Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Калошин, Проблема Гильберта–Арнольда и оценка цикличности полициклов на плоскости и в пространстве, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 2, 78–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa249>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 17:27:20

взаимно однозначно (и, значит, взаимно непрерывно) отображал $\mathcal{H}(E)$ на пространство $l_2\{b_k\}$ последовательностей $c := \{c_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ с нормой

$$\|c\|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 b_k < \infty.$$

Последовательности Λ , описание которых дается теоремой 6, назовем *интерполяционными*. Имеет место

ТЕОРЕМА 7. *Если некоторая последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\inf_k \operatorname{Im} \lambda_k > 0$, порождает взаимно однозначное отображение $\mathcal{J}_\Lambda$ регулярного пространства $\mathcal{H}(E)$ на пространство $l_2\{b_k\}$, то верны двусторонние оценки*

$$b_k \asymp \operatorname{Im} \lambda_k e^{-2\omega \operatorname{Im} \lambda_k} |E(\lambda_k)|^{-2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Далее, оператор $\mathcal{J}_\Lambda$ является изоморфизмом регулярного пространства $\mathcal{H}(E)$ на $l_2\{b_k\}$ с весом, удовлетворяющим условию (7), тогда и только тогда, когда последовательность Λ интерполяционная. Единственное решение интерполяционной задачи $f(\lambda_k) = c_k$ ($\lambda_k \in \Lambda$) дается рядом (6), который сходится как по норме пространства $\mathcal{H}(E)$, так и равномерно на компактах плоскости.

Выражаю глубокую признательность Д. З. Арову за многочисленные обсуждения результатов статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Губреев Г. М. Функц. анализ и его прил., **33**, вып. 1, 62–65 (1999).
2. Губреев Г. М. Матем. сб., **190**, №12 (1999).
3. De-Branges L. Hilbert spaces of entire functions. Prentice Hall, 1968.
4. Сахнович Л. А. Алгебра и анализ, **5**, вып. 1. 3–80 (1993).
5. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. Мир, М., 1984.
6. Павлов Б. С. ДАН СССР, **247**, №1, 37–40 (1979).
7. Джрбабян М. М. Изв. АН АрмССР, Математика, **19**, №2 (1984).

Южноукраинский педагогический
госуниверситет, г. Одесса

Поступило в редакцию
9 декабря 1999 г.

УДК 517.938

Проблема Гильберта–Арнольда и оценка цикличности полициклов на плоскости и в пространстве

© 2001. В. Ю. Калошин

1. Полициклы на плоскости. Мотивировкой для следующего определения является проблема Гильберта–Арнольда о равномерной ограниченности числа предельных циклов для типичных семейств гладких векторных полей на сфере S^2 (см., например, [1, 6]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Полицикл γ векторного поля $\dot{x} = v(x, \varepsilon^*)$, $x \in S^2$, $\varepsilon^* \in B$, — это циклически упорядоченный набор положений равновесия $p_1, \dots, p_k$ (возможно, с повторениями) и набор фазовых кривых $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ (без повторений), их

соединяющих, т. е. j -я кривая γ_j соединяет p_j с p_{j+1} , где B — область евклидова пространства.

Цикличность полицикла γ — это минимальное число $\mu(\gamma)$, для которого найдутся окрестность U полицикла $\gamma \subset U \subseteq S^2$ и окрестность V значения параметра $\varepsilon^* \in V \subseteq B$, обладающие следующим свойством: любое поле, соответствующее $\varepsilon \in V$, имеет не более $\mu(\gamma)$ сосуществующих циклов в U , и хаусдорфово расстояние между каждым из этих циклов и полициклом γ стремится к 0 при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^*$.

Положение равновесия называется *элементарным*, если линеаризация поля имеет не более одного нулевого собственного значения. Полицикл, имеющий только элементарные положения равновесия, называется *элементарным*.

Элементарное число цикличности $E(n)$ — это максимальная цикличность элементарного полицикла, встречающегося в типичном n -параметрическом семействе C^∞ -гладких векторных полей на сфере S^2 .

ТЕОРЕМА 1. Для любого положительного числа n элементарное число цикличности допускает оценку $E(n) \leq 2^{25n^2}$.

В [6] показано, что $E(n) < \infty$.

2. Бифуркации полициклов в пространстве. Определение 1 полицикла дословно переносится на многомерный случай. Рассуждения, аналогичные приведенным в [6, р. 3], показывают, что набор из бесконечного числа предельных циклов равномерно ограниченной длины, лежащих в компактном множестве, имеет предельный полицикл. Приведем классический пример полицикла в пространстве.

2.1. Полицикл Шильникова. Полицикл Шильникова — это полицикл, встречающийся в типичном 1-параметрическом семействе векторных полей в $\mathbb{R}^3$ и состоящий из седло-фокуса p с собственными значениями $\lambda > 0$, $\mu \pm i\omega$, $\mu < 0$, $\lambda + \mu > 0$, и гомоклинической траектории $\gamma = W^u(p) \cap W^s(p)$.

Рассмотрим сечение Пуанкаре T , трансверсально пересекающее фазовую кривую $\gamma \setminus \{p\}$. Для открытого подмножества $U \subset T$ определено отображение Пуанкаре $\Delta: U \rightarrow T$. В отличие от двумерного случая, Δ может иметь не только неподвижные точки, но и точки периода, большего, чем 1. Анализ топологии отображения Пуанкаре Δ показывает, что оно имеет счетное число сосуществующих подков Смейла [4, 9]. Можно показать, что для любого $k \in \mathbb{Z}$ число периодических точек отображения Δ периода k бесконечно. Одна из причин этого — комплексно-сопряженные собственные значения.

2.2. Оценка цикличности многомерного полицикла. Пусть $\gamma \subset \mathbb{R}^N$ — полицикл векторного поля $\dot{x} = v(x, \varepsilon^*)$, $x \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon^* \in B$. Тогда γ можно представить в виде объединения положений равновесия $\{p_j\}_{j \in J}$ и соединяющих их фазовых кривых $\{\gamma_j\}_{j \in J}$. Трубочатая окрестность T_γ полицикла γ — это объединение окрестностей $\{U_j\}_{j \in J}$, положений равновесия $\{p_j\}_{j \in J}$ и трубчатых окрестностей $\{T_j\}_{j \in J}$ фазовых кривых $\{\gamma_j\}_{j \in J}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. k -цикличность полицикла γ — это минимальное число $\mu(\gamma, k)$, для которого найдутся трубчатая окрестность $\gamma \subset T_\gamma \subset \mathbb{R}^N$, окрестность V значения параметра $\varepsilon^* \in V \subseteq B$ и сечения Пуанкаре (гиперповерхности) T_j , трансверсально пересекающие фазовые кривые γ_j в одной точке для каждого $j \in J$. Кроме того должно выполняться следующее условие: любое поле, соответствующее $\varepsilon \in V$, имеет не более $\mu(\gamma, k)$ сосуществующих циклов в T_γ , каждый

из которых пересекает каждое сечение T_j ровно в k различных точках. Каждый из таких циклов называется k -обходным циклом или k -циклом.

Положение равновесия называется *квазиэлементарным*, если матрица линеаризации имеет только вещественные собственные значения и они либо нерезонансны, либо сильно однорезонансны, либо существует одно нулевое с показателем Лоясевича 1, а остальные нерезонансны и попарно различны¹⁾. Полицикл, имеющий только квазиэлементарные положения равновесия, называется *квазиэлементарным*.

Квазиэлементарное число k -цикличности $QE(N, n, k)$ — это максимально возможная k -цикличность квазиэлементарного полицикла, встречающегося в типичном n -параметрическом семействе C^∞ -гладких векторных полей в $\mathbb{R}^N$.

ТЕОРЕМА 2. Для любых положительных N (размерности фазового пространства), n (числа параметров) и k («обходности») квазиэлементарное число цикличности допускает оценку $QE(N, n, k) \leq 2^{T^2}$, где $T = 6Nnk$.

2.3. Кратность ростков типичных отображений. Под n -типичными C^m -гладкими ростками понимаются ростки, которые встречаются у типичного глобального C^m -гладкого отображения $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$. Например, при $n = N = 2$ по теореме Уитни о типичных отображениях 2-мерных многообразий возможны 3 типа 2-типичных ростков: 1-1, складка и сборка [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ есть C^m -гладкий росток. Его *геометрической кратностью* называется максимальное число прообразов в окрестности нуля $G_0(f) = \sup_{r \rightarrow 0+} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \#\{|x| < r : x \in \phi^{-1}(y)\}$, где ϕ — какой-то представитель ростка f ; $G_0(f)$ не зависит от выбора представителя ϕ .

ТЕОРЕМА 3. Для n -типичного C^{n+1} -гладкого ростка $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ выполнена оценка $G_0(f) \leq 2^{n(n-1)/2} n^n$.

Можно также оценить геометрическую кратность композиции $P \circ j^m f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$, где $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ есть n -типичный C^{n+1} -гладкий росток, а $P: J^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N) \rightarrow (\mathbb{R}^N, 0)$ — полином известной степени d , имеющий регулярные точки. Для композиции $P \circ j^m f$ выполнена оценка $G_0(P \circ j^m f) \leq 2^{n(n-1)/2} (dn)^n$, не зависящая от размерности промежуточного пространства $J^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$. Эта оценка применяется при доказательстве теорем 1 и 2.

Доказательство сформулированных выше теорем использует теорию нормальных форм [5, 6], метод Хованского [6, 8] и некоторые новые факты из теории стратифицированных множеств, сформулированные в [7]. При доказательстве теоремы 2 используется также специальная мультиструйная теорема трансверсальности [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Аносов Д. В. и др. Динамические системы — I, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, ВИНТИ, М., 1985.
2. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1, Наука, 1982.
3. Grigoriev A., Yakovenko S. J. Diff. Equations, **150**, No. 2, 349–362 (1998).
4. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields. Appl. Math. Sci., Vol. 42. Springer-Verlag, New York–Berlin, 1983.
5. Ильяшенко Ю. С., Яковенко С. Ю. УМН, **46**, вып. 1 (277), 3–39

¹⁾Определения нерезонансных и сильно однорезонансных собственных значений см., например, в [5, 6].

(1991). **6.** *Ilyashenko Yu., Yakovenko S.* Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 165, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 1–20, 21–95. **7.** *Ilyashenko Yu., Kaloshin V.* In: Proceedings of the Arnoldfest. Fields Inst. Comm., Vol. 24, Amer. Math. Soc, 1999, pp. 241–271. **8.** *Хованский А. Г.* Малочлены. Библиотека математика, вып. 2, Фазис, М., 1997. **9.** *Шильников Л. П.* ДАН СССР, **160**, 558–561 (1965).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
e-mail: kaloshin@math.princeton.edu

Поступило в редакцию
28 декабря 1998 г.

УДК 517.98

Об асимптотических гомоморфизмах в алгебры Калкина*

© 2001. В. М. Мануйлов

Задача классификации расширений C^* -алгебр послужила стимулом проникновения топологических методов в теорию C^* -алгебр [3]. Как показано в [7], расширения ядерных C^* -алгебр описываются в терминах KK -функтора Каспарова, однако в общем случае пока подобного описания нет. В настоящей заметке мы определяем группу так называемых фантомных расширений (возможно, пустую) и в случае, когда A является двукратной надстройкой, даем описание ее расширений в терминах E -теории Конна–Хигсона [5] и группы фантомных расширений.

Для C^* -алгебр A и B через $[[A, B]]$ мы обозначаем множество гомотопических классов асимптотических гомоморфизмов из A в B [5, 6]. Мы предполагаем, что A сепарабельна, а B имеет строго положительный элемент. Через $\text{Ext}(A, B)$ мы обозначаем множество гомотопических классов гомоморфизмов из A в алгебру Калкина $Q(B \otimes \mathcal{K}) = M(B \otimes \mathcal{K})/B \otimes \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ есть C^* -алгебра компактных операторов, а M обозначает алгебру мультипликаторов [13]. С помощью инварианта Басби [4] это множество отождествляется с множеством расширений алгебры A посредством алгебры $B \otimes \mathcal{K}$. Аналогично, через $\text{Ext}^{as}(A, B)$ мы обозначаем множество гомотопических классов асимптотических гомоморфизмов алгебры A в $Q(B \otimes \mathcal{K})$. (Асимптотические) гомоморфизмы $f_0, f_1: A \rightarrow Q(B \otimes \mathcal{K})$ называются гомотопными, если существует (асимптотический) гомоморфизм $F: A \rightarrow Q(B \otimes \mathcal{K} \otimes C[0, 1])$, композиции которого с гомоморфизмами вычисления в 0 и 1 совпадают с f_0 и f_1 соответственно. Все указанные множества обладают естественной структурой абелевой группы в случае, когда A является надстройкой, т. е. $A = SD = C_0(\mathbb{R}) \otimes D$ для некоторой C^* -алгебры D .

Так как любой настоящий гомоморфизм можно рассматривать как асимптотический, имеется естественное отображение

$$i: \text{Ext}(A, B) \rightarrow \text{Ext}^{as}(A, B). \quad (1)$$

Хотя типично асимптотических гомоморфизмов больше, чем настоящих, мы показываем, что отображение i эпиморфно, если A — надстройка. Заодно мы получим новое описание E -теории.

*Работа частично поддержана РФФИ (грант №99-01-01201).