть решение линейного уравнения*

$$2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^1 \partial u^2} (f^1(u^1) - f^2(u^2)) + \frac{\partial F}{\partial u^2} \frac{df^1(u^1)}{du^1} - \frac{\partial F}{\partial u^1} \frac{df^2(u^2)}{du^2} = 0. \quad (3.7)$$

§4. Почти согласованные метрики, которые не являются согласованными

ЛЕММА 4.1. *Двухкомпонентная диагональная конформно-евклидова метрика*

$$g^{ij}(u) = e^{a(u)} \delta^{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

является плоской тогда и только тогда, когда функция $a(u)$ гармоническая, т. е.

$$\Delta a \equiv \frac{\partial^2 a}{\partial (u^1)^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial (u^2)^2} = 0. \quad (4.1)$$

В частности, метрика $g_1^{ij}(u) = e^{u^1 u^2} \delta^{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$, является плоской. Очевидно, что плоские метрики $g_1^{ij}(u) = e^{u^1 u^2} \delta^{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$, и $g_2^{ij}(u) = \delta^{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$, почти согласованы, так как тензор Нейенхейса (1.4) для них тождественно равен нулю. При этом из леммы 4.1 следует, что согласованными эти метрики не являются, и их сумма не является плоской метрикой.

Аналогичным образом можно построить и другие контрпримеры к теореме 1.2. Более того, имеет место следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Любая непостоянная вещественная гармоническая функция $a(u)$ определяет пару почти согласованных плоских метрик $g_1^{ij}(u) = e^{a(u)}\delta^{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$, и $g_2^{ij}(u) = \delta^{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$, которые не являются согласованными. Эти метрики согласованы тогда и только тогда, когда $a = a(u^1 \pm iu^2)$.

Построим также почти согласованные метрики постоянной римановой кривизны, которые не являются согласованными.

ЛЕММА 4.2. Двухкомпонентная диагональная конформно-евклидова метрика

$$g^{ij}(u) = e^{a(u)}\delta^{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

является метрикой постоянной римановой кривизны K тогда и только тогда, когда функция $a(u)$ является решением уравнения Лиувилля:

$$\Delta a \equiv \frac{\partial^2 a}{\partial (u^1)^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial (u^2)^2} = 2Ke^{-a(u)}. \quad (4.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Метрики $g_1^{ij}(u) = e^{a(u)}\delta^{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$, и $g_2^{ij}(u) = \delta^{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$, всегда являются почти согласованными. При этом они являются согласованными вещественными метриками постоянной римановой кривизны K и 0 соответственно только в тривиальном случае, когда функция $a(u)$ постоянна и, следовательно, $K = 0$. Комплексные метрики согласованы тогда и только тогда, когда $a(u) = a(u^1 \pm iu^2)$; при этом также $K = 0$.

Отметим, что все однокомпонентные «метрики» всегда согласованы и все однокомпонентные локальные пуассоновы структуры гидродинамического типа тоже всегда согласованы. Построим для любого $N > 1$ примеры почти согласованных метрик, которые не являются согласованными.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Метрики $g_1^{ij}(u) = b(u)\delta^{ij}$, $1 \leq i, j \leq N$, и $g_2^{ij}(u) = \delta^{ij}$, $1 \leq i, j \leq N$, где $b(u)$ — произвольная функция, всегда являются почти согласованными. При этом они являются согласованными вещественными метриками только в тривиальном случае, когда функция $b(u)$ постоянна. Комплексные метрики согласованы тогда и только тогда, когда функция $b(u)$ либо является постоянной, либо $N = 2$ и $b(u) = b(u^1 \pm iu^2)$.

§5. Согласованные метрики и нелокальные пуассоновы структуры гидродинамического типа

Нелокальные пуассоновы структуры гидродинамического типа были введены и изучены в работе автора и Ферапонтова [10] (см. также [11–14]). Они имеют следующий вид:

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k + K u_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} u_x^j \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx, \quad (5.1)$$

где K — произвольная константа. Скобка вида (5.1) называется невырожденной, если $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$.

ТЕОРЕМА 5.1 [10]. Если $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, то скобка (5.1) является скобкой Пуассона тогда и только тогда, когда $g^{ij}(u)$ — произвольная псевдориманова

метрика постоянной римановой кривизны K и $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u)\Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ — риманова связность, порождаемая метрикой $g^{ij}(u)$.

ТЕОРЕМА 5.2. *Нелокальные невырожденные скобки Пуассона вида (5.1) согласованы тогда и только тогда, когда согласованы их метрики.*

В [11] Ферапонтов ввел и изучил более общие нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа, а именно скобки вида

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k \right. \\ \left. + \sum_{\alpha=1}^L (w^\alpha)_k^i(u) u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} (w^\alpha)_s^j(u) u_x^s \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx, \quad \det(g^{ij}(u)) \neq 0. \quad (5.2)$$

ТЕОРЕМА 5.3 [11]. *Скобка (5.2) является скобкой Пуассона тогда и только тогда, когда $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u)\Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ — риманова связность, порождаемая метрикой $g^{ij}(u)$, а метрика $g^{ij}(u)$ и набор аффиноров $(w^\alpha)_j^i(u)$ удовлетворяют соотношениям*

$$g_{ik}(u)(w^\alpha)_j^k(u) = g_{jk}(u)(w^\alpha)_i^k(u), \quad \alpha = 1, \dots, L, \quad (5.3)$$

$$\nabla_k(w^\alpha)_j^i(u) = \nabla_j(w^\alpha)_k^i(u), \quad \alpha = 1, \dots, L, \quad (5.4)$$

$$R_{kl}^{ij}(u) = \sum_{\alpha=1}^L ((w^\alpha)_k^i(u)(w^\alpha)_l^j(u) - (w^\alpha)_k^j(u)(w^\alpha)_l^i(u)). \quad (5.5)$$

Кроме того, семейство аффиноров $w^\alpha(u)$ коммутативное: $[w^\alpha, w^\beta] = 0$.

ТЕОРЕМА 5.4. *Если нелокальные скобки Пуассона вида (5.2) согласованы, то согласованы их метрики.*

Действительно, если нелокальные скобки Пуассона вида (5.2) согласованы, то из условия согласованности и теоремы 5.3 следует, что, во-первых, выполняется условие (0.2) и, во-вторых, тензор кривизны для метрики $g^{ij}(u) = \lambda_1 g_1^{ij}(u) + \lambda_2 g_2^{ij}(u)$ имеет вид

$$R_{kl}^{ij}(u) = \sum_{\alpha=1}^{L_1} \lambda_1 ((w_1^\alpha)_k^i(u)(w_1^\alpha)_l^j(u) - (w_1^\alpha)_k^j(u)(w_1^\alpha)_l^i(u)) \\ + \sum_{\alpha=1}^{L_2} \lambda_2 ((w_2^\alpha)_k^i(u)(w_2^\alpha)_l^j(u) - (w_2^\alpha)_k^j(u)(w_2^\alpha)_l^i(u)) \\ = \lambda_1 R_{1,kl}^{ij}(u) + \lambda_2 R_{kl}^{2,ij}(u).$$

По-видимому, всегда верно и обратное утверждение (это наша гипотеза, которая пока в общем случае строго не доказана).

Соотношения (5.3)–(5.5) — это уравнения Гаусса–Петерсона–Кодацци для N -мерных поверхностей M с плоской нормальной связностью в псевдоевклидовом пространстве E^{N+L} . При этом $g_{ij}(u)$ — первая квадратичная форма поверхности M , а $w^\alpha(u)$ — операторы Вейнгартена [11]. Рассмотрим подробнее случай согласованных нелокальных пуассоновых структур гидродинамического типа, отвечающих поверхностям с голономной сетью линий кривизны (см. [4]).

Этот случай («диагональный») наиболее интересен и важен для приложений (мы не приводим здесь из-за экономии места соответствующих многочисленных важных примеров — см., например, [11, 12, 26] или обзор [25]).

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть две нелокальные скобки Пуассона вида (5.2) соответствуют поверхностям с голономной сетью линий кривизны и заданы в координатах линий кривизны. В этом случае, если соответствующая пара метрик неособа, то скобки Пуассона (5.2) согласованы тогда и только тогда, когда согласованы их метрики.

В этом случае метрики $g_1^{ij}(u) = g_1^i(u)\delta^{ij}$ и $g_2^{ij}(u) = g_2^i(u)\delta^{ij}$, а также операторы Вейнгартена $(w_1^\alpha)_j^i(u) = (w_1^\alpha)^i(u)\delta_j^i$ и $(w_2^\alpha)_j^i(u) = (w_2^\alpha)^i(u)\delta_j^i$ являются диагональными в рассматриваемых координатах. Докажем, что в любом таком «диагональном» случае скобки Пуассона вида (5.2) согласованы тогда и только тогда, когда согласованы их метрики. В «диагональном» случае условие (5.3) выполняется автоматически, все операторы Вейнгартена коммутируют между собой, а условия (5.4) и (5.5) принимают вид

$$2g^i(u) \frac{\partial(w^\alpha)^i}{\partial u^k} = ((w^\alpha)^i - (w^\alpha)^k) \frac{\partial g^i}{\partial u^k} \quad \text{для всех } i \neq k, \quad (5.6)$$

$$R_{ij}^{ij}(u) = \sum_{\alpha=1}^L (w^\alpha)^i(u)(w^\alpha)^j(u), \quad (5.7)$$

соответственно.

Из неособости пары метрик и их согласованности следует, что соответствующий тензор Нейенхейса тождественно равен нулю и существуют функции $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, такие, что $g_1^i(u) = f^i(u^i)g_2^i(u)$. Используя соотношения (5.6) и (5.7), нетрудно убедиться, что в этом случае из согласованности метрик следует, что произвольная линейная комбинация рассматриваемых нелокальных скобок Пуассона также всегда является скобкой Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dubrovin B. Geometry of 2D topological field theories. Lect. Notes Math., Vol. 1620, 1996, pp. 120–348; hep-th/9407018.
2. Dubrovin B. Differential geometry of the space of orbits of a Coxeter group. Preprint SISSA-29/93/FM; hep-th/9303152.
3. Dubrovin B. Flat pencils of metrics and Frobenius manifolds. Preprint SISSA 25/98/FM; math.DG/9803106.
4. Ferapontov E. V. Nonlocal Hamiltonian operators of hydrodynamic type: differential geometry and applications. In: Topics in topology and mathematical physics. S. P. Novikov ed., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 33–58.
5. Мохов О. И. О согласованных пуассоновых структурах гидродинамического типа. УМН, **52**, вып. 6, 171–172 (1997).
6. Мохов О. И. О согласованных потенциальных деформациях фробениусовых алгебр и уравнениях ассоциативности. УМН, **53**, вып. 2, 153–154 (1998).
7. Мохов О. И. Согласованные пуассоновы структуры гидродинамического типа и уравнения ассоциативности. Труды МИРАН, **225**, 284–300 (1999).
8. Mokhov O. I. Compatible Poisson structures of hydrodynamic type and the equations of associativity in two-dimensional topological field theory. Reports on Mathematical Physics, **43**, No. 1–2, 247–256 (1999).

9. Дубровин Б. А., Новиков С. П. Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема. ДАН СССР, **270**, № 4, 781–785 (1983).
10. Мохов О. И., Ферапонтов Е. В. О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с метриками постоянной кривизны. УМН, **45**, вып. 3, 191–192 (1990).
11. Ферапонтов Е. В. Дифференциальная геометрия нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа. Функц. анализ и его прил., **25**, вып. 3, 37–49 (1991).
12. Ферапонтов Е. В. Гамильтоновые системы гидродинамического типа и их реализация на гиперповерхностях псевдоевклидова пространства. Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 22, ВИНТИ, М., 1990, с. 59–96.
13. Mokhov O. I. Hamiltonian systems of hydrodynamic type and constant curvature metrics. Phys. Letters. A, **166**, Nos. 3, 4, 215–216 (1992).
14. Мохов О. И., Ферапонтов Е. В. Гамильтоновы пары, порождаемые кососимметричными тензорами Киллинга на пространствах постоянной кривизны. Функц. анализ и его прил., **28**, вып. 2, 60–63 (1994).
15. Magri F. A simple model of the integrable Hamiltonian equation. J. Math. Phys., **19**, No. 5, 1156–1162 (1978).
16. Dorfman I. Dirac structures and integrability of nonlinear evolution equations. Chichester, England, John Wiley & Sons, 1993.
17. Мохов О. И. Локальные скобки Пуассона третьего порядка. УМН, **40**, вып. 5, 257–258 (1985).
18. Мохов О. И. Гамильтоновы дифференциальные операторы и контактная геометрия. Функц. анализ и его прил., **21**, вып. 3, 53–60 (1987).
19. Cooke D. B. Classification results and the Darboux theorem for low-order Hamiltonian operators. J. Math. Phys., **32**, No. 1, 109–119 (1991).
20. Cooke D. B. Compatibility conditions for Hamiltonian pairs. J. Math. Phys., **32**, No. 11, 3071–3076 (1991).
21. Nutku Y. On a new class of completely integrable nonlinear wave equations. II. Multi-Hamiltonian structure. J. Math. Phys., **28**, No. 11, 2579–2585 (1987).
22. Nijenhuis A. X_{n-1} -forming sets of eigenvectors. Indag. Math., **13**, No. 2, 200–212 (1951).
23. Darboux G. Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. 2nd ed. Gauthier-Villars, Paris, 1910.
24. Zakharov V. E. Description of the n -orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type, I: Integration of the Lamé equations. Duke Math. J., **94**, No. 1, 103–139 (1998).
25. Мохов О. И. Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы. УМН, **53**, вып. 3, 85–192 (1998).
26. Алексеев В. Л. О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с уравнениями Уизема. УМН, **50**, вып. 6, 165–166 (1995).