Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Губреев, Структура модельных вольтерровых операторов, биортогональные разложения и интерполяция в регулярных пространствах де Бранжа, *Функц. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 2, 74–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa248>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 15:21:45

Модулярные формы и операторы Гекке. Наука, М., 1990; English transl.: Transl. Math. Monographs, Vol. 145, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1995. **3.** Ikeda T. On lifting of elliptic modular forms to Siegel cusp forms of degree $2n$, Preprint, Kyoto University, 1999. **4.** Langlands R. P. Euler products, Yale Mathematical Monographs, Vol. 1, Yale University Press, New Haven–London, 1971.

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова РАН

Поступило в редакцию
28 сентября 2000 г.

УДК 517.43

Структура модельных вольтерровых операторов, биортогональные разложения и интерполяция в регулярных пространствах де Бранжа*

© 2001. Г. М. ГУБРЕЕВ

Заметка посвящена одному из возможных приложений результатов работы [1], полные доказательства которых приведены в [2]. Вместе с тем она написана так, что для ее понимания знакомство с работами [1, 2] не обязательно.

1. Регулярные пространства де Бранжа. Пусть целая функция E удовлетворяет условию $|E(\bar{z})| < |E(z)|$, $\text{Im } z > 0$. Пространством де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ (см. [3]) называется совокупность таких целых функций f , что: 1) $f(z)/E(z)$, $f^*(z)/E(z)$ суть функции ограниченного вида и неположительного среднего типа в области $\text{Im } z > 0$; 2) $\|f\|_{\mathcal{H}(E)}^2 := \int_R |f(x)|^2 |E(x)|^{-2} dx < \infty$.

Здесь (и далее) $f^*(z) := \overline{f(\bar{z})}$, а средний тип $h(F)$ аналитической в области $\text{Im } z > 0$ функции F определяется равенством

$$h(F) := \limsup_{y \rightarrow +\infty} y^{-1} \log |F(iy)|.$$

Пространство $\mathcal{H}(E)$ является гильбертовым относительно скалярного произведения $\langle f, g \rangle$, согласованного с нормой $\|f\|_{\mathcal{H}(E)}^2$. Записав E в виде $E(z) = a(z) - ib(z)$, где a , b — вещественные целые функции, рассмотрим ядро

$$k(\lambda, z) = (b(\lambda)\overline{a(z)} - a(\lambda)\overline{b(z)})/\pi(\lambda - \bar{z}), \quad (1)$$

которое является воспроизводящим для $\mathcal{H}(E)$ [3], т. е.

$$\langle f(\lambda), k(\lambda, z) \rangle = f(z), \quad f \in \mathcal{H}(E), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Целая функция S называется сопутствующей пространству $\mathcal{H}(E)$, если 1) $S(z)/E(z)$, $S^*(z)/E(z)$ — функции ограниченного вида и неположительного среднего типа в $\text{Im } z > 0$; 2) $\int_{\mathbb{R}} |S(x)/E(x)|^2 (1+x^2)^{-1} dx < \infty$.

Каждая сопутствующая функция S ($S(0) \neq 0$) порождает в $\mathcal{H}(E)$ оператор B_S , сопряженный к которому задается формулой

$$(B_S^* f)(\lambda) = (f(\lambda)S(0) - S(\lambda)f(0))/\lambda S(0), \quad f \in \mathcal{H}(E). \quad (2)$$

*Работа выполнена при поддержке Украинско-Израильского проекта научного сотрудничества (контракт № 2М/1516-97).

При определенных условиях операторы B_S являются модельными в классе всех вполне несамосопряженных операторов с двумерными мнимыми компонентами, характеристические матрицы-функции которых являются совершенными матрицами де Бранжа [4].

Если при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $S_\alpha(\lambda) := e^{i\alpha\lambda}$ сопутствует пространству $\mathcal{H}(E)$, то E есть функция ограниченного вида в области $\text{Im } z > 0$. Отсюда вытекает, что E и все элементы из $\mathcal{H}(E)$ суть целые функции экспоненциального типа и, стало быть, пространству $\mathcal{H}(E)$ будут сопутствовать все функции S_α , $-\omega \leq \alpha \leq \omega$, где $\omega := h(E)$. Обозначим через B_α оператор, сопряженный к которому задается формулой (2) с $S = S_\alpha$. Таким образом, мы получим семейство B_α ($-\omega \leq \alpha \leq \omega$) вольтерровых модельных операторов в пространстве де Бранжа $\mathcal{H}(E)$.

В этой статье важную роль играют пространства $\mathcal{H}(E)$, выделяемые следующим определением. Пространство де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ назовем *регулярным*, если вес $|E(x)|^2$ удовлетворяет следующему условию на $\mathbb{R}$ [5]:

$$\sup_I \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I |E(x)|^2 dx \frac{1}{|I|} \int_I |E(x)|^{-2} dx \right\} < \infty, \quad (\text{A}_2)$$

где I — произвольный интервал, а $|I|$ — его длина. Нетривиальные примеры функций E , порождающих регулярные пространства $\mathcal{H}(E)$, можно найти в [7], где они рассматривались по другому поводу. Условие регулярности пространства налагает ограничение на поведение функции E вблизи $\mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$ функция S_α сопутствует регулярному пространству $\mathcal{H}(E)$. Тогда существует полоса $0 \leq \text{Im } z \leq \varepsilon$, свободная от корней функции E^* , и при каждом $\beta \in (0, \varepsilon]$

$$0 < \inf_{z \in \mathbb{R} + i\beta} |E^*(z)/E(z)| \leq \sup_{z \in \mathbb{R} + i\beta} |E^*(z)/E(z)| < 1. \quad (3)$$

Судить о том, является ли пространство $\mathcal{H}(E)$ регулярным, можно по спектральной структуре модельных операторов B_S . В этой работе нас будут интересовать только вольтерровы операторы B_α . Обозначим через I_γ оператор интегрирования в $L_2(0, \gamma)$:

$$(I_\gamma h)(x) = i \int_0^x h(t) dt, \quad h \in L_2(0, \gamma).$$

Заметим, что операторы I_γ диссипативны, т. е. $(I_\gamma - I_\gamma^*)/(2i) \geq 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть некоторая функция S_α сопутствует пространству де Бранжа $\mathcal{H}(E)$. Если $\mathcal{H}(E)$ регулярно, то каждый оператор B_α , $-\omega \leq \alpha \leq \omega$, $\omega = h(E)$, подобен ортогональной сумме $I_{\omega+\alpha} \oplus (-I_{\omega-\alpha})$ операторов интегрирования. Обратно, пусть существует полоса $0 \leq \text{Im } z \leq \varepsilon$, свободная от корней функции E^* , и при некотором $\beta_0 \in (0, \varepsilon]$ имеет место (3). Если некоторый оператор B_α подобен ортогональной сумме $B_1 \oplus (-B_2)$, где B_i — диссипативные операторы в сепарабельных гильбертовых пространствах H_i ($i = 1, 2$), то пространство $\mathcal{H}(E)$ регулярно.

Первая часть теоремы для регулярного пространства $\mathcal{H}(E)$ с $|E(x)|^2 \asymp 1$, $x \in \mathbb{R}$, при дополнительном условии $\alpha \geq 0$ впервые доказана в [4]. Далее, из теоремы 2 вытекает, что в регулярных пространствах существуют операторы B_α^{-1}

(неограниченные) и только при $\alpha = \omega$ полугруппа $\exp\{-iB_\omega^{-1}t\}$, $t \geq 0$, принадлежит классу C_0 . Имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть некоторая функция S_α сопутствует пространству $\mathcal{H}(E)$, $\omega = h(E)$. Пространство $\mathcal{H}(E)$ регулярно тогда и только тогда, когда 1) существует полоса $0 \leq \operatorname{Im} z \leq \varepsilon$, в которой E^* не обращаются в нуль, и при некотором $\beta_0 \in (0, \varepsilon]$ выполняется (3); 2) существует оператор B_ω^{-1} и полугруппа $\exp\{-iB_\omega^{-1}t\}$, $t \geq 0$, принадлежит классу C_0 .

Аналогичное утверждение справедливо и для другого крайнего случая $\alpha = -\omega$.

2. Биортогональные разложения и интерполяция. Теперь к исследованию регулярных пространств де Бранжа можно применить результаты работ [1, 2]. Во всех следующих ниже теоремах предполагается, что некоторая функция S_α сопутствует пространству $\mathcal{H}(E)$, т. е. оператор B_ω , $\omega = h(E)$, действует в $\mathcal{H}(E)$. Рассмотрим вектор-функцию

$$G(z) := (I - zB_\omega)^{-1}g, \quad g \in \mathcal{H}(E), \quad (4)$$

и зададимся вопросом: при каких g из значений функции $G(z)$ можно составить безусловный базис пространства $\mathcal{H}(E)$?

Обозначим через V множество аналитических в области $\operatorname{Im} z \leq 0$ функций v , допускающих внешне-внутреннюю факторизацию вида

$$v(z) = s(z)w(z), \quad \inf_{\operatorname{Im} z < 0} \{|s(z)| + |e^{-2i\omega z}|\} > 0,$$

где s — внутренняя функция, а внешняя функция w такова, что вес $|w(x - i0)|^2$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$. Имеет место

ТЕОРЕМА 4. Для регулярных пространств де Бранжа следующие условия равносильны:

1) существует такая последовательность $\Lambda := \{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\inf_k \operatorname{Im} \lambda_k > -\infty$, что семейство $\{G(\lambda_k)\}_{-\infty}^{+\infty}$ образует безусловный базис в $\mathcal{H}(E)$;

2) существуют такие константы m , M ($0 < m < M < \infty$), что для всех $h \in \mathcal{H}(E)$

$$m\|h\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |\langle G(x), h \rangle|^2 \|G(x)\|^{-2} dx \leq M\|h\|^2;$$

3) функция g допускает представление

$$g(\lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} k(\lambda, x) E^{-1}(x) B(x - i0) e^{-i\delta x} P_+ \{e^{2i\omega x} v(x - i\varepsilon)(x - i\varepsilon)^{-1}\} dx, \quad (5)$$

где ядро k определяется равенством (1), B — произведение Бляшке в $\operatorname{Im} z < 0$, составленное по корням функции E , $\delta := \omega - \omega^*$, $\omega^* = h(E^*)$, и P_+ — ортопроектор из $L_2(\mathbb{R})$ на класс Харди H_+^2 , $v \in V$.

Отметим, что в формуле (5) предел и интеграл существуют в метрике пространства $\mathcal{H}(E)$. Теперь описание интересующих нас базисов дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $v = sw$ — внешне-внутренняя факторизация функции $v \in V$ и G — отвечающая v в силу формул (4), (5) вектор-функция. Семейство $\{G(\lambda_k) : \lambda_k \in \Lambda\}$, такое, что $\eta_0 := \inf_k \operatorname{Im} \lambda_k > -\infty$, образует безусловный базис регулярного пространства $\mathcal{H}(E)$ тогда и только тогда, когда Λ совпадает с множеством (простых) корней целой функции φ экспоненциального

типа, удовлетворяющей следующим условиям: 1) $h(\varphi) = h(\varphi^*) = \omega$; 2) вес $|w(z)|^{-2}|\varphi(z)|^2$ удовлетворяет условию (A_2) на какой-нибудь прямой $\mathbb{R} + i\eta$, $\eta < \min\{0, \eta_0\}$; 3) последовательность $\{\lambda_k - i\eta : \lambda_k \in \Lambda\}$ отделима в смысле Карлесона, т. е.

$$\inf_n \prod_{k \neq n} \frac{|\mu_n - \mu_k|}{|\mu_n - \bar{\mu}_k|} > 0, \quad \mu_k := \lambda_k - i\eta.$$

Если $|E(x)|^2$ удовлетворяет условию (A_2) , то внешняя функция $v(z) := E(z)B^{-1}(z)e^{-i\omega^*z}$ принадлежит классу V . Если считать, что $E(0) \in \mathbb{R}$ и, стало быть, $b(0) = 0$, то такой функции v по формуле (5) отвечает $g(\lambda) = b(\lambda)/(\pi\lambda)$ и формула (4) приобретает вид

$$(I - zB_\omega)^{-1}(b(\lambda)/(\pi\lambda)) = e^{i\omega z}k(\lambda, \bar{z}).$$

Поэтому из теоремы 4 вытекает, что в регулярных пространствах $\mathcal{H}(E)$ существуют базисы из значений воспроизводящего ядра, описание которых дается теоремой 5. Сформулируем соответствующий результат в виде отдельной теоремы, ограничившись для простоты, случаем, когда последовательность Λ расположена в верхней полуплоскости.

ТЕОРЕМА 6. Семейство $\{k(\lambda, \bar{\lambda}_n) : \lambda_n \in \Lambda\}$, $\inf_k \operatorname{Im} \lambda_k > 0$, образует безусловный базис регулярного пространства де Бранжа $\mathcal{H}(E)$ тогда и только тогда, когда Λ совпадает с множеством (простых) корней некоторой сопутствующей этому пространству функции S , которая удовлетворяет следующим условиям: 1) $h(S) = h(S^*) = \omega$; 2) вес $|E(x)|^{-2}|S(x)|^2$ удовлетворяет условию (A_2) на $\mathbb{R}$; 3) Λ отделима в смысле Карлесона.

Если в этой системе положить $E(z) = e^{-i\omega z}$, $\omega > 0$, и с помощью преобразования Фурье перейти к пространству $L_2(-\omega, \omega)$, то получим теорему Б. С. Павлова [6] об описании базисов из экспонент.

Системы, биортогональные к базисам из теоремы 6, состоят из функций

$$\frac{S^*(\lambda)}{(\lambda - \bar{\lambda}_n)\overline{S'(\lambda_n)}} \quad (\lambda_n \in \Lambda).$$

Отсюда выводится, что каждая функция $f \in \mathcal{H}(E)$ допускает биортогональное разложение

$$f(\lambda) = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \frac{c_k S(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k) S'(\lambda_k)}, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|^2}{|E(x)|^2} dx \asymp \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \frac{|c_k|^2 \operatorname{Im} \lambda_k e^{-2\omega \operatorname{Im} \lambda_k}}{|E(\lambda_k)|^2}, \quad (6)$$

причем $c_k = f(\lambda_k)$, $\lambda_k \in \Lambda$. Эти формулы подсказывают решение задачи интерполяции функциями из регулярных пространств де Бранжа.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел. Задачу об интерполяции в пространствах $\mathcal{H}(E)$ сформулируем так: какими должны быть Λ и весовая последовательность $\{b_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, чтобы интерполяционный оператор

$$\mathcal{I}_\Lambda f := \{f(\lambda_k)\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad f \in \mathcal{H}(E),$$

взаимно однозначно (и, значит, взаимно непрерывно) отображал $\mathcal{H}(E)$ на пространство $l_2\{b_k\}$ последовательностей $c := \{c_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ с нормой

$$\|c\|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 b_k < \infty.$$

Последовательности Λ , описание которых дается теоремой 6, назовем *интерполяционными*. Имеет место

ТЕОРЕМА 7. *Если некоторая последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\inf_k \operatorname{Im} \lambda_k > 0$, порождает взаимно однозначное отображение $\mathcal{J}_\Lambda$ регулярного пространства $\mathcal{H}(E)$ на пространство $l_2\{b_k\}$, то верны двусторонние оценки*

$$b_k \asymp \operatorname{Im} \lambda_k e^{-2\omega \operatorname{Im} \lambda_k} |E(\lambda_k)|^{-2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Далее, оператор $\mathcal{J}_\Lambda$ является изоморфизмом регулярного пространства $\mathcal{H}(E)$ на $l_2\{b_k\}$ с весом, удовлетворяющим условию (7), тогда и только тогда, когда последовательность Λ интерполяционная. Единственное решение интерполяционной задачи $f(\lambda_k) = c_k$ ($\lambda_k \in \Lambda$) дается рядом (6), который сходится как по норме пространства $\mathcal{H}(E)$, так и равномерно на компактах плоскости.

Выражаю глубокую признательность Д. З. Арову за многочисленные обсуждения результатов статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Губреев Г. М. Функц. анализ и его прил., **33**, вып. 1, 62–65 (1999).
2. Губреев Г. М. Матем. сб., **190**, №12 (1999).
3. De-Branges L. Hilbert spaces of entire functions. Prentice Hall, 1968.
4. Сахнович Л. А. Алгебра и анализ, **5**, вып. 1, 3–80 (1993).
5. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. Мир, М., 1984.
6. Павлов Б. С. ДАН СССР, **247**, №1, 37–40 (1979).
7. Джрбабян М. М. Изв. АН АрмССР, Математика, **19**, №2 (1984).

Южноукраинский педагогический
госуниверситет, г. Одесса

Поступило в редакцию
9 декабря 1999 г.

УДК 517.938

Проблема Гильберта–Арнольда и оценка цикличности полициклов на плоскости и в пространстве

© 2001. В. Ю. Калошин

1. Полициклы на плоскости. Мотивировкой для следующего определения является проблема Гильберта–Арнольда о равномерной ограниченности числа предельных циклов для типичных семейств гладких векторных полей на сфере S^2 (см., например, [1, 6]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Полицикл γ векторного поля $\dot{x} = v(x, \varepsilon^*)$, $x \in S^2$, $\varepsilon^* \in B$, — это циклически упорядоченный набор положений равновесия $p_1, \dots, p_k$ (возможно, с повторениями) и набор фазовых кривых $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ (без повторений), их