Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Мануйлов, Об асимптотических гомоморфизмах в алгебры Калкина, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 2, 81–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa250>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 13:12:13

- (1991). **6.** *Ilyashenko Yu., Yakovenko S.* Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 165, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 1–20, 21–95. **7.** *Ilyashenko Yu., Kaloshin V.* In: Proceedings of the Arnoldfest. Fields Inst. Comm., Vol. 24, Amer. Math. Soc, 1999, pp. 241–271. **8.** *Хованский А. Г.* Малочлены. Библиотека математика, вып. 2, Фазис, М., 1997. **9.** *Шильников Л. П.* ДАН СССР, **160**, 558–561 (1965).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
e-mail: kaloshin@math.princeton.edu

Поступило в редакцию
28 декабря 1998 г.

УДК 517.98

Об асимптотических гомоморфизмах в алгебры Калкина*

© 2001. В. М. Мануйлов

Задача классификации расширений C^* -алгебр послужила стимулом проникновения топологических методов в теорию C^* -алгебр [3]. Как показано в [7], расширения ядерных C^* -алгебр описываются в терминах KK -функтора Каспарова, однако в общем случае пока подобного описания нет. В настоящей заметке мы определяем группу так называемых фантомных расширений (возможно, пустую) и в случае, когда A является двукратной надстройкой, даем описание ее расширений в терминах E -теории Конна–Хигсона [5] и группы фантомных расширений.

Для C^* -алгебр A и B через $[[A, B]]$ мы обозначаем множество гомотопических классов асимптотических гомоморфизмов из A в B [5, 6]. Мы предполагаем, что A сепарабельна, а B имеет строго положительный элемент. Через $\text{Ext}(A, B)$ мы обозначаем множество гомотопических классов гомоморфизмов из A в алгебру Калкина $Q(B \otimes \mathcal{K}) = M(B \otimes \mathcal{K})/B \otimes \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ есть C^* -алгебра компактных операторов, а M обозначает алгебру мультипликаторов [13]. С помощью инварианта Басби [4] это множество отождествляется с множеством расширений алгебры A посредством алгебры $B \otimes \mathcal{K}$. Аналогично, через $\text{Ext}^{as}(A, B)$ мы обозначаем множество гомотопических классов асимптотических гомоморфизмов алгебры A в $Q(B \otimes \mathcal{K})$. (Асимптотические) гомоморфизмы $f_0, f_1: A \rightarrow Q(B \otimes \mathcal{K})$ называются гомотопными, если существует (асимптотический) гомоморфизм $F: A \rightarrow Q(B \otimes \mathcal{K} \otimes C[0, 1])$, композиции которого с гомоморфизмами вычисления в 0 и 1 совпадают с f_0 и f_1 соответственно. Все указанные множества обладают естественной структурой абелевой группы в случае, когда A является надстройкой, т. е. $A = SD = C_0(\mathbb{R}) \otimes D$ для некоторой C^* -алгебры D .

Так как любой настоящий гомоморфизм можно рассматривать как асимптотический, имеется естественное отображение

$$i: \text{Ext}(A, B) \rightarrow \text{Ext}^{as}(A, B). \quad (1)$$

Хотя типично асимптотических гомоморфизмов больше, чем настоящих, мы показываем, что отображение i эпиморфно, если A — надстройка. Заодно мы получим новое описание E -теории.

*Работа частично поддержана РФФИ (грант №99-01-01201).

При работе с асимптотическими гомоморфизмами удобным инструментом является возможность их дискретизации, предложенная Мищенко [12, 9, 10]. Дискретным асимптотическим гомоморфизмом $\varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}: A \rightarrow B \otimes \mathcal{K}$ мы называем асимптотический гомоморфизм, дополнительно удовлетворяющий условию $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_{n+1}(a) - \varphi_n(a)\| = 0$ для каждого $a \in A$. Без ограничения общности можно считать последовательность отображений φ_n равномерно непрерывной [8], а благодаря теореме выбора [2] можно получить равномерно непрерывную последовательность поднятий $\varphi'_n: A \rightarrow M(B \otimes \mathcal{K})$.

Для $a, b \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$ положим

$$\begin{aligned} P'_n(a, b) &= \varphi'_n(a)\varphi'_n(b) - \varphi'_n(ab), \\ L'_n(a, b, \lambda) &= \varphi'_n(a) + \lambda\varphi'_n(b) - \varphi'_n(a + \lambda b), \\ A'_n(a) &= \varphi'_n(a)^* - \varphi'_n(a^*). \end{aligned}$$

Мы отождествляем $B \otimes \mathcal{K}$ (соответственно $M(B \otimes \mathcal{K})$) с C^* -алгеброй компактных (соответственно допускающих сопряженный) операторов в стандартном гильбертовом C^* -модуле $B \otimes l_2(\mathbb{N}) = l_2(B)$ и диагональность операторов понимаем в этом смысле. Ниже мы строим отображение $\widetilde{CH}: \text{Ext}^{as}(A, B) \rightarrow [[SA, B \otimes \mathcal{K}]]$, являющееся ключевым в настоящей заметке и продолжающее аналогичное отображение CH Конна–Хигсона [5]. Ясно, что это отображение достаточно определить для дискретных асимптотических гомоморфизмов. Для этого нужно более аккуратно, чем в конструкции Конна–Хигсона, выбрать квазицентральную аппроксимативную единицу [1].

ЛЕММА 1. Пусть $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}: A \rightarrow Q(B \otimes \mathcal{K})$ — дискретный асимптотический гомоморфизм. Тогда существуют репараметризация последовательности $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и аппроксимативная единица $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B \otimes \mathcal{K}$, удовлетворяющие условиям

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|[\varphi'_n(a), u_n]\| = 0$ для каждого $a \in A$;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha(u_n)P'_n(a, b)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha(u_n)L'_n(a, b, \lambda)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha(u_n)A'_n(a)\| = 0$ для всех $\alpha \in C_0(0, 1)$, $a, b \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$;
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{n+1} - u_n\| = 0$;
- (iv) каждый оператор u_n является диагональным, $u_n = \text{diag}\{u_n^1, u_n^2, \dots\}$, с диагональными элементами $u_n^i \in B$, и $\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_n \|u_n^{i+1} - u_n^i\| = 0$.

Положим

$$\widetilde{CH}(\varphi)_n(\alpha \otimes a) = \alpha(u_n)\varphi'_n(a), \quad \alpha \in C_0(0, 1), a \in A,$$

где $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям леммы 1. Пункты (i)–(iii) леммы 1 гарантируют, что $(\widetilde{CH}(\varphi)_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — дискретный асимптотический гомоморфизм из SA в $B \otimes \mathcal{K}$. Легко проверить, что отображение $\widetilde{CH}$ определено корректно и что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}(A, B) & \xrightarrow{i} & \text{Ext}^{as}(A, B) \\ & \searrow CH & \downarrow \widetilde{CH} \\ & & [[SA, B \otimes \mathcal{K}]] \end{array}$$

Определим гомоморфизм $g: C_0(0, 1) \rightarrow Q(\mathcal{H})$ формулой $g(\alpha_0) = q(T) - 1$ по модулю компактных операторов, где $\alpha_0 = e^{2\pi i x} - 1$ — образующая в $C_0(0, 1)$, а T — правый сдвиг в гильбертовом пространстве $l_2(\mathbb{N})$. Пусть $\iota: Q(\mathcal{H}) \otimes B \otimes \mathcal{H} \subset Q(B \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) \cong Q(B \otimes \mathcal{H})$ — стандартное вложение и

$$j = \iota \circ (g \otimes \text{id}_{B \otimes \mathcal{H}}): SB \otimes \mathcal{H} \rightarrow Q(\mathcal{H}) \otimes B \otimes \mathcal{H} \rightarrow Q(B \otimes \mathcal{H}).$$

Гомоморфизм j индуцирует отображение $j_*: [[A, SB \otimes \mathcal{H}]] \rightarrow \text{Ext}^{as}(A, B)$. Если $S: [[A, B \otimes \mathcal{H}]] \rightarrow [[SA, SB \otimes \mathcal{H}]]$ — отображение надстройки, то композиция $M = j_* \circ S$ задает отображение

$$M: [[A, B \otimes \mathcal{H}]] \rightarrow \text{Ext}^{as}(SA, B).$$

Пусть

$$Bott_1: \text{Ext}^{as}(A, B) \rightarrow \text{Ext}^{as}(S^2A, B) \quad \text{и} \quad Bott_2: [[A, B \otimes \mathcal{H}]] \rightarrow [[S^2A, B \otimes \mathcal{H}]]$$

— гомоморфизмы Ботта.

ТЕОРЕМА 2. $M \circ \widetilde{CH} = Bott_1$ и $\widetilde{CH} \circ M = Bott_2$.

Второе равенство доказывается непосредственной проверкой, а доказательство гомотопности асимптотических изоморфизмов $Bott_1(\varphi)$ и $M \circ \widetilde{CH}(\varphi)$, где $\varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}: A \rightarrow Q(B \otimes \mathcal{H})$, можно заменить на построение гомотопий, соединяющих каждый из этих двух асимптотических гомоморфизмов с настоящим гомоморфизмом $f: S^2A \rightarrow Q(B \otimes \mathcal{H})$, определенным формулой

$$f(\alpha \otimes (e^{2\pi i x} - 1) \otimes a) = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \alpha(u_n) \varphi'_n(a) \right) (T - 1),$$

где $\alpha, e^{2\pi i x} - 1 \in C_0(0, 1)$, $a \in A$ и T — правый сдвиг в гильбертовом модуле $l_2(B)$.

Поскольку гомоморфизмы Ботта являются изоморфизмами в случае, когда A — надстройка, отображения $\widetilde{CH}$ и M взаимно обратны.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если A — надстройка, то отображение $\widetilde{CH}: \text{Ext}^{as}(A, B) \rightarrow [[SA, B \otimes \mathcal{H}]]$ является изоморфизмом.

Назовем гомоморфизм $f: A \rightarrow Q(B \otimes \mathcal{H})$, который гомотопически тривиален в классе асимптотических гомоморфизмов, фантомным, и обозначим через $\text{Ext}^{ph}(A, B)$ множество гомотопических классов фантомных гомоморфизмов.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если A является двукратной надстройкой, то имеет место естественное разложение в прямую сумму $\text{Ext}(A, B) = \text{Ext}^{ph}(A, B) \oplus \text{Ext}^{as}(A, B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Ext}^{ph}(S^2A, B) \longrightarrow \text{Ext}(S^2A, B) \xrightarrow{CH} \text{Ext}^{as}(S^2A, B) \longrightarrow 0. \quad (2)$$

В [11] показано, что гомоморфизм CH сюръективен; значит, последовательность (2) точна. В [9, 10, 11] построено естественное отображение $E: [[A, B \otimes \mathcal{H}]] \rightarrow \text{Ext}(SA, B)$ и доказано, что композиция $CH \circ E$ является изоморфизмом в случае, когда A — надстройка. После отождествления $\text{Ext}^{as}(S^2A, B) \cong [[SA, B \otimes \mathcal{H}]]$ ясно, что гомоморфизм E служит расщеплением точной последовательности (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если A одновременно является ядерной C^* -алгеброй и надстройкой, то группы $\text{Ext}(A, B)$ и $[[A, B \otimes \mathcal{H}]]$ совпадают и $\text{Ext}^{ph}(A, B) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arveson W. Duke Math. J., **44**, 329–355 (1977).
2. Bartle R. G., Graves L. M. Trans. Amer. Math. Soc., **72**, 400–413 (1952).
3. Brown L. G., Douglas R. G., Fillmore P. A. Ann. Math. (2), **105**, 265–324 (1977).
4. Busby R. Trans. Amer. Math. Soc., **132**, 79–99 (1968).
5. Connes A., Higson N. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **311**, 101–106 (1990).
6. Dădărlat M., Loring T. A. J. Funct. Anal., **126**, 367–383 (1994).
7. Каспаров Г. Г. Изв. АН СССР, сер. матем., **44**, 571–636 (1980).
8. Loring T. A. In: Operator Algebras and Quantum Field Theory (Rome, 1996), Internat. Press, 1997, pp. 111–122.
9. Мануйлов В. М., Мищенко А. С. Матем. сб., **189**, №10, 53–72 (1998).
10. Manuilov V. M., Thomsen K. Adv. Math., **154**, 258–279 (2000).
11. Мануйлов В. М., Томсен К. Алгебра и анализ, **12**, вып. 5, 142–157 (2000).
12. Mishchenko A. S., Mohammad N. Asymptotic representations of discrete groups. In: Lie Groups and Lie Algebras. Their Representations, Generalizations and Applications, Mathematics and its Applications, Vol. 433. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, pp. 299–312.
13. Pedersen G. K. C^* -algebras and their automorphism groups. Acad. Press, London–New York–San Francisco, 1979.

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
e-mail: manuilov@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
13 марта 2000 г.

УДК 517.9

О рангах эргодического автоморфизма $T \times T$

© 2001. В. В. РЫЖИКОВ

1. С автоморфизмом S пространства Лебега (X, μ) , $\mu(X) = 1$, связан числовой инвариант $\beta(S)$, называемый *локальным рангом*. Значение $\beta(S)$ определяется как максимальное число $\beta \geq 0$, такое, что найдется последовательность ξ_j измеримых конечных разбиений вида $\xi_j = \{B_j, SB_j, S^2B_j, \dots, S^{h_j-1}B_j, A_j^1, A_j^2, \dots, A_j^{n(j)}\}$ (здесь B_j и $A_j^1, A_j^2, \dots, A_j^{n(j)}$ — некоторые измеримые подмножества пространства X), которая стремится к разбиению на точки (мы используем обозначение $\xi_j \rightarrow \varepsilon$), причем $\mu(U_j) \rightarrow \beta$, где $U_j = \bigsqcup_{0 \leq k < h_j} S^k B_j$ (множества U_j будем называть β -башнями).

Говорят, что автоморфизм S имеет *конечный ранг*, если для некоторого натурального r найдется последовательность разбиений $\eta_j \rightarrow \varepsilon$ вида

$$\eta_j = \{B_j^1, SB_j^1, S^2B_j^1, \dots, S^{h_j^1}B_j^1, \dots, B_j^r, SB_j^r, S^2B_j^r, \dots, S^{h_j^r}B_j^r, Y_j\},$$

где $h_j^1, \dots, h_j^r \rightarrow \infty$ и $\mu(Y_j) \rightarrow 0$. Минимальное такое число r , если оно существует, обозначается через $\text{Rank}(S)$ и называется рангом автоморфизма S . Если автоморфизм не обладает конечным рангом, полагаем $\text{Rank}(S) = \infty$.

Аutomорфизмам конечного и положительного локального ранга посвящен обзор [2]. Пример автоморфизма S с $\beta(S) > 0$ и $\text{Rank}(S) = \infty$ впервые построил С. Ференци [2].

2. В неопубликованных лекциях [4] А. Каток рассмотрел слабо перемешивающие автоморфизмы T , такие, что локальный ранг автоморфизма $T \times T$ был не меньше, чем $1/4$ (обсуждение этих примеров см. в [3]). Мы покажем, что для