Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Андрианов, Вокруг подъема Икеды, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 2, 70–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa247>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 11:15:09

Вокруг подъема Икеды*

© 2001. А. Н. Андрианов

В заметке обсуждается гипотетический подъем зигелевых модулярных форм рода $2n$ и веса k в зигелевы модулярные формы рода $2nl$ и веса $k + n(l - 1)$, аналогичный подъему Икеды эллиптических касп-форм веса $2k$ в зигелевы касп-формы рода $2n$ и веса $k + n$, где $k \equiv n \pmod{2}$. Доказано, что этот подъем отображает ряды Эйзенштейна в ряды Эйзенштейна при условии, что они абсолютно сходятся, и отображает подъемы Икеды эллиптических касп-форм в род $2n$ в подъемы Икеды этих форм в род $2nl$.

1. Четные дзета-функции. Пусть $F \in \mathfrak{M}_k^n = \mathfrak{M}_k(\Gamma^n)$ — ненулевая голоморфная зигелева модулярная форма целого веса k относительно полной зигелевой модулярной группы $\Gamma^n = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ рода n . Предположим, что F является собственной функцией всех операторов Гекке на пространстве $\mathfrak{M}_k^n$ (такие формы мы будем называть просто собственными формами). Тогда, согласно «философии Ленглендса», изложенной более тридцати лет назад в [4], форме F можно сопоставить последовательность эйлеровых произведений с предположительно хорошими аналитическими свойствами. Два из этих произведений особенно интересны. Я имею ввиду стандартную дзета-функцию (стандартное эйлерово произведение)

$$Z_F(s) = \zeta(s) \prod_p R_{p,F}(p^{-s})^{-1}$$

и дзета-функцию (спинорное эйлерово произведение)

$$L_F(s) = \prod_p Q_{p,F}(p^{-s})^{-1}, \quad (1)$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана, p в обоих случаях пробегает все простые числа и для каждого простого p через $R_{p,F}(t)$ и $Q_{p,F}(t)$ обозначаются многочлены степени $2n$ и 2^n соответственно, называемые многочленом Ранкина и спинорным многочленом, которые можно выразить через локальные p -параметры Сатаке

$$\alpha_0 = \alpha_{0,p}(F), \quad \alpha_1 = \alpha_{1,p}(F), \quad \dots, \quad \alpha_n = \alpha_{n,p}(F),$$

отвечающие собственной функции F , формулами

$$R_{p,F}(t) = \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i^{-1}t)(1 - \alpha_i t)$$

и

$$Q_{p,F}(t) = (1 - \alpha_0 t) \prod_{r=1}^n \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (1 - \alpha_0 \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_r} t).$$

Отметим, что при стандартном нормировании операторов Гекке на пространстве $\mathfrak{M}_k^n$ локальные p -параметры удовлетворяют соотношению

$$\alpha_0^2 \alpha_1 \dots \alpha_n = p^{nk - n(n+1)/2}$$

*Работа была выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 99-01-00099.

и форма F удовлетворяет гипотезе Петерссона для простого числа p , если

$$|\alpha_1| = \cdots = |\alpha_n| = 1.$$

Стандартную дзета-функцию можно записать в виде

$$Z_F(s) = \zeta(s) Z_F^+(s),$$

где произведение

$$Z_F^+(s) = \prod_p R_{p,F}(p^{-s})^{-1}$$

называется четной дзета-функцией, отвечающей собственной функции F (или ее дзета-функцией Ранкина). Четная дзета-функция удобнее стандартной дзета-функции в конкретных вычислениях, но, чтобы получить функцию с хорошими аналитическими свойствами, ее необходимо умножить на дзета-функцию Римана. Здесь мы отметим только, что если пространство $\mathfrak{M}_k^n$ содержит ненулевой ряд Эйзенштейна $F = E_k^n(s)$ (например в случае, когда число nk четно и $k > n + 1$), то он является собственной функцией всех операторов Гекке и соответствующая четная дзета-функция имеет вид

$$Z_F^+(s) = \prod_{i=1}^n \zeta(s - i + k) \zeta(s + i - k). \quad (2)$$

По поводу деталей об операторах Гекке и дзета-функциях зигелевых модулярных форм см., например, [1, ch. 4].

2. Подъем Икеды. Т. Икеда доказал в [3], что для каждой ненулевой собственной формы f из пространства эллиптических касп-форм четного веса $2k$ и для каждого целого положительного числа n , удовлетворяющего условию $n \equiv k \pmod{2}$, существует ненулевая собственная касп-форма $F = I^{2n}(f)$ рода $2n$ и веса $k + n$ с соответствующей четной дзета-функцией, задаваемой формулой

$$Z_F^+(s) = \prod_{i=1}^{2n} L_f(s + k + n - i), \quad (3)$$

где $L_f(s)$ обозначает дзета-функцию (1) формы f .

Здесь мы добавим только, что подъем Икеды переводит также ряды Эйзенштейна $f = E_{2k} = E_{2k}^1$, где $k \geq 2$, в ряды Эйзенштейна E_{k+n}^{2n} , по крайней мере если $k > n + 1$. Действительно, в этом случае

$$L_f(s) = \zeta(s) \zeta(s - 2k + 1),$$

откуда

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{2n} L_f(s + k + n - i) &= \prod_{i=1}^{2n} \zeta(s + k + n - i) \zeta(s - k + n + 1 - i) \\ &= \prod_{i=1}^{2n} \zeta(s + k + n - i) \zeta(s - k - n + i), \end{aligned}$$

где мы заменили индекс i во вторых множителях на $2n + 1 - i$. Согласно формуле (2), последнее выражение равно четной дзета-функции ряда E_{k+n}^{2n} , если он

сходится. Отметим, что соотношение $I^{2n}(E_{2k}) = E_{k+n}^{2n}$ мы доказали без ограничения $k \equiv n \pmod{2}$, что вызывает сомнение в необходимости этого ограничения и для случая касп-форм, по крайней мере если k достаточно велико. Во всяком случае при определенных ограничениях на k и n получается общий подъем Икеды

$$I^{2n} : \mathfrak{M}_{2k} = \mathfrak{M}_{2k}^1 \mapsto \mathfrak{M}_{k+n}^{2n},$$

определенный на собственных формах.

3. Подъем T^l . По аналогии с подъемом Икеды мы предлагаем к рассмотрению гипотетический подъем

$$T^l : \mathfrak{M}_k^{2n} \mapsto \mathfrak{M}_{k+n(l-1)}^{2nl} \quad (l \geq 1),$$

который снова определен на собственных формах: пусть F — ненулевая собственная форма из пространства $\mathfrak{M}_k^{2n}$ всех зигелевых модулярных форм целого веса k и четного рода $2n$, и пусть $Z_F^+(s)$ — соответствующая четная дзета-функция; тогда для положительных целых чисел l предположительно существуют ненулевые собственные формы

$$G = T^l(F) \in \mathfrak{M}_{k+n(l-1)}^{2nl}$$

с четной дзета-функцией, задаваемой формулой

$$Z_G^+(s) = \prod_{j=1}^l Z_F^+(s + n(l - 2j + 1)).$$

Возможно, что в процессе рассмотрений могут появиться некоторые ограничения на параметры, однако сейчас это трудно предсказать. В качестве поддержки указанного предположения мы докажем следующие два простых предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существует T^l -подъем ряда Эйзенштейна E_k^{2n} , по крайней мере если k и l удовлетворяют неравенству $k > n(l + 1) + 1$, и можно взять*

$$T^l(E_k^{2n}) = E_{k+n(l-1)}^{2nl}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (2), мы можем написать

$$Z_F^+(s) = \prod_{i=1}^{2n} \zeta(s - i + k) \zeta(s + i - k) \quad (F = E_k^{2n}),$$

откуда

$$\prod_{j=1}^l Z_F^+(s + n(l - 2j + 1)) = \prod_{j=1}^l \prod_{i=1}^{2n} \zeta(s - i + k + n(l - 2j + 1)) \zeta(s + i - k + n(l - 2j + 1)).$$

Можно записать

$$s - i + k + n(l - 2j + 1) = s - (i + 2n(j - 1)) + k + n(l - 1) = s - J + k + n(l - 1),$$

где $J = i + 2n(j - 1)$ пробегает множество $1, \dots, 2nl$, когда i пробегает множество $1, \dots, 2n$, а j пробегает множество $1, \dots, l$. Аналогично, заменяя индекс j на $l + 1 - j$, мы получаем

$$s + i - k + n(l - 2j + 1) \implies s + i - k + n(-l + 2j - 1) = s + J - k - n(l - 1),$$

где снова $J = i + 2n(j - 1)$. Это показывает, что последнее двойное произведение равно произведению

$$\prod_{J=1}^{2nl} \zeta(s - J + k + n(l - 1)) \zeta(s + J - k - n(l - 1)),$$

которое опять по формуле (2) является четной дзета-функцией ряда Эйзенштейна $E_{k+n(l-1)}^{2nl}$. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $F = I^{2n}(f)$ обозначает подъем Икеды некоторой собственной касп-формы веса $2k$. Тогда T^l -подъем формы F существует и можно взять

$$T^l(F) = T^l(I^{2n}(f)) = I^{2nl}(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле (3) получаем

$$Z_F^+(s) = \prod_{i=1}^{2n} L_f(s + k + n - i),$$

откуда, аналогично тому, как это делалось в доказательстве предложения 1, можно заключить, что

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^l Z_F^+(s + n(l - 2j + 1)) &= \prod_{j=1}^l \prod_{i=1}^{2n} L_f(s + k + n - i + n(l - 2j + 1)) \\ &= \prod_{j=1}^l \prod_{i=1}^{2n} L_f(s + k + nl - (i + 2n(j - 1))) \\ &= \prod_{J=1}^{2nl} L_f(s + k + nl - J), \end{aligned}$$

а это равняется четной дзета-функции подъема Икеды формы f в род $2nl$ (и вес $k + nl$). $\square$

Замечания. Отметим, что для определения четной дзета-функции некоторой модулярной формы достаточно предполагать только, что она является собственной функцией операторов Гекке из четного подкольца соответствующего кольца Гекке–Шимуры. Четные подкольца действуют также на пространствах зигелевых модулярных форм полуцелых весов (см., например, [2]). Поэтому имеет смысл рассматривать возможные расширения подъемов на модулярные формы полуцелых весов относительно, скажем, групп $\Gamma_0^n(4)$.

Благодарности. Я хотел бы поблагодарить профессора Эберхарда Фрайтага за любезное приглашение принять участие в работе исследовательской группы «Арифметика» университетов Гейдельберга и Манхайма, за привлечение моего внимания к работе Икеды и полезное обсуждение связанных с этой темой вопросов. Я признателен профессору Борису Венкову, чьи несколько наивные вопросы об операторах Гекке помогли прояснить некоторые аспекты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Andrianov A. N.* Quadratic forms and Hecke operators. Grundlehren Math. Wiss., Vol. 286, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1987. 2. *Андрианов А. Н., Журавлев В. Г.*

Модулярные формы и операторы Гекке. Наука, М., 1990; English transl.: Transl. Math. Monographs, Vol. 145, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1995. **3.** Ikeda T. On lifting of elliptic modular forms to Siegel cusp forms of degree $2n$, Preprint, Kyoto University, 1999. **4.** Langlands R. P. Euler products, Yale Mathematical Monographs, Vol. 1, Yale University Press, New Haven–London, 1971.

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН

Поступило в редакцию
28 сентября 2000 г.

УДК 517.43

Структура модельных вольтерровых операторов, биортогональные разложения и интерполяция в регулярных пространствах де Бранжа*

© 2001. Г. М. ГУБРЕЕВ

Заметка посвящена одному из возможных приложений результатов работы [1], полные доказательства которых приведены в [2]. Вместе с тем она написана так, что для ее понимания знакомство с работами [1, 2] не обязательно.

1. Регулярные пространства де Бранжа. Пусть целая функция E удовлетворяет условию $|E(\bar{z})| < |E(z)|$, $\text{Im } z > 0$. Пространством де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ (см. [3]) называется совокупность таких целых функций f , что: 1) $f(z)/E(z)$, $f^*(z)/E(z)$ суть функции ограниченного вида и неположительного среднего типа в области $\text{Im } z > 0$; 2) $\|f\|_{\mathcal{H}(E)}^2 := \int_R |f(x)|^2 |E(x)|^{-2} dx < \infty$.

Здесь (и далее) $f^*(z) := \overline{f(\bar{z})}$, а средний тип $h(F)$ аналитической в области $\text{Im } z > 0$ функции F определяется равенством

$$h(F) := \limsup_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \log |F(iy)|.$$

Пространство $\mathcal{H}(E)$ является гильбертовым относительно скалярного произведения $\langle f, g \rangle$, согласованного с нормой $\|f\|_{\mathcal{H}(E)}^2$. Записав E в виде $E(z) = a(z) - ib(z)$, где a , b — вещественные целые функции, рассмотрим ядро

$$k(\lambda, z) = (b(\lambda)\overline{a(z)} - a(\lambda)\overline{b(z)})/\pi(\lambda - \bar{z}), \quad (1)$$

которое является воспроизводящим для $\mathcal{H}(E)$ [3], т. е.

$$\langle f(\lambda), k(\lambda, z) \rangle = f(z), \quad f \in \mathcal{H}(E), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Целая функция S называется сопутствующей пространству $\mathcal{H}(E)$, если 1) $S(z)/E(z)$, $S^*(z)/E(z)$ — функции ограниченного вида и неположительного среднего типа в $\text{Im } z > 0$; 2) $\int_{\mathbb{R}} |S(x)/E(x)|^2 (1+x^2)^{-1} dx < \infty$.

Каждая сопутствующая функция S ($S(0) \neq 0$) порождает в $\mathcal{H}(E)$ оператор B_S , сопряженный к которому задается формулой

$$(B_S^* f)(\lambda) = (f(\lambda)S(0) - S(\lambda)f(0))/\lambda S(0), \quad f \in \mathcal{H}(E). \quad (2)$$

*Работа выполнена при поддержке Украинско-Израильского проекта научного сотрудничества (контракт № 2М/1516-97).