Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Пионтковский, О рядах Гильберта козюлевых алгебр, *Функц. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 2, 64–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa246>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 06:46:52

УДК 512.66

О рядах Гильберта козюлевых алгебр*

© 2001. Д. И. Пионтковский

В этой статье рассматриваются ассоциативные градуированные алгебры над фиксированным полем k . Такая алгебра $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$, где $A_0 = k$, называется *квадратичной*, если она порождена пространством $V = A_1$ и изоморфна фактор-алгебре свободной ассоциативной (тензорной) алгебры $T(V)$ по идеалу, порожденному пространством квадратичных соотношений $R \subset V \otimes V$ (используется обозначение $A = \langle V | R \rangle$). Квадратичная алгебра $A^! = \langle V^* | R^\perp \rangle$, где $R^\perp$ — аннулятор пространства R в $V^* \otimes V^*$, называется *двойственной* к A . Она изоморфна диагональной подалгебре $\bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^{i,i}(k, k)$ в алгебре Йонеды $\text{Ext}_A(k, k)$. Квадратичная алгебра A называется *козюлевой*¹⁾, если $A^! \simeq \text{Ext}_A(k, k)$, т. е. $\text{Ext}_A^{i,j}(k, k) = 0$ при $i \neq j$ [1–3].

Пусть $A(z) = \sum_{i \geq 0} \dim A_i z^i$ — ряд Гильберта градуированной алгебры A , а $P_A(s, t) = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} \dim \text{Ext}_A^{i,j}(k, k) s^i t^j$ — ее ряд Пуанкаре. Взяв эйлерову характеристику для минимальной свободной резольвенты тривиального модуля k_A , получаем соотношение

$$A(z)P_A(-1, z) = 1,$$

т. е. для козюлевой алгебры A выполняется равенство

$$A(z)A^!(-z) = 1. \quad (1)$$

Долгое время оставался открытым следующий вопрос [3]: вытекает ли из равенства (1), что квадратичная алгебра A является козюлевой? Отрицательный ответ был получен в 1995 г. независимо Л. Е. Посицельским [4] и Я.-Э. Русом [5] (при этом у Посицельского контрпримером служит конечномерная алгебра, а у Руса коммутативная). В этой связи возник новый вопрос [4]: можно ли по рядам Гильберта алгебр A и $A^!$ определить, является ли A козюлевой?

Цель этой статьи — дать на него отрицательный ответ. Назовем квадратичную, но не козюлеву алгебру A *квазикозюлевой*, если существует такая козюлева алгебра A' , что и ряды Гильберта самих этих алгебр A , A' , и ряды Гильберта двойственных к ним алгебр совпадают. Основной результат состоит в том, что квазикозюлевы алгебры существуют (теорема 3). Сначала излагается общий метод, который позволяет получить такую алгебру A как подалгебру расширения любой не козюлевой квадратичной алгебры B , удовлетворяющей условию $B(z)B^!(-z) = 1$, и подобрать соответствующую алгебру A' . Затем этот способ

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 99-01-01144.

¹⁾ Эти алгебры названы так в [1] в честь Ж. Л. Козюля (J. L. Koszul). В отечественной литературе встречаются транскрипции Косуль, Кошуль и Козюль этой фамилии. Автор остановился на последнем варианте, поскольку он более точно передает ее французское звучание.

несколько изменяется с тем, чтобы получить более простой пример квазикозюлевой алгебры.

Эта статья появилась в результате обсуждений с Л. Е. Посицельским, которому автор хотел бы выразить свою благодарность.

Следуя [4], назовем квадратичную алгебру A n -козюлевой, если условие $\text{Ext}_A^{i,j}(k, k) = 0$ при $i \neq j$ выполняется для всех $j \leq n$. Так, всякая квадратичная алгебра 3-козюлева, козюлева алгебра n -козюлева для всех n , а квадратичная алгебра, не являющаяся козюлевой, не будет n -козюлевой ни для каких достаточно больших n . Очевидно, для n -козюлевой алгебры B выполняется соотношение $B(z)B^1(-z) = 1 + o(z^n)$.

Если алгебра B — один из упомянутых примеров Руса и Посицельского, то B является $(n-1)$ -козюлевой (но не n -козюлевой) для некоторого $n > 0$, но

$$B(z)B^1(-z) = 1 + o(z^n).$$

Можно построить и более обширный класс алгебр с тем же свойством (по существу этот метод используется в [4]). Пусть G является $(n-1)$ -козюлевой (но не n -козюлевой) алгеброй, где n — некоторое нечетное число (бесконечное семейство таких алгебр с семью порождающими дает, в частности, пример 7.7 из [6]). Тогда алгебра $B = G \otimes G^1$ также $(n-1)$ -козюлева (и не n -козюлева). Поскольку степенной ряд

$$R(z) = B(z)B^1(-z) = (G \otimes G^1)(z)(G^1 \otimes G)(-z) = G(z)G(-z)G^1(z)G^1(-z)$$

задает в окрестности нуля четную аналитическую функцию, причем $R(z) = 1 + O(z^n)$, то для $(n-1)$ -козюлевой алгебры B выполняется равенство

$$B(z)B^1(-z) = 1 + o(z^n).$$

Вместо тензорного произведения здесь можно использовать также прямую сумму или прямое произведение.

Лемма 1. (а) Для любой квадратичной алгебры B и любого натурального n найдутся такие квадратичные мономиальные алгебры M и N , что для алгебр N и $N' = M * B$ (где «звездочка» $*$ обозначает свободное произведение) имеет место равенство степенных рядов

$$N^1(z) - N'^1(z) = o(z^n).$$

(б) Если в условиях п. (а) выполняется соотношение $B(z)B^1(-z) = 1 + o(z^n)$, то справедливы также равенства

$$N'(z)N^1(-z) = 1 + o(z^n) \quad \text{и} \quad N(z) - N'(z) = o(z^n).$$

(с) Если алгебра B квадратична, а M козюлева, то алгебра $M * B$ является n -козюлевой тогда и только тогда, когда алгебра B n -козюлева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $s \geq 3$ рассмотрим две мономиальные алгебры

$$E^s = k\langle x_1, \dots, x_s | x_1x_2, \dots, x_{s-2}x_{s-1}, x_{s-1}x_s \rangle,$$

$$G^s = k\langle x_1, \dots, x_s | x_1x_2, \dots, x_{s-2}x_{s-1}, x_{s-2}x_s \rangle$$

с s порождающими и $s - 1$ соотношениями. В виде графов их соотношения выглядят так:

$$\begin{array}{ccccccc} E^s : & x_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & x_s \\ & \bullet & & & & \bullet \\ G^s : & x_1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & x_{s-2} & \longrightarrow & x_{s-1} \\ & \bullet & & & & \bullet & & \bullet \\ & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & \bullet & x_s \end{array}$$

Как и любые квадратичные мономиальные алгебры, они являются козюлевыми и даже PBW-алгебрами; см. [1]. Их ряды Пуанкаре, совпадающие с рядами Гильберта двойственных алгебр, легко вычислить стандартными средствами [8, 9]:

$$\begin{aligned} E^s(z) &= 1 + sz + (s-1)z^2 + \dots + 2z^{s-1} + z^s, \\ G^s(z) &= 1 + sz + (s-1)z^2 + \dots + 2z^{s-1}. \end{aligned}$$

Имеем

$$E^s(z) - G^s(z) = z^s, \quad E^s(z) - G^s(z) = E^s(-z)^{-1} - G^s(-z)^{-1} = z^s + o(z^s).$$

Пусть B — квадратичная алгебра и Q — произвольная мономиальная квадратичная алгебра с тем же количеством порождающих и соотношений, что и B . Тогда

$$B^!(z) - Q^!(z) = P(z) + o(z^s),$$

где $P(z)$ — многочлен степени s с целыми коэффициентами, причем степень младшего члена не меньше 3. Если $n \leq 2$, то это дает утверждение (а).

Пусть $n \geq 3$. Скомбинируем отдельно члены $P(z)$ с положительными и отрицательными коэффициентами:

$$P(z) = a_1 z^{i_1} + \dots + a_p z^{i_p} - b_1 z^{j_1} - \dots - b_q z^{j_q},$$

где $a_i, b_j > 0$. Положим

$$\begin{aligned} M &= (E^{i_1})^{*a_1} * \dots * (E^{i_p})^{*a_p} * (G^{j_1})^{*b_1} * \dots * (G^{j_q})^{*b_q}, \\ N &= Q * (G^{i_1})^{*a_1} * \dots * (G^{i_p})^{*a_p} * (E^{j_1})^{*b_1} * \dots * (E^{j_q})^{*b_q} \end{aligned}$$

и $N' = M * B$. Поскольку алгебра гомологий свободного произведения алгебр изоморфна прямой сумме гомологий сомножителей, т.е.

$$\text{Ext}_{N'}^{i,j}(k, k) = \text{Ext}_M^{i,j}(k, k) \oplus \text{Ext}_B^{i,j}(k, k) \quad \text{при } i > 0, \quad (2)$$

то

$$\begin{aligned} N'^!(z) - N^!(z) &= (B^! \oplus (G^{i_1!})^{\oplus a_1} \oplus \dots \oplus (G^{i_p!})^{\oplus a_p} \oplus (E^{j_1!})^{\oplus b_1} \oplus \dots \oplus (E^{j_q!})^{\oplus b_q})(z) \\ &\quad - (R^! \oplus (E^{i_1!})^{\oplus a_1} \oplus \dots \oplus (E^{i_p!})^{\oplus a_p} \oplus (G^{j_1!})^{\oplus b_1} \oplus \dots \oplus (G^{j_q!})^{\oplus b_q})(z) \\ &= B^!(z) - R^!(z) + a_1(G^{i_1!}(z) - E^{i_1!}(z)) + \dots + a_p(G^{i_p!}(z) - E^{i_p!}(z)) \\ &\quad - b_1(G^{j_1!}(z) - E^{j_1!}(z)) - \dots - b_q(G^{j_q!}(z) - E^{j_q!}(z)) \\ &= P(z) - a_1 z^{i_1} - \dots - a_p z^{i_p} + b_1 z^{j_1} + \dots + a_q z^{j_q} + o(z^n) = o(z^n), \end{aligned}$$

где $\oplus$ означает прямую сумму алгебр с общей единицей. Таким образом, утверждение (а) доказано.

Предположим теперь, что выполняется равенство $B(z)B^l(-z) = 1 + o(z^n)$. Так как

$$N'(z) = (B * M)(z) = (B(z)^{-1} + M(z)^{-1} - 1)^{-1},$$

то

$$\begin{aligned} N'(z)N^l(-z) &= (B * M)(z)(B * M)^l(-z) = (B * M)(z)(B^l(-z) + M^l(-z) - 1) \\ &= (B(z)^{-1} + M(z)^{-1} - 1)^{-1}(B(z)^{-1} + o(z^n) + M(z)^{-1} - 1) \\ &= 1 + o(z^n). \end{aligned}$$

Тогда

$$N'(z) - N(z) = (N^l(-z))^{-1} - (N^l(-z))^{-1} + o(z^n) = o(z^n),$$

что доказывает п. (b).

Утверждение (с) следует из формулы (2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Тем же способом можно доказать вариант леммы 1, где вместо свободного произведения используется прямая сумма или тензорное произведение алгебр. Поскольку тензорное произведение мономиальных алгебр уже не обязательно является мономиальной алгеброй (но является козюлевой), в последнем случае в конструкции алгебр M и N вместо него следует использовать, например, произведение

$$\langle V|R \rangle \otimes^0 \langle W|S \rangle = \langle V \oplus W | R + S + V \otimes W \subset (V \oplus W)^{\otimes 2} \rangle;$$

см. [10]. Вариант с прямой суммой будет использован ниже в предложении 4.

Известны еще два произведения, сохраняющие свойства мономиальности и козюлевости квадратичных алгебр. *Произведением Сегре* двух градуированных алгебр $B = \bigoplus_{i \geq 0} B_i$ и $C = \bigoplus_{i \geq 0} C_i$ называется алгебра $B \circ C = \bigoplus_{i \geq 0} B_i \otimes C_i$ с естественным умножением. Очевидно, что на рядах Гильберта произведение Сегре действует как произведение Адамара по формуле

$$\left(\sum_{i \geq 0} b_i z^i \right) \circ \left(\sum_{i \geq 0} c_i z^i \right) = \sum_{i \geq 0} b_i c_i z^i. \quad (3)$$

Двойственное произведение $\bullet$ можно задать соотношением $(B \circ C)^l = B^l \bullet C^l$ [7].

Далее нам потребуется следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [4]. Пусть алгебра B квадратична, а C козюлева. Тогда

(а) имеет место формула

$$(B \bullet C)(z) = (B(-z)^{-1} \circ C(-z)^{-1})^{-1}|_{z=-z}$$

для рядов Гильберта;

(b) если $C_{n+1} = 0$, а $C_n \neq 0$, то алгебра $B \circ C$ козюлева тогда и только тогда, когда алгебра B n -козюлева.

Нетрудно привести пример алгебры C , фигурирующей в п. (b) этого предложения: можно положить $C = \Lambda^k(x_1, \dots, x_n)$ или $C = E^n$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть B — такая квадратичная, но не n -козюлева алгебра, что

$$B(z)B^l(-z) = 1 + o(z^n),$$

где $n \geq 3$. Обозначим через C произвольную козюлеву алгебру, такую, что $C_n \neq 0$, $C_{n+1} = 0$. Тогда существуют такие мономиальные квадратичные алгебры M , N , что для алгебр $A = (M * B) \circ C$ и $A' = N \circ C$ выполняются равенства

$$A(z) = A'(z), \quad A^1(z) = A'^1(z),$$

причем алгебра A' козюлева, а алгебра A — нет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M , N , N' те же, что и в лемме 1. Тогда равенство $A(z) = A'(z)$ следует из леммы 1(b) и формулы (3), а равенство $A^1(z) = A'^1(z)$ — из леммы 1(a) и предложения 2(a). Алгебра A' козюлева как произведение Сегре козюлевых алгебр, а алгебра A не козюлева по предложению 2(b), так как N' не n -козюлева в силу леммы 1(c).

ЗАМЕЧАНИЕ. Из формулы $\langle V|R \rangle \circ \langle U|S \rangle = \langle V \otimes U|R \otimes U^{\otimes 2} + V^{\otimes 2} \otimes S \rangle$ [7] следует, что произведение Сегре двух мономиальных квадратичных алгебр — снова мономиальная алгебра. Поскольку в теореме 3 в качестве алгебры C можно взять мономиальную алгебру (например, $E^{n!}$), алгебру A' также можно считать мономиальной.

Следующее предложение дает более простой пример квазикозюлевой алгебры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть

$$\begin{aligned} D &= k\langle x, y, z \mid xy, yx + z^2 \rangle, & D' &= k\langle x, y, z \mid xy, xz \rangle, \\ M &= k\langle a, b, c \mid a^2, b^2, ab, bc \rangle, & M' &= k\langle a, b, c \mid ab, ba, ca, ac \rangle. \end{aligned}$$

Тогда алгебры

$$A = (D \oplus D^1 \oplus M) \circ E^{5!}, \quad A' = (D' \oplus D'^1 \oplus M') \circ E^{5!}$$

обладают следующими свойствами:

- (а) A не козюлева, A' мономиальная (в частности, козюлева);
- (б) $A(z) = A'(z) = 1 + 45z + 56z^2 + 72z^3 + 96z^4 + 96z^5$, $A^1(z) = A'^1(z) = A(-z)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = D \oplus D^1$, $B' = D' \oplus D'^1$. Как показано в [3, 4], алгебра D является 4-козюлевой, но не 5-козюлевой. При этом

$$D(z) = (1 + z^5)(1 - 3z + 2z^2 - z^5)^{-1}, \quad D^1(z) = 1 + 3z + 2z^2,$$

так что для алгебры $D' \simeq G^3$ получаем

$$D'^1(z) = 1 + 3z + 2z^2 = D^1(z), \quad D'(z) = D'^1(-z)^{-1} = D(z) - 2z^5 + O(z^6).$$

Следовательно,

$$B(z) = B'(z) + 2z^5 + O(z^6), \quad B^1(z) = B'^1(z) + 2z^5 + O(z^6),$$

так что

$$\begin{aligned} B(z)B^1(-z) &= (B'(z) + 2z^5 + O(z^6))(B'^1(-z) - 2z^5 + O(z^6)) \\ &= 1 + 2z^5(B'^1(-z) - B'(z)) + O(z^6) = 1 + O(z^6). \end{aligned}$$

При этом алгебра B , как и D , является 4-козюлевой, но не 5-козюлевой (это следует из того факта, что алгебра гомологий прямой суммы изоморфна прямому произведению алгебр гомологий).

С другой стороны, стандартными методами легко вычислить ряды Гильберта мономиальных алгебр M , M' :

$$M(z) = 1 + 3z + 5z^2 + 9z^3 + 17z^4 + 31z^5 + O(z^6),$$

$$M'(z) = 1 + 3z + 5z^2 + 9z^3 + 17z^4 + 33z^5 + O(z^6) = M(z) + 2z^5 + O(z^6).$$

Положив $P = B \oplus M$, $Q = B' \oplus M'$, получаем

$$P(z) = B(z) + M(z) - 1 = 1 + 9z + 14z^2 + 24z^3 + 48z^4 + 96z^5 + O(z^6) = Q(z).$$

При этом $P(z)P^1(-z) = 1 + O(z^6)$, как следует из аналогичной формулы для алгебры B и из козюлевости алгебры M .

Теперь осталось только применить к алгебрам P и Q предложение 2. Искомые ряды Гильберта вычисляются как произведение Адамара:

$$A(z) = A'(z) = P(z) \circ E^{51}(z) = 1 + 45z + 56z^2 + 72z^3 + 96z^4 + 96z^5.$$

Дополнение. Когда первоначальная версия этой статьи была уже представлена в редакцию, Э.-Я. Рус сообщил, что построенные им в [5] четыре примера 5-порожденных коммутативных квадратичных алгебр, для которых выполняется равенство (1), также являются квазикозюлевыми. В этой связи представляет интерес вопрос об улучшении полученных примеров: существуют ли квазикозюлевы квадратичные алгебры, у которых глобальная размерность или количество порождающих меньше пяти?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Priddy S. B.* Koszul resolutions. Trans. Amer. Math. Soc., **152**, No. 1, 39–60 (1970).
2. *Löfwall C.* On the subalgebra generated by the one-dimensional elements in the Yoneda Ext-algebra. In: Lect. Notes Math., Vol. 1352, 1988, pp. 291–338.
3. *Backelin J.* A distributiveness property of augmented algebras, and some related homological results. Ph.D. Thesis, Stockholm (1982).
4. *Посицельский Л. Е.* Соотношение между рядами Гильберта квадратично двойственных алгебр не влечет их козюлевости. Функц. анализ и его прил., **29**, вып. 3, 83–87 (1995).
5. *Roos J.-E.* On the characterization of Koszul algebras. Four counter-examples, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **321**, No. 1, 15–20 (1995).
6. *Anick D.* Generic algebras and CW-complexes. In: Algebraic topology and algebraic K-theory. Proc. Conf. Oct. 24–28, 1983, at Princeton Univ., dedicated to John C. Moore on his 60th birthday. Princeton, Princeton Univ. Press, 1987, pp. 247–321.
7. *Manin Yu. I.* Some remarks on Koszul algebras and quantum groups. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **37**, No. 4, 191–205 (1987).
8. *Anick D.* Diophantine equations, Hilbert series, and undecidable spaces. Ann. Math., **122**, 87–112 (1985).
9. *Говоров В. Е.* О размерности градуированных алгебр. Матем. заметки, **14**, №2, 209–216 (1973).
10. *Polishchuk A., Positselski L.* Quadratic algebras. Preprint, 1996.