Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Паламодов, Интегралы Фурье, специальные функции и феномен полунепрерывности, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 2, 53–63

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa245>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:24:15

УДК 515.17+517.5

Интегралы Фурье, специальные функции и феномен полунепрерывности

© 2001. В. П. Паламодов

§1. Введение

Со всякой эллиптической деформацией квазиоднородного роста гиперповерхности связываются квазиоднородные специальные функции. Особенности этих функций характеризуются рациональными числами, которые называются *энергетическими* показателями. Применение вычетной формы к соответствующим интегралам Фурье приводит к интерпретации энергетических показателей в терминах геометрии лагранжева многообразия, порожденного деформацией. Мы приведем вычисления энергетических показателей для серии примеров и обсудим две гипотезы, в частности, феномен полунепрерывности при деформациях.

§2. Интегралы Фурье и символы

Запишем интеграл Фурье в виде

$$I(\phi, a) = \int_{\Theta} \exp(2\pi i \phi(x, \theta)) a(x, \theta) d\theta, \quad x \in X. \quad (2.1)$$

Здесь X — гладкое многообразие, а интегрирование ведется по открытому конусу Θ во вспомогательном пространстве $\mathbb{R}^N \setminus 0$ с координатами $\theta_1, \dots, \theta_N$ и объемной плотностью $d\theta := d\theta_1 \wedge \dots \wedge d\theta_N$. Группа $\mathbb{R}_+$ положительных чисел действует в $X \times \Theta$ по правилу $t: (x, \theta) \mapsto (x, t\theta)$. Фаза ϕ есть вещественная гладкая однородная функция порядка 1 по отношению к этому действию и $d\phi \neq 0$. Амплитуда a — также гладкая функция в $X \times \Theta$, причем предполагается, что образ ее носителя в пространстве $X \times \Theta/\mathbb{R}_+$ имеет компактное замыкание. Мы предполагаем также, что амплитуда a имеет структуру $a = a_M + r$, где a_M есть гладкая однородная функция некоторой степени M . Остаток удовлетворяет оценкам $|D_x^i D_\theta^j r| \leq C_{ij}(x)(|\theta|+1)^{m-j}$ для некоторого $m < M$, где C_{ij} суть непрерывные функции на X для всех i, j , таких, что $i+j \leq J$, а число J достаточно велико. Интеграл (2.1) определен как обобщенная функция в X [2]. Выберем гладкую объемную плотность dV в X и рассмотрим обобщенную полуплотность $I(\phi, A) = I(\phi, a)\sqrt{dV}$, $A = a\sqrt{dV}$ (т. е. функционал на пространстве гладких полуплотностей ρ с компактными носителями). Критические точки фазовой функции образуют множество $C(\phi) = \{\phi'_\theta = 0\} \subset X \times \Theta$. Это множество коническое, т. е. инвариантное относительно действия группы $\mathbb{R}_+$. Фазовая функция невырождена, т. е. формы $d\phi'_{\theta_1}, \dots, d\phi'_{\theta_N}$ линейно независимы на критическом множестве. Из этого условия следует, что $C(\phi)$ есть многообразие размерности $\dim X$. Пусть $T^*(X)$ — кокасательное расслоение и $T^*_\circ(X)$ — его подмножество

ненулевых ковекторов. Отображение

$$\tilde{\phi}: C(\phi) \rightarrow T_{\circ}^*(X), \quad (x, \theta) \mapsto (x, d_x \phi(x, \theta)),$$

является иммерсией, образ $\Lambda(\phi)$ которой есть коническое лагранжево многообразие.

Возьмем копию Θ° конуса Θ и введем два дифференциала $d = d_X + d_{\Theta}$ и $d^{\circ} = d_{\Theta^{\circ}}$ в комплексе де Рама $\Omega^*(X \times \Theta \times \Theta^{\circ})$. Рассмотрим фазовую функцию $\Phi(x, \theta, \theta^{\circ}) = \phi(x, \theta + \theta^{\circ})$ на $X \times \Theta \times \Theta^{\circ}$, а также подмногообразие $C^{\circ}(\Phi) = \{d^{\circ}\Phi = 0\}$, $Z = \{\theta^{\circ} = 0\}$. Пересечение $C^{\circ}(\Phi) \cap Z$ изоморфно критическому множеству $C(\phi)$. Определим коориентацию на $C^{\circ}(\Phi) \cap Z$ с помощью 1-форм

$$d\Phi'_1, \dots, d\Phi'_N, d\theta^{\circ}_1, \dots, d\theta^{\circ}_N, \quad \text{где } \Phi'_i := \partial\Phi/\partial\theta^{\circ}_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.2)$$

Эта коориентация не зависит от выбора координат в Θ . Произведение $\alpha := dV \wedge (dd^{\circ}\theta\theta^{\circ})^{\wedge N}$, где $\theta\theta^{\circ} := \sum \theta_i \theta^{\circ}_i$, есть гладкая плотность в $X \times \Theta \times \Theta^{\circ}$. Обозначим через ρ любую форму, которая удовлетворяет уравнению $(-idd^{\circ}\Phi)^{\wedge N} \wedge \rho = dV \wedge (dd^{\circ}\theta\theta^{\circ})^{\wedge N}$. Она определена с точностью до формы ρ' , такой, что $(dd^{\circ}\Phi)^{\wedge N} \wedge \rho' = 0$. Эта форма принадлежит идеалу в $\Omega^*(X \times \Theta \times \Theta^{\circ})$, порожденному формами (2.2), ввиду невырожденности фазы ϕ . Поэтому ограничение формы ρ на многообразие $C^{\circ}(\Phi) \cap Z$ однозначно определено. Положим

$$\sigma(I(\phi, A)) := a_M \sqrt{\rho|C(\Phi) \cap \bar{Z}}. \quad (2.3)$$

Это однородная полуплотность степени $M + N/2$ на $C(\phi)$. Она называется *символом* интеграла Фурье $I = I(\phi, A)$. Если отображение $\tilde{\phi}: C(\phi) \rightarrow \Lambda(\phi)$ инъективно, мы определяем прямой образ символа. Он является однородной полуплотностью на $\Lambda(\phi)$ того же порядка. Число $M + N/2$ называется *степенью* интеграла Фурье $I(\phi, A)$. Имеется неоднозначность в определении квадратного корня $S(\phi)$ в (2.3), которая несущественна в данном контексте. Глобальная конструкция изложена в [6].

ЗАМЕЧАНИЕ. Абсолютное значение полуплотности (2.3) совпадает с главным символом в смысле [2] с точностью до множителя $(2\pi)^{N/2}$.

Контактный символ. Факторпространство $C^*(X) = T_{\circ}^*(X)/\mathbb{R}_+$ есть многообразие коориентированных контактных элементов в X . Для конического лагранжева многообразия $\Lambda \subset T_{\circ}^*(X)$ множество $\Lambda_c = \Lambda/\mathbb{R}_+ \subset C^*(X)$ есть многообразие размерности $\dim X - 1$. Мы называем образ $L := p(\Lambda_c)$, где $p: C^*(T) \rightarrow X$ — естественная проекция, *локусом*¹⁾ лагранжева многообразия Λ . Для всякого интеграла Фурье $I = I(\phi, A)$ степени 0 мы задаем полуплотность

$$\sigma_c(I) := \sqrt{\frac{|\theta|}{d|\theta|}} \sigma(I). \quad (2.4)$$

Правая часть однородна нулевой степени; следовательно, она корректно определена на $X \times \Theta/\mathbb{R}_+$. Образ этой полуплотности на Λ_c называется *контактным символом* интеграла I .

¹⁾Я предпочитаю слово «локус» стандартному термину «волновой фронт», который часто используется в другом смысле.

§3. Вычеты интегралов Фурье

Для интеграла Фурье I нулевой степени плотность $|I|^2 dV$ имеет логарифмическую расходимость на локусе L многообразия $\Lambda = \Lambda(\phi)$. Вычет логарифмического члена есть эрмитова форма со значениями в пространстве мер на L . Возьмем произвольную точку $\lambda \in \Lambda$ и запишем $\lambda = (y, h)$, $h \in C_y^*(X)$. Выберем росток гладкой гиперповерхности $H \subset X$, который касается контактного элемента h , и рассмотрим гладкую ретракцию $q: Y \rightarrow H$ в некоторой окрестности Y точки y . Обозначим через $m(\lambda)$ алгебраическую кратность отображения qr в λ . Она не зависит от выбора гиперповерхности H и ретракции q . Скажем, что лагранжево многообразие Λ имеет конечную кратность над точкой y , если $m(\lambda) < \infty$ для каждой точки $\lambda \in \Lambda$ над y ; мы полагаем $m(y) := \sum \{m(\lambda); p(\lambda) = y\}$. В этом случае существует вещественная гладкая функция D , которая обращается в нуль на локусе L и удовлетворяет условиям

$$d^i D(y) = 0, \quad i < m, \quad d^m D(y) \neq 0, \quad m = m(y), \quad (3.1)$$

где d^i обозначает i -й дифференциал [6]. Любая функция D , наделенная этими свойствами, называется *барьером* лагранжева многообразия Λ (и его локуса) в точке y . Если Λ симметрично, т. е. инвариантно относительно инволюции $(x, \xi) \mapsto (x, -\xi)$, то существует барьер D , который удовлетворяет условиям (3.1) с числом $m'(y) := m(y)/2$.

ТЕОРЕМА 3.1 [6]. Пусть Λ — замкнутое симметричное лагранжево многообразие, имеющее конечную кратность над некоторой точкой $y \in X$. Для любых интегралов Фурье $U = I(\phi, A)$, $V = I(\psi, B)$ нулевой степени, таких, что $\Lambda(\phi) \cup \Lambda(\psi) \subset \Lambda$, выполняется равенство

$$\int_{D^2 \geq \varepsilon^2} \alpha U \bar{V} = \left(\int_{\Lambda_c} \alpha \sigma_c(U) \bar{\sigma}_c(V) + o(1) \right) \log \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \alpha \in \mathcal{D}(Y),$$

где D — барьер многообразия Λ в y , а Y — некоторая окрестность этой точки.

Распределение

$$\Sigma_\Lambda[U, \bar{V}](\alpha) := \int_{\Lambda_c} \alpha \sigma_c(U) \bar{\sigma}_c(V)$$

называется *вычетом* пары U, V . Символ Σ_Λ есть эрмитова форма, значениями которой служат (комплекснозначные) меры на локусе L .

§4. Деформации и специальные функции

Пусть f — голоморфная функция в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}^\nu$. Предположим, что начало координат $0 \in \Omega$ есть изолированная критическая точка функции f , причем $f(0) = 0$. Рассмотрим росток Z_0 гиперповерхности $\{f = 0\}$ в начале координат. Пусть $(S, 0)$ — росток комплексного пространства и $Z \subset S \times \Omega$ — гиперповерхность, заданная уравнением $F(s, \omega) = 0$, где F — некоторая голоморфная функция, причем $F(0, \omega) = f(\omega)$. Проекция $\pi: Z \rightarrow S$ есть деформация ростка Z_0 . Обозначим через $O_0(\Omega)$ алгебру голоморфных функций на ростке $(\Omega, 0)$. Факторалгебра $T^1(Z_0) = O_0/(f, f'_\omega)$ изоморфна пространству деформаций ростка Z_0 над двойной точкой. Размерность $\tau(Z_0) := \dim T^1(Z_0)$, называемая числом Тьюриной, конечна. Отображение Кодаиры–Спенсера $d\pi: T(S) \rightarrow T^1(Z_0)$

действует по формуле $d\pi(v) = \text{cl}(v(F))$. Деформация π называется *регулярной*, если росток S неособый и композиция

$$T(S) \xrightarrow{d\pi} T^1(Z_0) \longrightarrow T^1(Z_0)/\mathfrak{m}^2 T^1(Z_0)$$

сюръективна, где $\mathfrak{m}$ обозначает максимальный идеал в алгебре $O_0(\Omega)$. Если π регулярна, то пространство деформации Z неособо.

Возьмем регулярную деформацию $\pi: Z \rightarrow S$, заданную вещественной голоморфной функцией F (т.е. все производные функции F в нуле вещественны). Ограничение этой деформации на вещественную часть Z_R гиперповерхности Z есть аналитическое отображение $\pi_R: Z_R \rightarrow S_R$, где $S_R := S \cap \mathbb{R}^n$. Критическое множество отображения π_R есть

$$C_R(\pi) := \{F(s, \omega) = 0, F'_\omega(s, \omega) = 0, s \in S_R, \omega \in \Omega_R := \Omega \cap \mathbb{R}^\nu\}.$$

Это неособое многообразие размерности $\dim S - 1$. С деформацией связано симметричное лагранжево многообразие $\Lambda(\pi) := \Lambda_+ \cup \Lambda_-$, где

$$\Lambda_{\pm, c} = \{(s, \xi = \pm F'_s(s, \omega)), (s, \omega) \in C_R(\pi)\}. \quad (4.1)$$

Многообразие $\Lambda(\pi)$ не имеет самопересечений, если окрестности Ω , S достаточно малы, а $\Lambda_{\pm}$ имеет кратность $\tau(Z_0)$ над началом координат.

Запишем поверхностный интеграл

$$\delta_F(\rho, s) := \int_{Z_s} \frac{\rho}{d_\omega F(s, \cdot)}, \quad s \in S_R \setminus L, \quad (4.2)$$

где ρ — гладкая плотность с компактным носителем в Ω , а L — локус многообразия Λ . Под интегралом находится дифференциальная форма σ , такая, что $d_\omega F \wedge \sigma = \rho$. Она определена на множестве, где $d_\omega F \neq 0$, и интеграл не зависит от ее выбора. Поэтому функция (4.2) корректно определена на множестве $S_R \setminus L$; она может иметь особенности в L . Зафиксируем систему координат $s = (s_0, \dots, s_n)$ в S_R и положим $ds := ds_0 \wedge \dots \wedge ds_n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Полуплотность $\delta_F(\rho, s)\sqrt{ds}$ является интегралом Фурье степени $(1 - \nu)/2$, лагранжево многообразие которого содержится в $\Lambda(\pi)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим конус $\Theta := \{\theta_0 \neq 0\}$ во вспомогательном пространстве $\mathbb{R}^N$, $N = \nu + 1$, с координатами $\theta_0, \dots, \theta_\nu$ и центральную проекцию $r: \Theta \rightarrow \mathbb{R}^\nu$, которую мы запишем в виде $r(\theta) = \omega := \theta_0^{-1}(\theta_1, \dots, \theta_\nu)$. Функция $\phi(s, \theta) = \theta_0 F(s, r(\theta))$ есть невырожденная фаза в конусе Θ , поскольку деформация π регулярна. Мы утверждаем, что $\delta_F(\rho, s) = I(\phi, a)$, где $ad\theta = d\theta_0 \wedge r^*(\rho)$. Для проверки вычислим интеграл

$$I(\phi, a)(s) = \int_{\Theta} \exp(2\pi i \phi(s, \theta)) a(x, \theta) d\theta = \int_{\Omega_R} \left(\int \exp(2\pi i F(s, \omega) \theta_0) d\theta_0 \right) \rho.$$

Внутренний интеграл равен дельта-функции δ_F ; следовательно, правая часть равна интегралу от частного $\rho/d_\omega F$ по Z_s , что и требовалось доказать. Чтобы вычислить степень интеграла Фурье $\delta_F(\rho, s)\sqrt{ds}$, мы положим $a := |\theta_0|^{-\nu} r^*(\alpha)$, где $\rho = \alpha d\omega_1 \wedge \dots \wedge d\omega_\nu$. Здесь амплитуда a однородна степени $-\nu$; следовательно, степень интеграла Фурье равна $N/2 - \nu = (1 - \nu)/2$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Если число ν нечетно, то любая частная производная порядка $\kappa := (\nu - 1)/2$ полуплотности $\delta_F(\rho, s)\sqrt{ds}$ есть интеграл Фурье степени 0.*

§5. Эллиптические деформации

Выберем систему координат $\omega_1, \dots, \omega_\nu$ в Ω и предположим, что $f = f(\omega)$ есть квазиоднородный (взвешенно однородный) полином веса 1 с координатными весами $w_1, \dots, w_\nu$. Эти веса подчинены условиям $0 < w_j \leq 1/2$, определены однозначно и являются рациональными числами. Мы имеем $E_\omega(f) = f$ для эйлерова поля $E_\omega = \sum w_j \omega_j \partial_{\omega_j}$. Это векторное поле отталкивает от начала координат, поскольку все веса положительны. Полином g квазиоднороден веса $w(g)$, если $E(g) = w(g)g$. Предположим, что деформация π имеет вид

$$F(s, \omega) = f(\omega) + s_0 e_0(\omega) + \dots + s_n e_n(\omega), \quad (5.1)$$

где e_j , $j = 0, \dots, n$, — некоторые квазиоднородные полиномы, образы которых в $T^1(Z_0)$ линейно независимы. Если эти образы составляют базис, то деформация (5.1) минимальная версальная. Чтобы сделать функцию F квазиоднородной, мы присвоим вес $1 - w(e_j)$ переменной s_j , $j = 0, \dots, n$. Координата s_j в базе S называется *эллиптической*, если ее вес положителен. Если вес равен нулю или отрицателен, то мы называем эту координату параболической или гиперболической соответственно. Рассмотрим эйлерово поле

$$E_s := \sum_j [1 - w(e_j)] s_j \frac{\partial}{\partial s_j},$$

определенное на базе S . Рассмотрим поток $\{g_t\}$, порожденный полем E_s , т.е. группу локальных диффеоморфизмов окрестности S , такую, что $\partial_t g_t|_{t=0} = E_s$ и $g_t g_r = g_{t+r}$ для любых положительных t, r . Эллиптичность координаты s_j означает, что $|s_j|$ возрастает под действием этого потока. Сделав линейную замену переменных $s_0, \dots, s_n$, мы добьемся выполнения соотношений $e_0 = 1$, $e_1 = \omega_1, \dots, e_\mu = \omega_\mu$, $e_j \in \mathfrak{m}^2$, $j = \mu + 1, \dots, n$. Координаты $s_0, \dots, s_\mu$ всегда эллиптичны, поскольку $w(e_0) = 0$, $w(e_j) = w_j \leq 1/2$, $j = 1, \dots, \mu$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мы называем деформацию π *эллиптической*, если отображение $d\pi$ инъективно и все координаты в S эллиптичны. Росток Z_0 называется *эллиптическим*, если его минимальная версальная деформация вида (5.1) эллиптична. Это означает, что $w(e) < 1$ для любого монома, образ которого в $T^1(Z_0)$ не равен нулю. Особенности типов A, D, E квазиоднородны и эллиптичны. Обратное утверждение следует из результата Сайто [7].

Выберем регулярную эллиптическую деформацию и применим дельта-распределение (4.2) к произвольной квазиоднородной плотности ρ . Предположим сначала, что цикл Z_s компактен при любом $s \in S_R \setminus L$. Тогда функция (4.2) определена и является гладкой в $S_R \setminus L$; она также квазиоднородна с весами $w(s_j)$, $j = 0, \dots, n$. Производная $\partial/\partial s_0$ есть квазиоднородный оператор веса -1 ; следовательно, функция $V_\rho(s) := (\partial/\partial s_0)^\kappa \delta_F(\rho, s)$ имеет вес $w(\delta_F(\rho)) - \kappa = w(\rho) - 1 - \kappa$, где $w(\rho) = w(\alpha) + w$ для однородной плотности $\rho = \alpha d\omega$, причем $d\omega := d\omega_1 \wedge \dots \wedge d\omega_\nu$, $w := w_1 + \dots + w_\nu$. Поэтому полуплотность $V_\rho \sqrt{ds}$ также квазиоднородна веса

$$w(V_\rho \sqrt{ds}) = w(\rho) + \frac{1}{2} \left(\sum_0^n (1 - w(e_j)) - 1 - \nu \right). \quad (5.2)$$

Если цикл Z_s не компактен, мы вводим эту полуплотность посредством регуляризации:

$$V_\rho := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\partial/\partial s_0)^\kappa (\delta_F(\rho_\varepsilon)). \quad (5.3)$$

Здесь $\rho_\varepsilon := \exp(-\varepsilon\{\omega\})\rho$, $\{\omega\} = (\sum w_i^{2a_i} + 1)^{1/b}$, а натуральные числа $b, a_1, \dots, a_\nu$ выбраны таким образом, что $w_i = b/2a_i$, $i = 1, \dots, \nu$. Функция $\{\omega\}$ гладкая, невырожденная и асимптотически квазиоднородная веса 1, и $\rho_\varepsilon \rightarrow \rho$, когда $\varepsilon \searrow 0$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть π — произвольная эллиптическая деформация квазиоднородного ростка. Тогда*

- (i) *предел (5.3) существует для $\rho = d\omega$ и любой точки $s \in S_R \setminus L$,*
- (ii) *функция V_ρ квазиоднородная веса (5.2),*
- (iii) *$V_\rho = (\partial/\partial s_0)^\kappa \delta_F(\sigma) + h$, где $h \in C^\infty(S_0)$ для некоторой окрестности $S_0 \subset S$ начала координат, если плотность $\sigma \in \mathcal{D}(\Omega_R)$ совпадает с ρ в окрестности нуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим интегралы

$$I_\pm^\lambda(\tau, s) := \int_\Omega (F(s, \omega) \pm 0i)^\lambda \tau$$

с произвольной гладкой быстро убывающей плотностью τ . Они сходятся при любом $s \in S_R \setminus L$ и являются голоморфными функциями комплексного параметра λ . Мы продолжим эти интегралы для квазиоднородных плотностей с помощью приведенной ниже теоремы 5.2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Интегралы $\delta_F(\rho, \cdot)$, отвечающие версальной деформации π , играют роль специальных функций в теории интегралов Фурье [4].

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть снова π — любая регулярная эллиптическая деформация, а ρ — квазиоднородная гладкая плотность в Ω_R . Рассмотрим двойной предел*

$$I_\pm^\lambda(\rho, s) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \lim_{\delta \searrow 0} \int_\Omega (F(s, \omega) \pm \delta i)^\lambda \rho_\varepsilon.$$

Если $\operatorname{Re} \lambda < -w(\rho)$, этот предел существует при $s \in S_R \setminus L$ и имеет мероморфное продолжение по параметру λ с простыми полюсами в точках

$$\lambda = -w(\rho) + \sum_1^n k_j(1 - w(e_j)), \quad (5.4)$$

где $k_1, \dots, k_n$ — любые неотрицательные целые числа.

Доказательство содержится в [5] для случая эллиптических особенностей. Те же соображения применимы и для любой эллиптической деформации.

Вернемся к доказательству теоремы 5.1. Согласно теореме 5.2, все полюсы мероморфного продолжения принадлежат полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq -w(\rho)$. С другой стороны, для любой быстро убывающей плотности σ справедливо соотношение

$$\delta_F(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int (F - 0i)^{-1} \sigma - \int (F + 0i)^{-1} \sigma \right),$$

а $\partial/\partial s_0 (F \pm 0i)^\lambda = \lambda (F \pm 0i)^{\lambda-1}$. Учитывая (5.3), мы определяем искомую специальную функцию в виде

$$V_\rho(s) := (-1)^\kappa \frac{\kappa!}{2\pi i} (I_-^{(-\kappa-1)}(\rho, s) - I_+^{(-\kappa-1)}(\rho, s)).$$

Точка $-\kappa - 1$ не принадлежит указанной полуплоскости, так как $\kappa + 1 = (\nu + 1)/2 > \sum w_j = w(\rho)$. Поэтому правая часть корректно определена. Чтобы проверить п. (ii), мы заметим, что функции $I_{\pm}^{\lambda}(\rho, \cdot)$ квазиоднородны веса $\lambda + w(\rho)$, т. е.

$$E_s(I_{\pm}^{\lambda}(\rho, s)) = (\lambda + w(\rho))I_{\pm}^{\lambda}(\rho, s).$$

Это равенство легко проверяется при $\operatorname{Re} \lambda > 0$ и, следовательно, выполняется всегда в силу единственности аналитического продолжения.

Докажем (iii). Если носитель плотности σ не содержит особых точек слоя Z_s , то функции $I_{\pm}^{\lambda}(\tau, \cdot)$ являются гладкими в окрестности точки s . С другой стороны, если точка s близка к началу координат, то все особые точки гиперповерхности Z_s близки к началу координат в Ω . Это следует из эллиптичности деформации π . Поэтому носитель плотности $\rho_{\varepsilon} - \tau_{\varepsilon} = \exp(-\varepsilon\{\omega\})(\rho - \tau)$ не содержит особых точек этой гиперповерхности и функция $V_{\rho_{\varepsilon}} - (\partial/\partial s_0)^{\kappa}(\delta_F(\tau_{\varepsilon}))$ является гладкой вблизи нуля. Переходя к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, получаем (iii). $\square$

Вычислим контактный символ интеграла V_{ρ} . Выберем фазовую функцию (5.1) в виде

$$F(s, \omega) := f(\omega) + s_0 + s_1\omega_1 + \cdots + s_{\mu}\omega_{\mu} + s_{\mu+1}e_{\mu+1}(\omega) + \cdots + s_n e_n(\omega), \quad (5.5)$$

где $e_{\mu+1}, \dots, e_n \in \mathfrak{m}^2$. Положим $v = (\omega_{\mu+1}, \dots, \omega_n)$ и заметим, что функции $\omega, \tilde{s} = (s_{\mu+1}, \dots, s_n)$ образуют систему координат в $C_R(\pi)$. Мы можем использовать эту систему также на обеих частях $\Lambda_{\pm}$ при помощи отображений (4.1). Положим $d\tilde{s} = ds_{\mu+1} \wedge \cdots \wedge ds_n$.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. *Если деформация π регулярна, то для любой формы $\tau = \eta d\omega \in \mathcal{D}(\Omega)$ полуплотность $V_{\tau}\sqrt{d\tilde{s}}$ есть интеграл Фурье нулевой степени, причем $\Lambda(\phi) \subset \Lambda(\pi)$. Контактный символ этого интеграла равен образу полуплотности*

$$\sigma_c(V_{\tau}) = c_{\tau}(\tilde{s}, \omega) \eta \sqrt{\frac{\pm d\tilde{s} \wedge d\omega}{\det f''_{vv}}}$$

в многообразии $\Lambda(\pi) = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$, где c_{τ} — некоторая гладкая функция, такая, что $|c_{\tau}(0, 0)| = 1$.

Доказательство следует из формул (2.3) и (2.4), поскольку $\partial F/\partial s_0 = 1$ и $|\theta_0| = c(\theta)|\theta|$, $c(0) = 1$.

§6. Энергетические показатели

Пусть Z_0 — квазиоднородная гиперповерхность и $\pi: Z \rightarrow S$ — квазиоднородная версальная деформация ростка этой гиперповерхности в точке $z = 0$. Рассмотрим подпространство S_e в S , на котором обращаются в нуль все неэллиптические координаты. Мы назовем ограничение деформации π на S_e максимальной эллиптической деформацией ростка Z_0 . Она определена однозначно с точностью до квазиоднородной биекции. Максимальная эллиптическая деформация всегда регулярна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть π — максимальная эллиптическая деформация некоторого квазиоднородного ростка Z_0 . Мы называем числа

$$e(Z_0) := 2w - \nu + \sum_1^n (1 - w(e_j)), \quad w = \sum w_j,$$

$$e'(Z_0) := \nu - 2w + \sum_1^n (1 - w(e_j)),$$

нижним и верхним энергетическими показателями ростка Z_0 соответственно. Оба показателя сохраняются при замене функции $f(\omega)$ на $f(\omega) + q(v)$, где q — произвольная неособая квадратичная форма дополнительных координат v . Нижний показатель совпадает с весом распределения $|V_\rho|^2 ds$ в силу формулы (5.2). Полином $\det f''$ квазиоднороден с весом $w(\eta) = \nu - 2w$ (максимальный вес в $T^1(Z_0)$). Для плотности $\tau = \det f'' d\omega$ мы имеем формально

$$w(|V_\tau|^2 ds) = e(Z_0) + 2w(\eta) = \nu - 2w + \sum_1^n (1 - w(e_j)) = e'(Z_0),$$

т. е. верхний показатель равен весу распределения $|V_\tau|^2 ds$ при условии, что оно определено. Рассуждая, как в теореме 5.2, мы можем ее задать с помощью мероморфного продолжения интегралов $I_\pm^\lambda$ в точку $\lambda = -\kappa - 1$, если эта точка не является полюсом. Если она есть полюс, то его порядок равен 1 и мы определяем V_τ с помощью (5.4), заменяя интегралы $I_\pm^\lambda$ их вычетами в этой точке. В любом случае мы получаем некоторую обобщенную функцию V_τ , причем распределение $|V_\tau|^2 ds$ квазиоднородно с весом, равным верхнему энергетическому показателю. Оба распределения имеют вид плотностей энергии для сингулярных волновых полей $\delta_F(\rho)$, $\delta_F(\tau)$ (в случае $n = 3$); это служит мотивировкой термина *энергетический*.

С другой стороны, энергетические показатели совпадают с весами плотностей $d\tilde{s} \wedge d\omega$ и $|\det F''_{\omega\omega}|^2 d\tilde{s} \wedge d\omega$ соответственно. Заметим при этом, что для деформации (5.1) матрица $F''_{\omega\omega}$ зависит только от переменных $\tilde{s}$, ω . Ниже мы дадим интерпретацию этого совпадения в терминах геометрии критического множества $C_R(\pi)$.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Для любой пробной плотности $\rho = \eta d\omega$

$$\int_{D^2 \geq \varepsilon^2} \alpha |V_\rho|^2 ds = \left(\int_{C_R(\pi)} \frac{p^*(\alpha) |\eta|^2}{\det F''_{vv}} d\tilde{s} \wedge d\omega + o(1) \right) \log \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \alpha \in \mathcal{D}(S),$$

где D есть барьер многообразия $\Lambda(\pi)$ в точке $0 \in S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это соотношение следует из теоремы 3.1, если мы подсчитаем символ интеграла V_ρ с помощью следствия 5.3. $\square$

Поднимем поле E_s до поля $E := E_\omega + E_s$ в пространстве $\Omega \times S$. Поле E касается Z , потому что $E(F) = F$. Пусть E_Λ — образ эйлерова поля E при диффеоморфизме $C_R(\pi) \cong \Lambda_\pm(\pi)$, а $\{G_t, t > 0\}$ — поток в $\Lambda(\pi)$, порожденный полем E_Λ . Выберем риманову метрику в S_R . Она порождает метрику в $T^*(S_R)$ и, следовательно, на $\Lambda(\pi)$. Для произвольного множества $K \subset \Lambda(\pi)$ мы положим $K_t := G_t(K)$ и через $\text{Vol}(K)$ обозначим риманов объем множества K .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Пусть снова π — максимальная эллиптическая деформация квазиоднородного ростка Z_0 . Для любого компактного множества $K \subset \Lambda(\pi)$ мы имеем

$$\text{Vol}(K_t) = (c + o(1))t^e, \quad (6.1)$$

$$\text{Vol}(p(K_t)) = (c' + o(1))t^{(e+e')/2} \quad (6.2)$$

при $t \rightarrow 0$, где e, e' суть энергетические показатели ростка Z_0 , c, c' — некоторые положительные константы, а $p: \Lambda(\pi) \rightarrow S_R$ — естественная проекция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что эйлерово поле E_s порождает некоторый поток $\{g_t\}$ в S_R . Для любой цепи γ , плотности b и любой ограниченной функции α с компактным носителем мы имеем

$$\int_{g_t(\gamma)} \alpha_t b = \int_{\gamma} \alpha g_t^*(b), \quad t > 0,$$

где $\alpha_t = g_{1/t}^*(\alpha)$. Выберем $\gamma = S(\varepsilon) := \{D^2(s) \geq \varepsilon\}$ и положим $b = |V_\rho|^2 ds$, $\rho = d\omega$. В качестве барьера D мы можем взять дискриминант $D(s)$ полинома F , который является квазиоднородным полиномом веса m . В этом случае $g_t((\varepsilon)) = \{D^2(s) \geq t^m \varepsilon\} = S(t^m \varepsilon)$. Тогда выполняется уравнение $g_t^*(b) = t^e b$, где e — нижний показатель; следовательно,

$$\int_{S(t^m \varepsilon)} \alpha_t |V_\rho|^2 ds = t^e \int_{S(\varepsilon)} \alpha |V_\rho|^2 ds.$$

Применим теорему 3.1 к обеим частям:

$$\int_{\Lambda(\pi)} p^*(\alpha_t) |\sigma_c|^2 \log \frac{1}{t^m \varepsilon} = (1 + o(1)) t^e \int_{\Lambda(\pi)} p^*(\alpha) |\sigma_c|^2 \log \frac{1}{\varepsilon}, \quad t \rightarrow 0.$$

Здесь σ_c обозначает контактный символ интеграла V_ρ . С помощью следствия 5.3 мы получаем $|\sigma_c|^2 = a(\tilde{s}, \omega) d\tilde{s} \wedge d\omega$, $a(0, 0) = 1$. Исключая логарифмические множители при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\int_{C_R(\pi)} p^*(\alpha_t) d\tilde{s} \wedge d\omega = (1 + o(1)) t^e \int_{C_R(\pi)} p^*(\alpha) d\tilde{s} \wedge d\omega, \quad t \rightarrow 0. \quad (6.3)$$

Мы имеем включение $s_i |C_R(\pi) \in \mathfrak{n}^2$ для $i = 0, \dots, \mu$, где $\mathfrak{n}$ обозначает максимальный идеал ростка $(C_R(\pi), (0, 0))$. Поэтому плотность $d\tilde{s} \wedge d\omega$ равна форме объема многообразия $C_R(\pi)$, умноженной на величину $c + o(1)$, $c > 0$, при $t \rightarrow 0$, и подобное утверждение верно для $\Lambda(\pi)$. Для проверки соотношения (6.1) мы можем предположить, что множество K совпадает с $p^{-1}(p(K))$, поскольку проекция $p: \Lambda(\pi)/\mathbb{Z}_2 \rightarrow L$ взаимно однозначна везде, за исключением подмножества многообразия $\Lambda(\pi)$ нулевой меры. Если функция α есть индикатор множества $p(K)$, то функция $p^*(\alpha_t)$ равна индикатору множества K_t ; следовательно, левая часть формулы (6.3) равна объему компакта K_t с коэффициентом $1 + o(1)$. Это доказывает (6.1).

Для проверки соотношения (6.2) мы применяем вычетную форму к паре V_τ, V_ρ , где $\rho = d\omega$, $\tau = \det F''_{\omega\omega} d\omega$. При этом мы можем предположить, что деформация

задана формулой (5.5). Согласно следствию 5.3,

$$\int_{D^2(s) \geq \varepsilon^2} V_\tau V_\rho ds = \left(\int_{C_R(\pi)} p^*(\alpha) \det F''_{\omega\omega} d\tilde{s} \wedge d\omega + o(1) \right) \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

Далее,

$$\frac{\det F''_{\omega\omega}}{\det F''_{vv} \det F''_{\omega\tilde{s}}} d\tilde{s} \wedge d\omega = (-1)^m p^*(d\hat{s} \wedge d\tilde{s}),$$

где $\hat{s} = (s_1, \dots, s_\mu)$ и $\det F''_{\omega\hat{s}} = 1$ ввиду структуры формулы (5.5). Поэтому

$$\begin{aligned} (-1)^m \int_{C_R(\pi)} p^*(\alpha) \frac{\det F''_{\omega\omega}}{\det F''_{vv} \det F''_{\omega\tilde{s}}} d\tilde{s} \wedge d\omega &= \int_{C_R(\pi)} p^*(\alpha d\hat{s} \wedge d\tilde{s}) \\ &= \int_L \alpha d\hat{s} \wedge d\tilde{s} = \int_{p(K)} d\hat{s} \wedge d\tilde{s}. \end{aligned}$$

Затем мы повторяем предыдущие соображения и приходим к (6.2). $\square$

6.1. Вычисления и гипотезы. Оба энергетических показателя обращаются в нуль для ростка с невырожденной критической точкой, т. е. в случае $\tau(Z_0) = 1$. Такие точки обеспечивают логарифмическую расходимость в теореме 3.1. В остальных случаях энергетические показатели строго положительны. Для эллиптических ростков мы имеем

$$\begin{aligned} e(A_k) &= \frac{k^2 - k}{2(k+1)}, & e'(A_k) &= \frac{k^2 + 3k - 4}{2(k+1)}, & k &\geq 1, \\ e(D_k) &= \frac{k^2 - 4k + 6}{2(k-1)}, & e'(D_k) &= \frac{k^2 - 2}{2(k-1)}, & k &\geq 4, \\ e(E_k) &= \frac{k-1}{3}, & e'(E_k) &= \frac{10}{3}, \frac{34}{9}, \frac{63}{15}, & k &= 6, 7, 8. \end{aligned}$$

Для параболических ростков P_k (k обозначает число Тьюриной)

$$e(P_k) = \frac{k}{2} - 1, \quad e'(P_k) = \frac{k}{2}, \quad k = 8, 9, 10.$$

Рассмотрим росток, заданный однородной функцией $f(\omega_1, \omega_2) = \omega_1^m + \omega_2^m$, $m > 2$, для которого $\tau(Z_0) = (m-1)^2$. Максимальная эллиптическая деформация задается функцией

$$\begin{aligned} F(s; \omega_1, \omega_2) &= f(\omega_1, \omega_2) + \sum_{i+j < m-1} s_{ij} \omega_1^i \omega_2^j + \sum_{i+j = m-1, ij > 0} s_{ij} \omega_1^i \omega_2^j, & (6.4) \\ e &= \frac{2}{m} - 3 + \frac{(m+1)(m+2)}{6}, & e' &= e + 4 - \frac{8}{m}. \end{aligned}$$

Аналогично, для функции $f(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega_1^m + \omega_2^m + \omega_3^m$, $m > 2$, мы имеем $\tau(Z_0) = (m-1)^3$ и

$$e = \frac{3}{m} - 4 + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{24}, \quad e' = e + 6 - \frac{12}{m}. \quad (6.5)$$

Это вычисления делают правдоподобными следующие гипотезы:

ГИПОТЕЗА I (оценка сверху). Для любого квазиоднородного ростка Z_0

$$e(Z_0) + e'(Z_0) < \tau(Z_0) := \dim T^1(Z_0).$$

Это неравенство, очевидно, выполняется для любого ростка из предыдущих списков.

ГИПОТЕЗА II (полунепрерывность). Если (Z', z) есть некоторый особый росток некоторого слоя версальной деформации некоторого квазиоднородного ростка $(Z, 0)$, причем точка z достаточно близка к 0, то

$$e'(Z') \leq e'(Z).$$

Можно без труда проверить гипотезу II для эллиптических особенностей, отслеживая список «примыканий», имеющийся в [1]. Для однородных полиномов f указанного выше вида обе гипотезы следуют из (6.4) и (6.5). Эти полиномы могут иметь более сложный вид; важно лишь, что число Тюриной ростка то же самое, что и для полинома указанного простейшего вида.

Отмечу, что если π — деформация квазиоднородного ростка Z_0 , а $M \subset S$ — модулярный страт, то уравнение $e(Z_s) = e(Z)$ выполняется в каждой точке $s \in M$, близкой к нулю. Действительно, мы имеем $\tau(Z_s) = \tau(Z)$; следовательно, росток Z_s также квазиоднородный с теми же весами, откуда следует, что $e(Z_s) = e(Z)$, $e'(Z_s) = e'(Z)$.

Автор благодарит Б. Мартина и Т. Хирша за очень полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Гусейн-Заде С. М., Варченко А. Н. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1. Наука, М., 1982.
2. Hörmander L. Fourier integral operators, I. Acta Math., **127**, Nos. 1–2, 79–183 (1971).
3. Паламодов В. П. Асимптотические разложения интегралов в комплексной и вещественной областях. Матем. сб., **127**, №2, 209–238 (1985).
4. Паламодов В. П. Обобщенные функции и гармонический анализ. ВИНТИ. Т. 72, 1991.
5. Palamodov V. P. Special functions of several variables. In: Linear topological spaces and complex analysis III. METU-Tubitak, Ankara, 1997, pp. 120–137.
6. Palamodov V. P. Dynamics of wave propagation and curvature of discriminants. Ann. Inst. Fourier, **50**, No. 6, 1945–1981 (2000).
7. Saito K. Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen. Invent. Math., **14**, 123–142 (1971).

Tel Aviv University
e-mail: palamodo@post.tau.ac.il

Поступило в редакцию
24 декабря 1999 г.