Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Назайкинский, Б. Ю. Стернин, О принципе локальности индекса в эллиптической теории, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 2, 37–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa244>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:21:33

УДК 517.9

О принципе локальности индекса в эллиптической теории*

© 2001. В. Е. НАЗАЙКИНСКИЙ, Б. Ю. СТЕРНИН

Введение

1. В последнее время в литературе появился ряд результатов, касающихся эллиптических операторов с условиями симметрии на многообразиях с особенностями. В число этих результатов входят, в частности, теоремы об индексе для общих эллиптических псевдодифференциальных операторов, а также для квантованных контактных преобразований (см., например, [1–5]). Основным средством для получения указанных результатов в этих статьях являлась подклейка второй копии многообразия и продолжение операторов на дубль. При этом дубль оказывался гладким замкнутым многообразием, для которого применима теория индекса Атьи–Зингера [6] (для случая псевдодифференциальных операторов) или теория Эпштейна–Мельроуза–Лайштнама–Неста–Цыгана [7, 8] (для случая квантованных канонических преобразований), а основная проблема состояла в том, чтобы выразить разность между удвоенным индексом первоначального оператора и индексом нового оператора на дубле в терминах инвариантов конормального символа. Подклеивание копии многообразия и продолжение оператора или, по крайней мере, символа на дубль (или, более общим образом, на многообразии, содержащее первоначальное многообразие в качестве части) является в действительности довольно старой идеей. В самом деле, эта техника была успешно применена к проблеме индекса краевых задач уже в довольно ранних работах советской математической школы по эллиптической теории (см., например, статьи Аграновича [9] и Дезина [10], а также обзор Аграновича [11], где можно найти более подробные ссылки) и позднее широко использовалась различными авторами. Мы упомянем здесь работы Хсианга и Стонга [12–14], где склейка с помощью обращающего ориентацию автоморфизма границы была применена для получения индекса оператора сигнатуры, а также работы Гилки и Смита [15, 16]. Этот список, разумеется, можно продолжить.

2. Идеи продолжения на более широкое многообразие (и, в частности, подклеивание дубля) оказываются успешными в силу справедливости так называемого *принципа локальности индекса* или *теоремы об относительном индексе*, общей трактовке и некоторым конкретным применениям которой и посвящена настоящая работа. Напомним, в чем заключается этот принцип.

Начнем с простейшей ситуации. Пусть M — компактное гладкое многообразие без края, разделенное на две части M_- и M_+ гладкой гиперповерхностью S (рис. 1а). Предположим, что на M задан эллиптический дифференциальный

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 99-01-01100 и 00-01-00161, и Deutsche Forschungsgemeinschaft (1999).

Рис. 1. Простая перестройка

оператор D , действующий в сечениях некоторых векторных расслоений E и F . Прделаем следующую операцию: «отрежем» M_- вдоль S и приклеим к M_+ другое многообразие M'_+ так, чтобы $M'_+ \cup_S M_+$ стало снова компактным гладким многообразием без края M' (рис. 1b). Разумеется, чтобы задать гладкую структуру при приклеивании, нужно на всех рассматриваемых многообразиях зафиксировать какую-либо тривиализацию воротниковой окрестности подмногообразия S в виде прямого произведения. На рис. 1 такие окрестности $U \approx (-1, 1) \times S$ заштрихованы. Далее, продолжим расслоения $E|_{M_+}$ и $F|_{M_+}$ до расслоений над всем M' , а оператор $D|_{M_+}$ — до эллиптического оператора D' на всем M' в пространствах сечений этих новых расслоений. (Мы предполагаем, что такая операция возможна.) Разность

$$\text{ind}(D', D) = \text{ind } D' - \text{ind } D \quad (0.1)$$

индексов операторов D' и D называется *относительным индексом* этих операторов. Зададимся теперь вопросом, зависит ли относительный индекс (0.1) от структуры операторов D' и D на множестве M_+ , где они совпадают. Более точно, проделаем такую же операцию отрезания и приклеивания с правой половиной многообразия, заменяя M_+ на некоторую другую часть $\widetilde{M}_+$. Получим новые многообразия $\widetilde{M}$ и $\widetilde{M}'$ (рис. 1c, d). Теперь, проделав соответствующие операции над расслоениями и операторами, мы приходим к новым операторам $\widetilde{D}$ и $\widetilde{D}'$, которые по-прежнему совпадают между собой на правой половине многообразия, т. е. теперь на $\widetilde{M}_+$, а на левой половине совпадают соответственно с D и D' . Вопрос: будут ли совпадать относительные индексы этих двух пар операторов? Другими словами, будет ли иметь место равенство

$$\text{ind}(D', D) = \text{ind}(\widetilde{D}', \widetilde{D})? \quad (0.2)$$

Утвердительный ответ на этот вопрос тривиальным образом вытекает из так называемой «локальной формулы индекса» (см., например, [17]): индекс эллиптического оператора D на замкнутом многообразии M выражается формулой

$$\text{ind } D = \int_M \alpha(x), \quad (0.3)$$

где «локальная плотность» $\alpha(x)$ в точке $x \in M$ зависит только от главного символа $\sigma(D)$ и его производных в слое над точкой x ; остается лишь сравнить соответствующие интегралы для четырех случаев, показанных на рис. 1. (Такого рода рассуждение было использовано, например, в [18, Chap. 25].)

Равенство (0.2) и есть принцип локальности, или теорема об относительном индексе, для указанного выше простейшего случая. Однако его доказательство становится нетривиальным, если, по-прежнему предполагая, что S компактно, мы откажемся от требования, чтобы M было гладким компактным многообразием без края. В этом случае в нашем распоряжении уже нет формулы (0.3), и известные доказательства принципа локальности (для некоторых частных случаев) опираются на методы, связанные с фундаментальным решением уравнения теплопроводности, или на формулу

$$\text{ind } D = \text{Trace}(1 - RD) - \text{Trace}(1 - DR), \quad (0.4)$$

где R — почти обратный к оператору D с точностью до ядерных операторов. Метод, основанный на формуле (0.4), был использован, например, в известной работе Громова и Лаусона [19] для доказательства теоремы об относительном индексе для операторов Дирака на полных некомпактных римановых многообразиях и вслед за тем в обобщении этой теоремы Анхелом [20] на случай произвольных существенно самосопряженных суперсимметричных фредгольмовых эллиптических операторов первого порядка. Эта же идея была использована и нами в предыдущих версиях данной работы [21, 22]. Метод уравнения теплопроводности использовался в работе Доннели [23], где доказана теорема об относительном индексе для оператора сигнатуры, а также в работе Бунке [24]. Упомянем также книгу Бооса-Бавнбека и Войцеховского [18], а также работу Телемана [27], который, используя довольно тонкую гомотопическую технику, доказал теорему об относительном индексе (0.2) для операторов сигнатуры на липшицевых многообразиях, правда, лишь для случая, когда (в наших обозначениях) $M_+ = \widetilde{M}_+$. В силу ограниченности объема статьи мы не можем дать исчерпывающий перечень результатов в этом круге вопросов. Заметим лишь, что известные теоремы Аграновича и Аграновича–Дынина [9, 25, 26], выражающие относительный индекс пары краевых задач с одним и тем же краевым условием, но разными операторами (совпадающими на границе) или с одним и тем же оператором, но разными краевыми условиями, по сути дела представляют собой формулировку принципа локальности для краевых задач.

3. Техника подклеивания дубля успешно применялась и в теории индекса ПДО на многообразиях с особенностями. Теорема об индексе для операторов с симметричным конормальным символом была получена этим методом в [1]. Позднее идеи статьи [1] (вместе с использованием обращающего ориентацию диффеоморфизма границы) были применены в [3] для получения теоремы об индексе для операторов с условием симметрии, включающим указанный диффеоморфизм¹⁾. Эту теорему можно применить к оператору Коши–Римана на двумерной поверхности, а также (как и в [12, 13]) к оператору сигнатуры при условии, что база

¹⁾К сожалению, авторам работы [3], по-видимому, не была известна более ранняя работа [12], где такая же склейка, как и в [3], была применена в ситуации многообразий с краем.

конуса обладает упомянутым диффеоморфизмом. В [2] теорема об индексе для двумерных поверхностей получена в случае условия симметрии, включающего произвольный диффеоморфизм базы конуса. Отметим, что во всех приведенных выше результатах условие симметрии налагалось на *полный* конормальный символ.

Цель данной статьи заключается в том, чтобы доказать принцип локальности (0.2) в ситуации, достаточно общей, в частности, для того, чтобы его можно было применить как к эллиптическим ПДО, так и эллиптическим интегральным операторам Фурье на многообразиях с особенностями. Таким образом, речь идет о введении некоторого нового класса фредгольмовых операторов, для которого такой принцип локальности был бы справедлив и который включал бы как ПДО, так и интегральные операторы Фурье. Заметим, что класс абстрактных эллиптических операторов, введенный Атьей в [28] (и послуживший в дальнейшем отправной точкой для развития *КК*-теории) здесь непригоден, так как коммутаторы интегральных операторов Фурье с операторами умножения на функции, вообще говоря, не компактны.

Именно поэтому мы в §1 вводим другой класс операторов и доказываем для него теорему об относительном индексе.

В §2 мы даем приложения к теоремам об индексе для ПДО и интегральных операторов Фурье на многообразиях с особенностями. Основное новшество в этих теоремах по сравнению с доказанными ранее в [1, 4, 5] заключается в том, что условие симметрии, и это совершенно естественно, налагается только на *главный символ* конормального символа (а не на конормальный символ в целом). При этом вклад конических особых точек в индекс описывается с помощью *спектрального потока* семейства конормальных символов. Это понятие, близкое к понятию «потока дивизоров» из [29], обобщает введенное в [30] понятие спектрального потока семейства самосопряженных операторов.

4. Авторы признательны А. Ю. Савину и В. Е. Шаталову за полезные обсуждения и Б.-В. Шульце (ФРГ) за внимание к нашей работе и поддержку.

§1. Пространства с перешейком и общий принцип локальности индекса

1.1. Пространства с перешейком и эллиптические операторы. Цель этого раздела — определить следующие два важных понятия:

- (а) абстрактный аналог понятия локализации сечения в M_- , M_+ или воротниковой окрестности $U \approx (-1, 1) \times S$, т. е. аналог понятия *носителя* сечения;
- (б) абстрактный аналог понятия *оператора*, *ядро Шварца* которого *сосредоточено в окрестности диагонали*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. (а) *Пространством с перешейком* называется сепарабельное гильбертово пространство H , снабженное структурой модуля над коммутативной топологической алгеброй $C^\infty([-1, 1])$ (действие непрерывно, единичная функция $1 \in C^\infty([-1, 1])$ действует на H как тождественный оператор).

- (б) *Носителем* элемента $h \in H$ называется замкнутое множество

$$\text{supp } h = \bigcap \varphi^{-1}(0) \subset [-1, 1], \quad (1.1)$$

где $\varphi^{-1}(0)$ — полный прообраз точки 0, а пересечение берется по всем таким элементам $\varphi \in C^\infty([-1, 1])$, что $\varphi h = 0$. Для произвольного подмножества $F \subset [-1, 1]$ через $H(F)$ будет обозначаться замыкание в H множества всех элементов $h \in H$ с носителем в F .

Поскольку в $C^\infty([-1, 1])$ существует разбиение единицы, подчиненное любому локально конечному открытому покрытию, введенное таким образом понятие носителя обладает естественными свойствами. В частности, если $F_1, F_2 \subset [-1, 1]$ — такие подмножества, что $\overline{F_1} \cap \overline{F_2} = \emptyset$, то $H(F_1 \cup F_2) = H(F_1) \oplus H(F_2)$ (сумма прямая, но не обязательно ортогональная).

ПРИМЕР 1.2. Простейшим примером пространства с перешейком является гильбертово пространство

$$H = L^2([-1, 1]; W)$$

суммируемых с квадратом функций на отрезке $[0, 1]$ со значениями в гильбертовом пространстве W . Произведение элемента $h \in H$ на элемент $\varphi \in C^\infty([-1, 1])$ определяется естественным образом: $(\varphi h)(t) = \varphi(t) h(t)$.

ПРИМЕР 1.3. Пусть M — многообразие (возможно некомпактное, с особенностями и/или краем), и пусть $\chi: M \rightarrow [-1, 1]$ — непрерывная функция, гладкая в гладкой части многообразия M и такая, что $\overline{\chi^{-1}((-1, 1))}$ — компактное множество, не содержащее особенностей многообразия M и не пересекающееся с краем. Пространства Соболева $H^s(M)$ (в определении которых произвольным образом зафиксированы весовые функции вблизи особенностей и на бесконечности) естественно наделяются структурой пространств с перешейком: для $h \in H^s(M)$ и $\varphi \in C^\infty([-1, 1])$ мы полагаем

$$(\varphi h)(x) = \varphi(\chi(x))h(x), \quad x \in M. \quad (1.2)$$

Поскольку χ локально постоянна вне компактного множества, оператор умножения на $\varphi(\chi(x))$ непрерывен в $H^s(M)$ независимо от выбора веса. Если M имеет непустой край, то естественная структура пространств с перешейком возникает и в пространствах Соболева $H^s(\partial M)$. Она задается той же формулой (1.2), где на этот раз $h \in H^s(\partial M)$, а $x \in \partial M$.

ПРИМЕР 1.4. Используя конструкцию из предыдущего примера, нетрудно снабдить пространства Соболева на каждом из многообразий, показанных на рис. 1, структурой пространств с перешейком. А именно, функция $\chi(x)$ выбирается таким образом, что она равна -1 слева от воротниковой окрестности U , равна 1 справа от U , а в U она возрастает от -1 до 1 и зависит лишь от переменной t .

Конструкция, описанная в примере 1.3, является основной в приложениях. Для однозначного задания этой конструкции достаточно, очевидно, задать конкретное многообразие M , пространства Соболева и функцию χ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Пусть H_1, H_2 — пространства с перешейками, а $F \subset [-1, 1]$ — заданное подмножество. Мы говорим, что H_1 *совпадает* на F с H_2 , и пишем $H_1 \stackrel{F}{=} H_2$, если задан изоморфизм (не обязательно изометрический) $H_1(F) \approx H_2(F)$. В этом случае мы также говорим, что H_1 и H_2 являются *модификациями* друг друга на $[-1, 1] \setminus F$, и пишем $H_1 \xrightarrow{[-1, 1] \setminus F} H_2$. Квадрат модификаций

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xleftarrow{B} & H_2 \\ A \uparrow & & \uparrow C \\ H_3 & \xleftarrow{D} & H_4 \end{array}$$

будем называть *коммутативным*, если коммутативна соответствующая диаграмма изоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} H_1(F) & \approx & H_2(F) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ H_3(F) & \approx & H_4(F) \end{array} \quad F = [-1, 1] \setminus (A \cup B \cup C \cup D).$$

Следующее определение формализует в контексте пространств с перешейком понятие оператора, который может быть прогомоторирован к оператору, ядро Шварца которого сосредоточено в произвольно узкой окрестности диагонали.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. (а) *Правильным оператором* в пространствах с перешейком H , G называется непрерывное (в равномерной операторной топологии) семейство ограниченных линейных операторов

$$D_\delta: H \rightarrow G, \quad \delta > 0, \quad (1.3)$$

удовлетворяющее следующему условию: для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 > 0$, такое, что

$$\text{supp } D_\delta h \subset U_\varepsilon(\text{supp } h) \quad \forall h \in H \quad (1.4)$$

при любом $\delta < \delta_0$. Здесь $U_\varepsilon(F)$ есть ε -окрестность множества F .

(б) *Эллиптическим оператором* в пространствах с перешейком H , G называется правильный оператор (1.3), такой, что D_δ фредгольмов при каждом δ и имеет почти обратный $D_\delta^{[-1]}$, такой, что семейство $D_\delta^{[-1]}$ — правильный оператор.

Мы будем, как правило, опускать параметр δ в обозначении правильного оператора.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. Нетрудно видеть, что произведение правильных операторов (если оно определено) снова является правильным оператором. В пространствах с перешейком, полученных конструкцией из примера 1.3 на компактных многообразиях (возможно, с коническими особенностями) или многообразиях с краем, эллиптические псевдодифференциальные операторы или соответственно операторы эллиптических граничных задач являются эллиптическими в смысле приведенного выше определения (более точно, каждый такой оператор можно включить в семейство, зависящее от параметра δ и удовлетворяющее условиям определения). Это тривиальным образом следует из того, что псевдодифференциальные операторы и параметрикс граничных задач обладают свойством псевдолокальности. Умножая ядра этих операторов на семейство срезающих функций с носителем, стягивающимся к диагонали, получаем требуемые утверждения.

Пусть теперь

$$A_i: H_i \rightarrow G_i, \quad i = 1, 2,$$

— правильные операторы в пространствах с перешейком, и пусть $F \subset [-1, 1]$ есть *открытое* подмножество (в топологии отрезка $[-1, 1]$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Мы говорим, что A_1 *совпадает* с A_2 на F и пишем $A_1 \stackrel{F}{=} A_2$, если $H_1 \stackrel{F}{=} H_2$, $G_1 \stackrel{F}{=} G_2$ и для любого компакта $K \subset F$ выполнено следующее условие: существует $\delta_0 > 0$, такое, что

$$A_{1\delta}h = A_{2\delta}h \quad \text{при } \delta < \delta_0 \text{ и } \text{supp } h \subset K. \quad (1.5)$$

(Это условие корректно, поскольку $h \in H_1(F) \approx H_2(F)$ и, так как множество F открыто, $A_{1\delta}h, A_{2\delta}h \in G_1(F) \approx G_2(F)$ при малых δ .) В этом случае мы

говорим также, что A_1 получен из A_2 модификацией на $[-1, 1] \setminus F$, и пишем $A_1 \xrightarrow{[-1, 1] \setminus F} A_2$. Понятие коммутативного квадрата модификаций вводится очевидным образом.

Следующая лемма является важным (хотя и тривиальным) обобщением теоремы, утверждающей, что два почти обратных к фредгольмову оператору отличаются на компактный оператор.

ЛЕММА 1.9. Пусть $A_1 \stackrel{F}{=} A_2$ — эллиптические операторы в пространствах с перешейком. Тогда $A_1^{[-1]} \stackrel{F}{=} A_2^{[-1]} + K$, где K — правильный компактный оператор. В частности, при $A_1 = A_2 = A$ получаем, что любые два правильных почти обратных оператора к A отличаются на правильный компактный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$A_1 A_1^{[-1]} = 1 + K_1, \quad A_2^{[-1]} A_2 = 1 + K_2,$$

где K_1, K_2 — правильные компактные операторы. Тогда

$$\begin{aligned} A_2^{[-1]} A_1 A_1^{[-1]} &= A_2^{[-1]} + A_2^{[-1]} K_1, \\ A_2^{[-1]} A_1 A_1^{[-1]} &\stackrel{F}{=} A_2^{[-1]} A_2 A_1^{[-1]} = A_1^{[-1]} + K_2 A_1^{[-1]}, \end{aligned}$$

откуда

$$A_2^{[-1]} \stackrel{F}{=} A_1^{[-1]} + \{K_2 A_1^{[-1]} - A_2^{[-1]} K_1\}.$$

Доказательство завершено, так как оператор в фигурных скобках компактный.

ЛЕММА 1.10. Пусть $[-1, 1] = \bigcup_j F_j$ — открытое покрытие и $A_1 \stackrel{F_j}{=} A_2$ для всех j , где A_1, A_2 — правильные операторы. Тогда $A_{1\delta} = A_{2\delta}$ при достаточно малых δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем конечное разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{F_j\}$. Тогда утверждение леммы вытекает непосредственно из определения 1.8.

1.2. Общий принцип локальности (теорема об относительном индексе).

Теперь мы можем сформулировать и доказать основной результат — общий принцип локальности индекса.

ТЕОРЕМА 1.11. Пусть имеет место следующая коммутативная диаграмма модификаций эллиптических операторов в пространствах с перешейком:

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\{-1\}} & D_- \\ \{1\} \uparrow & & \uparrow \{1\} \\ D_+ & \xrightarrow{\{-1\}} & D_{+-} \end{array}$$

Тогда

$$\text{ind}(D) - \text{ind}(D_-) = \text{ind}(D_+) - \text{ind}(D_{+-}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения для пространств, в которых действуют операторы, упомянутые в теореме:

$$D: H \rightarrow G, \quad D_-: H_- \rightarrow G_-, \quad D_+: H_+ \rightarrow G_+, \quad D_{+-}: H_{+-} \rightarrow G_{+-}.$$

Тогда по определению имеются коммутативные диаграммы модификаций

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xleftarrow{\{-1\}} & H_- \\
 \{1\} \uparrow & & \uparrow \{1\} \\
 H_+ & \xleftarrow{\{-1\}} & H_{+-}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 G & \xleftarrow{\{-1\}} & G_- \\
 \{1\} \uparrow & & \uparrow \{1\} \\
 G_+ & \xleftarrow{\{-1\}} & G_{+-}
 \end{array}
 \quad (1.6)$$

ЛЕММА 1.12. Пусть диаграммы (1.6) тривиальны, т.е. модификации тождественны:

$$H = H_- = H_+ = H_{+-}, \quad G = G_- = G_+ = G_{+-}.$$

Тогда утверждение теоремы справедливо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в этом случае

$$\text{ind}(D) - \text{ind}(D_-) - \text{ind}(D_+) + \text{ind}(D_{+-}) = \text{ind}(DD_-^{[-1]}D_{+-}^{[-1]}).$$

Но

$$DD_-^{[-1]}D_{+-}^{[-1]} \stackrel{(-1,1)}{\equiv} DD^{[-1]}D_+^{[-1]} \equiv 1,$$

$$DD_-^{[-1]}D_{+-}^{[-1]} \stackrel{(-1,1)}{\equiv} DD_-^{[-1]}D_-^{[-1]} \equiv DD^{[-1]} \equiv 1$$

(где $\equiv$ означает равенство с точностью до правильных компактных операторов) и, следовательно,

$$DD_-^{[-1]}D_{+-}^{[-1]} \equiv 1$$

по лемме 1.10.

Теперь утверждение теоремы в общем случае вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 1.13. Изоморфизмы подпространств, входящих в определение модификаций в диаграммах (1.6), можно продолжить до изоморфизмов

$$\begin{array}{ccc}
 H & = & H_- \\
 \parallel & & \parallel \\
 H_+ & = & H_{+-}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 G & = & G_- \\
 \parallel & & \parallel \\
 G_+ & = & G_{+-}
 \end{array}
 \quad (1.7)$$

таким образом, чтобы диаграммы (1.7) были коммутативны, а сами изоморфизмы коммутировали с новым действием алгебры $C^\infty([-1, 1])$, задаваемым формулой

$$\varphi * h = (\varphi \circ \chi)h, \quad (1.8)$$

где $\chi: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ — гладкая монотонная функция, которая равна -1 на $[-1, -1/2]$ и $+1$ на $[1/2, 1]$.

Действительно, относительно нового действия операторы D , D_- , D_+ , D_{+-} по-прежнему правильные и удовлетворяют нужной диаграмме модификаций, но действуют они теперь в одних и тех же пространствах, так что можно применить лемму 1.12.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно провести доказательство для первой диаграммы. Имеем разложения в прямую сумму

$$\begin{aligned}
 H &= H^{(-)} \oplus H((-1, 1)) \oplus H^{(+)}, & H_- &= H_-^{(-)} \oplus H((-1, 1)) \oplus H_-^{(+)}, \\
 H_+ &= H_+^{(-)} \oplus H((-1, 1)) \oplus H_+^{(+)}, & H_{+-} &= H_{+-}^{(-)} \oplus H((-1, 1)) \oplus H_{+-}^{(+)},
 \end{aligned}$$

где, например,

$$H^{(-)} = H([-1, -1/2)) \ominus (H([-1, -1/2)) \cap H((-1, 1))),$$

$$H^{(+)} = H([1/2, 1)) \ominus (H([1/2, 1)) \cap H((-1, 1)))$$

и т. д., а $A \ominus B$ обозначает ортогональное дополнение к B в A .

Без ограничения общности можно считать, что пространства $H^{(-)}$, $H^{(+)}$ и им подобные бесконечномерны (иначе можно добавить к ним прямые слагаемые вида l^2 , а ко всем операторам — тождественные операторы $\text{id}: l^2 \rightarrow l^2$). Далее, в силу диаграммы (1.6) имеем изоморфизмы

$$H^{(+)} = H_{-}^{(+)}, \quad H_{+}^{(+)} = H_{+-}^{(+)}, \quad H^{(-)} = H_{+}^{(-)}, \quad H_{-}^{(-)} = H_{+-}^{(-)}.$$

Остается произвольно выбрать изоморфизмы $H^{(-)} \approx H_{-}^{(-)}$ и $H^{(+)} \approx H_{+}^{(+)}$; таковые всегда существуют между произвольными сепарабельными гильбертовыми пространствами. Полученные изоморфизмы (1.7) коммутируют с действием (1.8), поскольку $\varphi * h = \varphi(-1)h$ для элементов h пространств $H^{(-)}, \dots, H_{+-}^{(-)}$ и $\varphi * h = \varphi(1)h$ для элементов h пространств $H^{(+)}, \dots, H_{+-}^{(+)}$.

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.14. Формула (0.2) является частным случаем доказанной теоремы. Это следует из конструкции примера 1.4 с учетом замечания 1.7.

§2. Приложения к формулам индекса для операторов с условиями симметрии

В этом параграфе мы даем приложения развитой выше теории к формулам индекса для операторов на многообразиях с коническими особенностями. Основные определения, касающиеся операторов на многообразиях с коническими особенностями, читатель может найти в [31]; там же можно найти дальнейшие ссылки.

2.1. Теорема об индексе для псевдодифференциальных операторов на многообразиях с коническими особенностями. Нам понадобится обобщение введенной в [32] версии понятия спектрального потока [30] на произвольные конормальные семейства.

1. Кратность особой точки операторного семейства. Пусть $H_{1,2}$ — гильбертовы пространства, а $D(p): H_1 \rightarrow H_2$ — семейство ограниченных линейных операторов с параметром p , пробегающим открытое подмножество $\mathcal{U}$ комплексной плоскости. Будем говорить, что оно *сильно конечномероморфно*, если оно конечномероморфно и конечномероморфно обратимо (т. е. $D(p)$ мероморфно зависит от $p \in \mathcal{U}$ и главные части рядов Лорана в каждом из полюсов суть операторы конечного ранга; то же предполагается выполненным и для $D^{-1}(p)$). *Особыми точками* семейства $D(p)$ называются полюсы семейства $D(p)$ и полюсы семейства $D^{-1}(p)$. *Кратностью* особой точки p_0 семейства $D(p)$ назовем число (всегда целое)

$$m_D(p_0) = \text{Trace Res}_{p=p_0} \left\{ D^{-1}(p) \frac{\partial D(p)}{\partial p} \right\}. \quad (2.1)$$

2. Определение спектрального потока семейства конормальных символов. Факты, изложенные в этом пункте, близко соприкасаются с результатами из [29].

Пусть Ω — гладкое компактное многообразие без края, и пусть

$$D(p): H^s(\Omega, E) \rightarrow H^{s-m}(\Omega, F)$$

— семейство ПДО порядка m на Ω , голоморфно зависящее от параметра $p \in \mathbb{C}$ и эллиптическое с параметром p по Аграновичу–Вишику [33] в некотором двойном секторе ненулевого раствора, содержащем вещественную ось. Тогда это семейство является сильно конечномероморфным в указанном секторе. Такие семейства будем в дальнейшем называть *конормальными символами* на Ω . Для простоты всюду далее, кроме примеров, предполагаем, что $m = 0$.

Пусть $D_t = D_t(p)$ — непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$ семейство конормальных символов на Ω . Мы хотим определить понятие *спектрального потока* $\text{sf } D_t \equiv \text{sf}_{t=0,1} D_t$ семейства D_t . Интуитивное определение звучит следующим образом: $\text{sf } D_t$ — это алгебраическое число особых точек (с учетом кратности) семейства D_t , перешедших снизу вверх через вещественную ось (а точнее, из открытой нижней в замкнутую верхнюю полуплоскость) при изменении параметра t от 0 до 1. Такое определение естественно обобщает понятие спектрального потока семейства A_t нормально эллиптических операторов и переходит в него при $D_t = p - A_t$. Проблема, однако, заключается в том, чтобы дать строгое определение. В данном случае понятие спектрального сечения неизвестно (при $D_t \neq p - A_t$), и для определения спектрального потока мы воспользуемся иной, нежели в [32], конструкцией.

Предположим сначала (для упрощения формул), что при $t = 0$ и 1 конормальный символ $D_t(p)$ не имеет особых точек на вещественной оси (это ограничение ниже будет снято). Разобьем отрезок $[0, 1]$ на подынтервалы точками

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$$

и выберем вещественные числа γ_i , $i = 1, \dots, N$, так, чтобы оператор $D_t(p)$ был обратим на весовой прямой $\text{Im } p = \gamma_i$ при всех $t \in [t_{i-1}, t_i]$. При этом должно быть выполнено условие $\gamma_1 = \gamma_N = 0$. Существование такого разбиения и чисел вытекает из условия эллиптичности с параметром в секторе ненулевого раствора и непрерывной зависимости конормального символа от параметра t .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Спектральным потоком* семейства $\{D_t\}_{t \in [0,1]}$ конормальных символов называется число

$$\text{sf } D_t = \sum_{i=1}^{N-1} g_i, \quad (2.2)$$

где

$$g_i = \begin{cases} - \sum_{\text{Im } p_j \in (\gamma_i, \gamma_{i+1})} m_{D_{t_i}}(p_j), & \text{если } \gamma_i < \gamma_{i+1}, \\ \sum_{\text{Im } p_j \in (\gamma_{i+1}, \gamma_i)} m_{D_{t_i}}(p_j), & \text{если } \gamma_i \geq \gamma_{i+1}. \end{cases}$$

Здесь p_j — особые точки конормального символа D_{t_i} , попавшие в указанную полосу (заметим, что их конечное число, так что сумма определена корректно).

ТЕОРЕМА 2.2. *Справедливы следующие утверждения:*

(а) *Определение 2.1 корректно (т.е. не зависит от выбора разбиения отрезка $[0, 1]$ и чисел γ_j).*

(b) Спектральный поток $\text{sf } D_t$ зависит только от гомотопического класса пути D_t (с фиксированными началом и концом). Более того, $\text{sf } D_t$ не изменяется и при таких деформациях (гомотопиях) пути D_t , что начало и конец не фиксированы, но конормальные символы D_0 и D_1 не имеют особых точек на вещественной оси ни при каком значении параметра гомотопии.

Теперь мы можем обобщить определение 2.1 на случай, когда $D_0(p)$ и $D_1(p)$ могут иметь особые точки на вещественной оси. Из условия эллиптичности с параметром вытекает, что существует такое $\varepsilon > 0$, что в открытой полосе $-\varepsilon < \text{Im } p < 0$ нет особых точек конормальных символов $D_0(p)$ и $D_1(p)$. Рассмотрим семейство конормальных символов $D_{t,\tau}(p) = D_t(p - i\tau)$, зависящее от дополнительного вещественного параметра $\tau \in (0, \varepsilon)$. Тогда $D_{0,\tau}$ и $D_{1,\tau}$ не имеют особых точек на вещественной оси, и по теореме 2.2(b) спектральный поток $\text{sf } D_{t,\tau}$ не зависит от $\tau \in (0, \varepsilon)$. Мы полагаем по определению

$$\text{sf } D_t = \text{sf } D_{t,\varepsilon/2}.$$

3. Связь спектрального потока с индексом.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть

$$D_t(p): H^s(\Omega, E) \rightarrow H^s(\Omega, F), \quad t \in [0, 1],$$

— семейство конормальных символов на Ω , причем $D_0(p)$ и $D_1(p)$ не имеют особых точек на вещественной оси. Пусть $\chi: (-\infty, \infty) \rightarrow [0, 1]$, $\chi(-\infty) = 0$, $\chi(\infty) = 1$, — гладкая функция с экспоненциально убывающими на бесконечности производными. Положим

$$D(\tau, p) = D_{\chi(\tau)}(p)$$

и рассмотрим оператор

$$\widehat{D} \stackrel{\text{def}}{=} D\left(\frac{2}{\tau}, -i \frac{\partial}{\partial \tau}\right): H^s(C, E) \longrightarrow H^s(C, F)$$

в пространствах Соболева¹⁾ на бесконечном цилиндре $C = \Omega \times (-\infty, \infty)$. Тогда

$$\text{sf } D_t = -\text{ind } \widehat{D}.$$

4. Теорема об индексе для эллиптических ПДО. Применим теперь полученные выше результаты для доказательства теоремы об индексе эллиптических ПДО на многообразиях с коническими особенностями. Эта теорема включает в себя ранее известные [1–3] как частные случаи.

Пусть N — компактное многообразие без края с коническими особенностями (без ограничения общности считаем, что есть только одна коническая точка α ; база Ω соответствующего конуса не предполагается связной), и пусть

$$\widehat{D}: H^s(N, E) \longrightarrow H^{s-m}(N, F)$$

— эллиптический ПДО в пространствах Соболева на N с конормальным символом $D_0(p)$.

¹⁾Мы обозначаем распространения расслоений E и F на C теми же буквами. Весовая прямая, входящая в определение пространств Соболева, есть $\{\text{Im } p = 0\}$, так что мы опускаем веса в обозначениях пространств и пишем H^s вместо $H^{s,0}$.

Далее, пусть $g: \Omega \rightarrow \Omega$ — диффеоморфизм, а

$$\mu_E: E|_{\Omega} \longrightarrow g^*(E|_{\Omega}), \quad \mu_F: F|_{\Omega} \longrightarrow g^*(F|_{\Omega})$$

— изоморфизмы расслоений. Предположим, что выполнено следующее условие.

УСЛОВИЕ А. *Конормальные символы $D_0(p)$ и $\mu_F^{-1}g^*D_0(-p)(g^*)^{-1}\mu_E$ гомотопны в классе конормальных символов¹⁾.*

Зафиксируем какую-либо гомотопию D_{0t} ,

$$D_{00}(p) = D_0(p), \quad D_{01}(p) = \mu_F^{-1}g^*D_0(-p)(g^*)^{-1}\mu_E.$$

Мы построим замкнутое многообразие $\mathcal{N}$ и расслоения $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ над ним следующим образом. Выбрасывая из многообразия N малую окрестность конической точки, получим многообразие $\tilde{N}$ с краем $\partial\tilde{N} = \Omega$. Подклеим два экземпляра многообразия $\tilde{N}$ к двум торцам цилиндра $\Omega \times [0, 1]$, используя для склейки тождественное отображение на левом торце и отображение g на правом торце. Расслоения $E|_{\Omega}$ и $F|_{\Omega}$ распространим на цилиндр $\Omega \times [0, 1]$ естественным образом и склеим их с соответствующими расслоениями на двух экземплярах многообразия $\tilde{N}$ тождественным образом на левом торце и с помощью изоморфизмов μ_E , μ_F на правом торце. Полученные расслоения над $\mathcal{N}$ обозначим через $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 2.4. *При указанных условиях справедлива следующая формула индекса:*

$$\text{ind } \hat{D} = \frac{1}{2} \{ \text{ind } \mathcal{D} + \text{sf } D_{0t} \},$$

где $\mathcal{D}: H^s(\mathcal{N}, \mathcal{E}) \longrightarrow H^{s-m}(\mathcal{N}, \mathcal{F})$ — эллиптический оператор на замкнутом многообразии $\mathcal{N}$, который будет описан в доказательстве теоремы.

Рис. 2. Доказательство теоремы 2.4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя в окрестности конической точки замену переменной $r = e^{-t}$, где r — расстояние до конической точки, мы можем представить N как многообразие с цилиндрическим концом. Далее, оператор D можно прогомоторировать в классе эллиптических ПДО, не меняя конормального символа, к оператору, коэффициенты которого не зависят от t при достаточно больших t .

¹⁾Условие А есть условие симметрии относительно точки $p = 0$. Случай симметрии относительно точки $p \neq 0$ рассматривается аналогично.

Будем считать, что это проделано с самого начала. Рассмотрим две конфигурации, показанные на рис. 2. Исходная конфигурация состоит из двух экземпляров многообразия N с оператором $\hat{D}$ и бесконечного цилиндра $(-\infty, \infty) \times \Omega$, на котором оператор задается с помощью операторнозначного символа $D_{0\chi(t)}$, где функция $\chi: (-\infty, \infty) \rightarrow [0, 1]$ возрастает от 0 до 1 и постоянна вне компактного множества. Конечная конфигурация состоит из многообразия $\mathcal{N}$ с оператором $\mathcal{D}$, главный символ которого совпадает с главным символом оператора $\hat{D}$ на двух экземплярах многообразия $\mathcal{N}$ и с главным символом гомотопии D_{0t} на цилиндре $\Omega \times [0, 1]$, и двух бесконечных цилиндров $(-\infty, \infty) \times \Omega$ с операторами $D_0(-i\partial/\partial t)$ и $D_0(i\partial/\partial t)$, коэффициенты которых не зависят от переменной $t \in (-\infty, \infty)$. Одна конфигурация получается из другой в результате перехода, аналогичного переходу от M к M' на рис. 1, если через M_+ обозначить объединение компонент I, III, IV, VII, а через M_- — всех остальных компонент. (Заметим, что M'_- отличается от M_- лишь расположением компонент.) Рассмотрим теперь новую часть $\widetilde{M}_+$, получающуюся из M_+ заменой компонент IV и VII на полубесконечные цилиндры. (Новые операторы имеют не зависящие от t коэффициенты на компонентах IV+V и VI+VII.) В новом варианте (отвечающем переходу от $\widetilde{M}$ к $\widetilde{M}'$ на рис. 1) начальная и конечная конфигурация совпадают, так что относительный индекс равен нулю. Мы можем превратить пространства Соболева, в которых действуют операторы во всех указанных конфигурациях, в пространства с перешейком таким же образом, как это было проделано в примере 1.4 для простейших конфигураций, показанных на рис. 1. В соответствии с замечанием 1.7 можно считать, что все рассматриваемые в доказательстве операторы являются эллиптическими в смысле определения 1.6. Применяя теорему 1.11, получаем, что и в первом случае относительный индекс равен нулю, т. е. индекс для исходной и конечной конфигураций один и тот же, откуда, применяя теорему 2.3, немедленно получаем утверждение доказываемой теоремы.

Для случая, когда гомотопия имеет вид $D_{0\tau}(p) = B(p + i\tau)$, $\tau \in [\gamma_1, \gamma_2]$, а отображение g тождественное, получаем ранее известный результат из [1]. Используя результаты работы [34], легко перенести утверждение теоремы 2.4 на случай общих спектральных краевых задач с условием симметрии (теорема существования таких формул доказана в [32]).

2.2. Теорема об индексе для интегральных операторов Фурье на многообразиях с коническими особенностями. Задача о вычислении индекса интегральных операторов Фурье (более точно, квантованных контактных преобразований) была поставлена Вайнштейном [36, 37] и недавно решена (для операторов на гладких многообразиях) в [7, 8]. В данном разделе мы сформулируем и докажем аналог теоремы 2.4 для интегральных операторов Фурье на многообразиях с коническими особенностями. Во избежание громоздкости ограничимся случаем, когда диффеоморфизм g , входящий в условие А, тождественный. Модификация наших рассуждений для случая нетривиального диффеоморфизма в условии симметрии не представляет трудности.

1. Интегральные операторы Фурье на многообразиях с особенностями. Дадим прежде всего определение интегральных операторов Фурье на многообразиях с коническими особенностями. Наше изложение будет по необходимости кратким. Более подробное изложение см. в [4, 5] (ср. также [35]).

Пусть N_1, N_2 — многообразия с коническими особенностями, а T^*N_1 и T^*N_2 — кокасательные расслоения к N_1 и N_2 , определяемые как *сжатые кокасательные расслоения* (compressed cotangent bundles) многообразий с краем $N_1^\wedge$ и $N_2^\wedge$, получаемых из N_1 и N_2 раздутием (blow-up) конических точек (см. [35]). Таким образом, многообразия T^*N_1 и T^*N_2 тоже суть многообразия с краем. Они снабжены естественной симплектической формой, имеющей особенность на крае; в конических координатах (см. [31]) форма имеет вид

$$\omega^2 = -\frac{dp \wedge dr}{r} + dq \wedge d\varphi,$$

где φ — координата на базе конуса, r — радиальная координата, p — конормальная переменная, а q — импульсная переменная, двойственная к φ .

Пусть

$$g: T^*N_1 \setminus \{0\} \rightarrow T^*N_2 \setminus \{0\}$$

— $\mathbf{R}_+$ -однородное каноническое преобразование (т.е. отображение, гладкое вплоть до границы и сохраняющее симплектическую форму).

Пусть

$$L(g) = \{(z, g(z))\} \subset T^*N_1 \setminus \{0\} \times T^*N_2 \setminus \{0\}$$

— график отображения g ; это множество является лагранжевым подмногообразием в $T^*N_1 \setminus \{0\} \times T^*N_2 \setminus \{0\}$ относительно симплектической формы $\pi_2^*\omega_2^2 - \pi_1^*\omega_1^2$, где π_j — проекция произведения на j -й сомножитель, а ω_j^2 — симплектическая форма на T^*N_j .

Пусть Λ — линейное расслоение Маслова над $L(g)$, а $a: L(g) \rightarrow \Lambda$ — не обращающееся в нуль сечение, однородное степени m .

Используя на $L(g)$ координаты, «снятые» с T^*N_1 , можно считать a сечением расслоения над T^*N_1 . Мы определим интегральный оператор Фурье

$$T(g, a) = H^{s, \gamma}(N_1) \rightarrow H^{s-m, \gamma}(N_2)$$

стандартным образом как оператор с интегральным ядром $\mathcal{K}_{L_g}(a)$, где $\mathcal{K}_{L_g}$ — канонический оператор Маслова на L_g (в его однородном варианте). Детали конструкции см. в [4, 5]. При подходящем выборе элементов этой конструкции, конормальный символ $T_0(p)$ оператора $T(g, a)$ корректно определен как семейство операторов

$$T_0(p): H^s(\Omega_1) \rightarrow H^{s-m}(\Omega_2),$$

где Ω_1 и Ω_2 — базы конусов на многообразиях N_1 и N_2 .

Оператор $T(g, a)$ будем называть *эллиптическим* на данной весовой прямой $\{\text{Im } p = \gamma\}$, если конормальный символ $T_0(p)$ обратим всюду на весовой прямой.

2. Теорема об индексе. Введем следующее условие.

УСЛОВИЕ В. *Конормальные символы $T_0(p)$ и $T_0(-p)$ гомотопны в классе конормальных символов формально эллиптических интегральных операторов Фурье.*

ТЕОРЕМА 2.5. *Пусть $T(g, a)$ — эллиптический интегральный оператор Фурье, конормальный символ которого удовлетворяет условию В.*

Тогда

$$\text{ind } T(g, a) = \frac{1}{2} \{\text{ind } \mathcal{T} + \text{sf } T_{0t}\},$$

где T_{0t} — гомотопия, связывающая $T_0(p)$ и $T_0(-p)$, а

$$\mathcal{T}: H^s(\mathcal{N}_1) \rightarrow H^s(\mathcal{N}_2)$$

— некоторый интегральный оператор Фурье на замкнутых многообразиях $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$, получаемых из N_1 и N_2 той же конструкцией, что и $\mathcal{N}$ из N в доказательстве теоремы 2.4.

Оператор $\mathcal{T}$, разумеется, получается из T склейкой такого же рода, как и в теореме 2.4.

Доказательство теоремы 2.5 воспроизводит доказательство теоремы 2.4 со следующими очевидными изменениями.

(1) Конструкция приклеивания дубля проводится отдельно для N_1 и N_2 .

(2) Необходимо показать, что рассматриваемые интегральные операторы Фурье являются правильно эллиптическими, т.е. включить их в соответствующие семейства, зависящие от параметра δ . Это нетрудно сделать, масштабируя цилиндрическую переменную t на цилиндрических концах.

Выражение для индекса $\text{ind } \mathcal{T}$ интегрального оператора Фурье на паре замкнутых многообразий без края дается формулой Лейштнама–Неста–Цыгана [8], так что теорема 2.5 выражает индекс интегрального оператора Фурье на многообразии с коническими особенностями при условиях симметрии в терминах этой формулы и спектрального потока гомотопии конормальных символов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schulze B.-W., Sternin B., Shatalov V. On the index of differential operators on manifolds with conical singularities. *Annals of Global Analysis and Geometry*, **16**, No. 2, 141–172 (1998).
2. Fedosov B. V., Schulze B.-W., Tarkhanov N. The index of higher order operators on singular surfaces. *Pacific J. Math.*, **191**, No. 1, 25–48 (1999).
3. Fedosov B. V., Schulze B.-W., Tarkhanov N. A Remark on the Index of Symmetric Operators. Univ. Potsdam, Institut für Mathematik, Potsdam, February 1998. Preprint 98/4.
4. Nazaikinskii V., Schulze B.-W., Sternin B. The Index of Quantized Contact Transformations on Manifolds with Conical Singularities. Univ. Potsdam, Institut für Mathematik, Potsdam, August 1998. Preprint 98/16.
5. Назайкинский В. Е., Стернин Б. Ю., Шульце Б.-В. Индекс квантованных контактных преобразований на многообразиях с коническими особенностями. Докл. РАН, **368**, № 5, 598–600 (1999).
6. Atiyah M. F., Singer I. M. The index of elliptic operators on compact manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69**, 422–433 (1963).
7. Epstein C., Melrose R. Contact degree and the index of Fourier integral operators. *Math. Res. Lett.*, **5**, No. 3, 363–381 (1998).
8. Leichtnam E., Nest R., Tsygan B. Local formula for the index of a Fourier integral operator. Preprint math.DG/0004022, 2000.
9. Агранович М. С. Эллиптические сингулярные интегродифференциальные операторы. УМН, **20**, вып. 5, 3–20 (1965).
10. Дезин А. А. Инвариантные дифференциальные операторы и граничные задачи. Труды МИАН, т. 68, 1962.
11. Agranovich M. Elliptic boundary problems. In: *Partial Differential Equations IX. Elliptic Boundary Value Problems* (Agranovich M. S., Egorov Yu. V., Shubin M. A., eds.), *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Vol. 79, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1997, pp. 1–144.
12. Hsiung Ch.-Ch. The signature and G -signature of manifolds with boundary. *J. Differential Geom.*, **6**, 595–598 (1972).

13. *Hsiung Ch.-Ch.* A remark on cobordism of manifolds with boundary. *Arch. Math.*, **27**, 551–555 (1976).
14. *Stong R. E.* Manifolds with reflecting boundary. *J. Differential Geom.*, **9**, 465–474 (1974).
15. *Gilkey P. B., Smith L.* The eta invariant for a class of elliptic boundary value problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, **36**, 85–132 (1983).
16. *Gilkey P. B., Smith L.* The twisted index problem for manifolds with boundary. *J. Differential Geom.*, **18**, No. 3, 393–444 (1983).
17. *Gilkey P. B.* Invariance Theory, the Heat Equation and the Atiyah–Singer Index Theorem. Publish of Perish. Inc., Wilmington Delawaere, 1984.
18. *Booß-Bavnbek B., Wojciechowski K.* Elliptic Boundary Problems for Dirac Operators. Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 1993.
19. *Gromov M., Lawson H. B. Jr.* Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds. *Publ. Math. IHES*, **58**, 295–408 (1983).
20. *Anghel N.* An abstract index theorem on non-compact Riemannian manifolds. *Houston J. of Math.*, **19**, 1993, 223–237.
21. *Назайкинский В. Е., Стернин Б. Ю.* Локализация и перестройки в теории индекса эллиптических операторов. *Докл. РАН*, **370**, №1, 19–23 (2000).
22. *Nazaikinskii V., Sternin B.* Surgery and the Relative Index in Elliptic Theory. Univ. Potsdam, Institut für Mathematik, Potsdam, Juli 1999, Preprint 99/17.
23. *Donnelly H.* Essential spectrum and the heat kernel. *J. Funct. Anal.*, **75**, 362–381 (1987).
24. *Bunke U.* Relative index theory. *J. Funct. Anal.*, **105**, 63–76 (1992).
25. *Дынин А. С.* Многомерные эллиптические граничные задачи с одной неизвестной функцией. *ДАН СССР*, **141**, 285–287 (1961).
26. *Агранович М. С., Дынин А. С.* Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области. *ДАН СССР*, **146**, 511–514 (1962).
27. *Teleman N.* The index of signature operators on Lipschitz manifolds. *Publ. Math. IHES*, **58**, 39–78 (1984).
28. *Atiyah M. F.* Global theory of elliptic operators. In: *Proc. of the Int. Symposium on Functional Analysis*, University of Tokyo Press, Tokyo, 1969, pp. 21–30.
29. *Melrose R.* The eta invariant of pseudodifferential operators and families. *Math. Res. Lett.*, **2**, No. 5, 541–561 (1995).
30. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry III. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **79**, 71–99 (1976).
31. *Schulze B.-W., Sternin B., Shatalov V.* Differential Equations on Singular Manifolds. Semiclassical Theory and Operator Algebras, *Mathematics Topics*, Vol. 15, Wiley–VCH Verlag, Berlin–New York, 1998.
32. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю., Шульце Б.-В.* Об инвариантных формулах индекса спектральных краевых задач. *Дифференциальные уравнения*, **35**, №5, 705–714 (1999).
33. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида. *УМН*, **19**, вып. 3, 53–161 (1964).
34. *Назайкинский В. Е., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е., Шульце Б.-В.* Спектральные краевые задачи и эллиптические уравнения на многообразиях с особенностями. *Дифференциальные уравнения*, **34**, №5, 695–708 (1998).
35. *Melrose R.* Transformation of boundary problems. *Acta Math.*, **147**, 149–236 (1981).
36. *Weinstein A.* Fourier integral operators, quantization, and the spectra of a Riemannian manifolds. In: *Géométrie Symplectique et Physique Mathématique*, Colloque Internationale de Centre National de la Recherche Scientifique, Vol. 237, 1975, pp. 289–298.
37. *Weinstein A.* Some questions about the index of quantized contact transformations. *RIMS Kôkuryûku*, **104**, 1–14 (1977).