Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, О рангах эргодического автоморфизма $T \times T$, *Функц. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 2, 84–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa251>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:15:09

ЛИТЕРАТУРА

1. Arveson W. Duke Math. J., **44**, 329–355 (1977).
2. Bartle R. G., Graves L. M. Trans. Amer. Math. Soc., **72**, 400–413 (1952).
3. Brown L. G., Douglas R. G., Fillmore P. A. Ann. Math. (2), **105**, 265–324 (1977).
4. Busby R. Trans. Amer. Math. Soc., **132**, 79–99 (1968).
5. Connes A., Higson N. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, **311**, 101–106 (1990).
6. Dădărlat M., Loring T. A. J. Funct. Anal., **126**, 367–383 (1994).
7. Каспаров Г. Г. Изв. АН СССР, сер. матем., **44**, 571–636 (1980).
8. Loring T. A. In: Operator Algebras and Quantum Field Theory (Rome, 1996), Internat. Press, 1997, pp. 111–122.
9. Мануйлов В. М., Мищенко А. С. Матем. сб., **189**, №10, 53–72 (1998).
10. Manuilov V. M., Thomsen K. Adv. Math., **154**, 258–279 (2000).
11. Мануйлов В. М., Томсен К. Алгебра и анализ, **12**, вып. 5, 142–157 (2000).
12. Mishchenko A. S., Mohammad N. Asymptotic representations of discrete groups. In: Lie Groups and Lie Algebras. Their Representations, Generalizations and Applications, Mathematics and its Applications, Vol. 433. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, pp. 299–312.
13. Pedersen G. K. C^* -algebras and their automorphism groups. Acad. Press, London–New York–San Francisco, 1979.

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
e-mail: manuilov@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
13 марта 2000 г.

УДК 517.9

О рангах эргодического автоморфизма $T \times T$

© 2001. В. В. РЫЖИКОВ

1. С автоморфизмом S пространства Лебега (X, μ) , $\mu(X) = 1$, связан числовой инвариант $\beta(S)$, называемый *локальным рангом*. Значение $\beta(S)$ определяется как максимальное число $\beta \geq 0$, такое, что найдется последовательность ξ_j измеримых конечных разбиений вида $\xi_j = \{B_j, SB_j, S^2B_j, \dots, S^{h_j-1}B_j, A_j^1, A_j^2, \dots, A_j^{n(j)}\}$ (здесь B_j и $A_j^1, A_j^2, \dots, A_j^{n(j)}$ — некоторые измеримые подмножества пространства X), которая стремится к разбиению на точки (мы используем обозначение $\xi_j \rightarrow \varepsilon$), причем $\mu(U_j) \rightarrow \beta$, где $U_j = \bigsqcup_{0 \leq k < h_j} S^k B_j$ (множества U_j будем называть β -башнями).

Говорят, что автоморфизм S имеет *конечный ранг*, если для некоторого натурального r найдется последовательность разбиений $\eta_j \rightarrow \varepsilon$ вида

$$\eta_j = \{B_j^1, SB_j^1, S^2B_j^1, \dots, S^{h_j^1}B_j^1, \dots, B_j^r, SB_j^r, S^2B_j^r, \dots, S^{h_j^r}B_j^r, Y_j\},$$

где $h_j^1, \dots, h_j^r \rightarrow \infty$ и $\mu(Y_j) \rightarrow 0$. Минимальное такое число r , если оно существует, обозначается через $\text{Rank}(S)$ и называется рангом автоморфизма S . Если автоморфизм не обладает конечным рангом, полагаем $\text{Rank}(S) = \infty$.

Аutomорфизмам конечного и положительного локального ранга посвящен обзор [2]. Пример автоморфизма S с $\beta(S) > 0$ и $\text{Rank}(S) = \infty$ впервые построил С. Ференци [2].

2. В неопубликованных лекциях [4] А. Каток рассмотрел слабо перемешивающие автоморфизмы T , такие, что локальный ранг автоморфизма $T \times T$ был не меньше, чем $1/4$ (обсуждение этих примеров см. в [3]). Мы покажем, что для

любого слабо перемешивающего T ранг автоморфизма $T \times T$ равен бесконечности, установим неравенство $\beta(T \times T) \leq 1/4$, а в случае равенства $\beta(T \times T) = 1/4$ докажем, что автоморфизм T обладает свойством κ -перемешивания с показателем $\kappa = 1/2$ (об этом свойстве см. [5, 7]). Последний результат подтверждает гипотезу В. И. Оселедца [5] о существовании перекладывания T со свойством κ -перемешивания (гипотеза возникла в связи с тем, что свойство κ -перемешивания влечет за собой взаимную сингулярность сверточных степеней спектральной меры автоморфизма T (см. [5, 7])). Опуская явное описание конструкции, отметим, что перекладывание T трех отрезков со свойством $\beta(T \times T) = 1/4$ несложно реализовать как преобразование полуокружности, индуцированное подходящим поворотом окружности (сообщение А. Катка, март 1999 г.).

Доказательство результатов существенно использует технику джойнингов (сплетающих полиморфизмов в терминологии Вершика [1]) и их связь с марковскими операторами.

3. Отметим, что свойство слабого перемешивания автоморфизма T означает, что оператор Θ ортопроекции на пространство констант в $L_2(X, \mu)$ принадлежит слабому замыканию множества $\{\hat{T}^n : n \in \mathbb{Z}\}$, где $\hat{T}$ обозначает унитарный оператор в $L_2(X, \mu)$, индуцированный автоморфизмом T . Мы пользуемся также тем, что свойство слабого перемешивания равносильно эргодичности автоморфизма $T \times T$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть T — слабо перемешивающий автоморфизм. Тогда (а) $\text{Rank}(T \times T) = \infty$ и (б) $\beta(T \times T) \leq 1/4$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие слабого перемешивания в формулировке теоремы можно опустить. Мы ограничились рассмотрением ключевого случая.

ЛЕММА 2. Пусть эргодический автоморфизм S пространства $(\bar{X}, \bar{\mu})$, коммутирует с автоморфизмом R и $\beta(S) > 0$. Тогда для любого $\delta > 0$ найдутся $m > 0$ и последовательность n_j , такие, что имеет место слабая операторная сходимость $\hat{Y}_j \circ \hat{S}^{n_j} \rightarrow (1 - \delta')\beta(S)\hat{R}^m$, где $\hat{Y}_j$ — оператор умножения на индикатор множества Y_j , причем Y_j являются подмножествами β -башен и $\bar{\mu}(Y_j) \rightarrow (1 - \delta')\beta(S)$ для некоторого $\delta' \in [0, \delta]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U_j — последовательность β -башен для S . Определим последовательность маленьких башен $U_j^\delta = \bigsqcup_{0 \leq k \leq \delta h_j} S^k B_j$. Для некоторого числа $m > 0$ выполнено неравенство $\limsup_j \bar{\mu}(S^m U_j^\delta \cap U_j^\delta) > 0$. Действительно, меры множеств U_j^δ стремятся к $\delta\beta(S)$, а из этого вытекает, что множества $U_j^\delta, RU_j^\delta, \dots, R^N U_j^\delta$ при $\delta\beta(S)N > 1$ не могут быть дизъюнктными. Отсюда получаем, что для некоторого $m \leq N$ и некоторой константы $c > 0$ неравенство $\bar{\mu}(U_j^\delta \cap R^m U_j^\delta) > c$ выполнено для бесконечного числа номеров j . В этом случае, как показано в [6, §3], джойнинг Δ_{R^m} , отвечающий оператору $\hat{R}^m$, аппроксимируется частью сдвига $\Delta_{S^{n_j}}$ диагональной меры, расположенного в $Y_j \times \bar{X}$, где $Y_j = \bigsqcup_{\delta' h_j \leq k \leq h_j} S^k B_j$ для некоторого $\delta' \leq \delta$. В операторной формулировке сказанное записано в утверждении леммы. $\square$

ЛЕММА 3. Пусть для эргодического автоморфизма $T \times T$ выполнено условие $\beta(T \times T) > 0$, и пусть U_j — соответствующая последовательность β -башен. Тогда найдется последовательность $k_j \rightarrow \infty$, такая, что $\hat{U}_j \circ (\hat{T} \times \hat{T})^{k_j} \rightarrow \beta(T \times T)(I \otimes \Theta)$ (I — тождественный оператор).

СЛЕДСТВИЕ. Если $\beta(T \times T) = 1/4$ и $T \times T$ эргодичен, то автоморфизм T обладает свойством κ -перемешивания при $\kappa = 1/2$: слабому замыканию множества степеней оператора $\hat{T}$ принадлежит оператор $P = \frac{1}{2}(I + \Theta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Применим лемму 2 для случая $S = T \times T$, $R = I \times T$. Из ее доказательства видно, что при фиксированном $\delta > 0$ множество M_δ чисел m , для которых выполняется утверждение этой леммы, имеет положительную плотность. Так как T — слабо перемешивающий автоморфизм, слабое замыкание множества $\{I \otimes \hat{T}^m : m \in M_\delta\}$ содержит оператор $I \otimes \Theta$. Устремляя δ к нулю, получим утверждение леммы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Пусть $(\hat{T} \otimes \hat{T})^{k_j} \rightarrow P \otimes P \geq \frac{1}{4}(I \otimes \Theta)$. Представим P в виде $P = aI + b\Theta + cQ$, где полиморфизм, отвечающий марковскому оператору Q , сингулярен относительно полиморфизмов Δ и $\mu \otimes \mu$, отвечающих операторам I и Θ . Отметим также, что $a, b, c \geq 0$, $a + b + c = 1$. Тогда в произведении $(aI + b\Theta + cQ) \otimes (aI + b\Theta + cQ)$ компоненту $I \otimes \Theta$ дает только слагаемое $ab(I \otimes \Theta)$; следовательно, $ab \geq 1/4$, что возможно только при $a = b = 1/2$. $\square$

Другим непосредственным следствием леммы 3 являются сходимости

$$\pi\chi_{U_j} \circ \hat{T}^{k_j} \rightarrow \beta I, \quad \pi\chi_{U_j^*} \circ \hat{T}^{k_j} \rightarrow \beta \Theta,$$

где $\pi F(x, y)$ обозначает $\int_X F(x, y) d\mu(y)$, а U_j^* определено формулой $\chi_{U_j^*}(x, y) = \chi_{U_j}(y, x)$.

ЛЕММА 4. Пусть U_j — последовательность β -башен эргодического автоморфизма $T \times T$. Тогда имеет место сходимость $\int_X \pi\chi_{U_j} \pi\chi_{U_j^*} d\mu \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\int_X \pi\chi_{U_j} \pi\chi_{U_j^*} d\mu > c > 0$, то операторы I и Θ имеют общую компоненту, являющуюся предельной точкой последовательности операторов $\pi\chi_{U_j} \pi\chi_{U_j^*} \circ \hat{T}^{k_j}$. Но это невозможно, так как отвечающие им полиморфизмы Δ и $\mu \otimes \mu$ взаимно сингулярны. Таким образом, имеет место асимптотическая дизъюнктность проекций β -башни на сомножители в $X \times X$. $\square$

Теперь докажем второе утверждение теоремы 1. Из леммы 4 получаем, что для некоторых непересекающихся множеств A_j и B_j , таких, что $\mu(A_j \Delta \{x : \pi\chi_{U_j}(x) > \varepsilon > 0\}) \rightarrow 0$ и $\mu(B_j \Delta \{x : \pi\chi_{U_j^*}(x) > \varepsilon > 0\}) \rightarrow 0$, выполнено неравенство $\mu \otimes \mu(U_j \setminus (A_j \times B_j)) < 2\varepsilon$. Так как $\mu(A_j)\mu(B_j) \leq 1/4$, верхний предел последовательности $\mu \otimes \mu(U_j)$ не превосходит $1/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПЕРВОГО УТВЕРЖДЕНИЯ ТЕОРЕМЫ 1. Предположим, что $\text{Rank}(T \times T) = r$, т. е. последовательность мер объединений некоторых соответствующих башен $U_j^1, \dots, U_j^r$ стремится к 1 при $j \rightarrow \infty$ (число r фиксированно!). Как мы пояснили выше, башни из этого набора с асимптотически исчезающей погрешностью содержатся в декартовых произведениях непересекающихся множеств. Но это противоречит следующей лемме, из которой вытекает, что верхний предел последовательности мер объединений не больше, чем число $1 - 2^{-4r}$.

ЛЕММА 5. Пусть $A_1, \dots, A_r$ и $B_1, \dots, B_r$ суть измеримые подмножества пространства X , $\mu(X) = 1$ и $A_i \cap B_i = \emptyset$ для всех $i = 1, \dots, r$. Тогда $\mu \otimes \mu(\bigcup_{i=1}^r (A_i \times B_i)) \leq 1 - 2^{-4r}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим минимальное разбиение множества X , порожденное множествами $A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_r$. Пусть C — атом этого разбиения. Замечаем, что $\mu \otimes \mu((A_i \times B_i) \cap (C \times C)) = 0$. Действительно, если $A_i \cap C$ и

$B_i \cap C$ — непустые множества, то $A_i \cap C = C = B_i \cap C$, так как C является атомом. Но это противоречит условию $A_i \cap B_i = \emptyset$. Таким образом, $C \times C$ не пересекается с объединением множеств $A_i \times B_i$. Всегда найдется такой атом C , что $\mu \otimes \mu(C \times C) \geq 2^{-4r}$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вершик А. М. Записки научных семинаров ЛОМИ, **72**, 26–62 (1977). 2. Ferenczi S. Colloquium Mathematicum, **73**, No. 1, 35–65 (1997). 3. Goodson G. R., Ryzhikov V. V. J. Dynamical and Control Systems, **3**, 321–341 (1997). 4. Katok A. Constructions in ergodic theory. Preprint. 5. Оселедец В. И. Матем. заметки, **5**, №3, 323–326 (1969). 6. Рыжиков В. В. Матем. сб., **183**, №3, 133–160 (1992). 7. Степин А. М. Изв. АН СССР, сер. матем., **50**, 801–834 (1986).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
vryz@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
31 января 2000 г.

УДК 517.9

О модели Фридрихса в односкоростной теории переноса*

© 2001. С. А. СТЕПИН

В настоящей работе изучаются спектральные свойства несамосопряженного интегро-дифференциального оператора, возникающего при линеаризации уравнения Больцмана в рамках односкоростной модели переноса частиц в веществе (см. [1]). Рассматривается случай, когда количественные характеристики рассеяния частиц зависят лишь от одной пространственной координаты, скажем x . Процесс рассеяния описывается функцией распределения $\Psi(x, \mu, t)$, имеющей смысл плотности числа частиц, находящихся в момент времени t в точке с координатой x и таких, что косинус угла между скоростью частицы и осью x равен μ . Линеаризованное уравнение эволюции функции распределения имеет вид

$$\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + \sigma \right) \Psi(x, \mu, t) = \sigma \frac{c(x)}{2} \int_{-1}^1 \Psi(x, \mu, t) d\mu.$$

Здесь v — скорость частиц, σ — макроскопическое сечение (величина, обратно пропорциональная средней длине свободного пробега частиц), а $c(x)$ — коэффициент размножения, характеризующий взаимодействие частиц с веществом. Предполагается, что $c(x)$ — неотрицательная (существенно) ограниченная функция.

В этом контексте К. О. Фридрихсом была поставлена (см. [2, 4]) задача изучения спектральных свойств действующего в пространстве $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1])$ оператора

$$L = L_0 + iV = i\mu \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{c(x)}{2} \int_{-1}^1 \cdot d\mu$$

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.