Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степин, О модели Фридрихса в односкоростной теории переноса, *Функц. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 2, 87–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa252>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:16:06

$B_i \cap C$ — непустые множества, то $A_i \cap C = C = B_i \cap C$, так как C является атомом. Но это противоречит условию $A_i \cap B_i = \emptyset$. Таким образом, $C \times C$ не пересекается с объединением множеств $A_i \times B_i$. Всегда найдется такой атом C , что $\mu \otimes \mu(C \times C) \geq 2^{-4r}$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вершик А. М. Записки научных семинаров ЛОМИ, **72**, 26–62 (1977). 2. Ferenczi S. Colloquium Mathematicum, **73**, No. 1, 35–65 (1997). 3. Goodson G. R., Ryzhikov V. V. J. Dynamical and Control Systems, **3**, 321–341 (1997). 4. Katok A. Constructions in ergodic theory. Preprint. 5. Оселедец В. И. Матем. заметки, **5**, №3, 323–326 (1969). 6. Рыжиков В. В. Матем. сб., **183**, №3, 133–160 (1992). 7. Степин А. М. Изв. АН СССР, сер. матем., **50**, 801–834 (1986).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
vryz@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
31 января 2000 г.

УДК 517.9

О модели Фридрихса в односкоростной теории переноса*

© 2001. С. А. СТЕПИН

В настоящей работе изучаются спектральные свойства несамосопряженного интегро-дифференциального оператора, возникающего при линеаризации уравнения Больцмана в рамках односкоростной модели переноса частиц в веществе (см. [1]). Рассматривается случай, когда количественные характеристики рассеяния частиц зависят лишь от одной пространственной координаты, скажем x . Процесс рассеяния описывается функцией распределения $\Psi(x, \mu, t)$, имеющей смысл плотности числа частиц, находящихся в момент времени t в точке с координатой x и таких, что косинус угла между скоростью частицы и осью x равен μ . Линеаризованное уравнение эволюции функции распределения имеет вид

$$\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + \sigma \right) \Psi(x, \mu, t) = \sigma \frac{c(x)}{2} \int_{-1}^1 \Psi(x, \mu, t) d\mu.$$

Здесь v — скорость частиц, σ — макроскопическое сечение (величина, обратно пропорциональная средней длине свободного пробега частиц), а $c(x)$ — коэффициент размножения, характеризующий взаимодействие частиц с веществом. Предполагается, что $c(x)$ — неотрицательная (существенно) ограниченная функция.

В этом контексте К. О. Фридрихсом была поставлена (см. [2, 4]) задача изучения спектральных свойств действующего в пространстве $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1])$ оператора

$$L = L_0 + iV = i\mu \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{c(x)}{2} \int_{-1}^1 \cdot d\mu$$

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

с областью определения $D(L) = \{\psi \in \mathcal{H} : \psi(\cdot, \mu) \text{ абсолютно непрерывна для п. в. } \mu \in [-1, 1], L\psi \in \mathcal{H}\}$. В работах [3, 4] был исследован спектр оператора L в случае, когда функция $c(x)$ пропорциональна индикатору интервала. Случай произвольной финитной неотрицательной функции $c(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ изучен в [5]. Для таких $c(x)$ непрерывный спектр оператора L заполняет вещественную ось, а точечный спектр состоит из нормальных полупростых собственных значений, принадлежащих $i\mathbb{R}_+$. В работе [5] для суммарной кратности $N(c)$ собственных значений оператора L в случае финитной функции $c(x)$ получена оценка

$$N(c) \leq 1 + \frac{1}{4} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} c(x)(\ln|x-y|)^2 c(y) dx dy. \quad (1)$$

В этой связи возникает вопрос, будет ли оценка (1) верна при одном лишь условии конечности ее правой части. В настоящей работе получен положительный ответ на этот вопрос. Кроме того, показано, что в случае, когда $c(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, у оператора L сохраняется указанная выше структура спектра, а также изучена величина $N(\kappa c)$ как функция параметра $\kappa > 0$.

В дальнейшем используются следующие обозначения: $\sigma(A)$ — спектр оператора A , $\sigma_c(A)$ и $\sigma_p(A)$ — непрерывная и точечная компоненты спектра $\sigma(A)$, $R(\lambda) := (L - \lambda I)^{-1}$ и $R_0(\lambda) := (L_0 - \lambda I)^{-1}$.

1. Структура спектра оператора L . Применительно к рассматриваемой здесь ситуации включения $\mathbb{R} \subset \sigma_c(L)$ и $\sigma_p(L) \subset i\mathbb{R}_+$ устанавливаются так же, как в работе [4]. Поскольку оператор $V \geq 0$ ограничен, то $L = L_0 + iV$ — максимальный диссипативный оператор и, следовательно, $\sigma(L) \cap \mathbb{C}_- = \emptyset$.

Для $\lambda \in \mathbb{C}_+ \setminus \sigma(L)$ справедливо следующее тождество (см. [4, 5]):

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) - iR_0(\lambda)\sqrt{V}(I + Q(\lambda))^{-1}\sqrt{V}R_0(\lambda), \quad (2)$$

где $Q(\lambda)$ — интегральный оператор с ядром

$$q(x, y; \lambda) := \frac{1}{2} \sqrt{c(x)} \operatorname{Ei}(i\lambda|x-y|) \sqrt{c(y)}; \quad (3)$$

здесь $\operatorname{Ei}(z)$ — интегральная показательная функция,

$$\operatorname{Ei}(z) = - \int_1^\infty \frac{e^{zt}}{t} dt, \quad \operatorname{Re} z < 0.$$

Допустим, что $[Q(\lambda)]^l$ при некотором $l \in \mathbb{N}$ и всех $\lambda \in \mathbb{C}_+$ принимает значения в классе $\mathfrak{S}_\infty$ компактных операторов. Тогда, согласно аналитической альтернативе Фредгольма, оператор-функция $(I + Q(\lambda))^{-1}$ мероморфна в $\mathbb{C}_+$, причем ее вычеты в полюсах суть операторы конечного ранга. Ввиду соотношения (2) то же самое верно для резольвенты $R(\lambda)$, и потому часть спектра оператора L , содержащаяся в открытой верхней полуплоскости, представляет собой дискретное множество конечнократных собственных значений.

Следующее утверждение дает достаточное условие компактности оператора $Q(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, и, сверх того, принадлежности $Q(\lambda)$ классу $\mathfrak{S}_2$ операторов Гильберта–Шмидта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $c(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ и $c(x) \geq 0$ при п. в. $x \in \mathbb{R}$, то $Q(\lambda) \in \mathfrak{S}_2$ для каждого $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (3) при $|\beta|x - y| \geq 1$ следует неравенство $|q(x, y; \lambda)| \leq \sqrt{c(x)c(y)}$. В случае если $T := \alpha|x - y| \geq 1$, имеем

$$\operatorname{Ei}(i\lambda|x - y|) = - \int_T^\infty \frac{e^{-\varepsilon t}}{t} e^{it} dt = -e^{-\varepsilon T} \int_T^\infty \frac{e^{it}}{t} dt + \varepsilon \int_T^\infty e^{-\varepsilon t} \left(\int_t^\infty \frac{e^{i\tau}}{\tau} d\tau \right) dt,$$

где $\varepsilon = \beta/\alpha$. Отсюда видно, что

$$|\operatorname{Ei}(i\lambda|x - y|)| \leq 2 \max_{t \geq 1} \left| \int_t^\infty \frac{e^{i\tau}}{\tau} d\tau \right|,$$

когда $|\alpha||x - y| \geq 1$. Таким образом,

$$|q(x, y; \lambda)| \leq M \sqrt{c(x)c(y)},$$

если $|x - y| \geq \delta = \min\{|\alpha|^{-1}, \beta^{-1}\}$, где постоянная M больше или равна 1.

Рассмотрим теперь случай, когда $|x - y| \leq \delta$. Используя известное представление интегральной экспоненты

$$\operatorname{Ei}(z) = \ln(-z) + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n \cdot n!}$$

и учитывая, что $|\lambda||x - y| \leq 2$ и $|\arg(-i\lambda)| \leq \pi/2$, получаем неравенство

$$|q(x, y; \lambda)| = \frac{1}{2} \sqrt{c(x)} |\operatorname{Ei}(i\lambda|x - y|)| \sqrt{c(y)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{c(x)} (|\ln|x - y|| + K(\lambda)) \sqrt{c(y)},$$

где $K(\lambda) = |\ln|\lambda|| + \text{const}$. Сказанное позволяет утверждать, что при сделанных относительно коэффициента $c(x)$ предположениях для $\lambda \in \mathbb{C}_+$ ядро $q(x, y; \lambda)$ квадратично интегрируемо и, стало быть, $Q(\lambda)$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_2$.

ТЕОРЕМА 1. Если $c(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ и $c(x) \geq 0$ при п. в. $x \in \mathbb{R}$, то часть спектра $\sigma(L) \cap \mathbb{C}_+ \subset i\mathbb{R}_+$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности.

Действительно, если $0 \leq c(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, то в силу предложения 1 оператор $VR_0(\lambda)V$ принадлежит $\mathfrak{S}_\infty$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Отсюда с учетом тождества

$$\operatorname{Im}(VR_0(\lambda)V) = \operatorname{Im} \lambda VR_0(\lambda)(VR_0(\lambda))^*$$

закключаем, что $VR_0(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty$ и, следовательно,

$$Q^2(\lambda) = -\sqrt{V}R_0(\lambda)VR_0(\lambda)\sqrt{V} \in \mathfrak{S}_\infty, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Отметим, что все собственные значения оператора L полупростые, т. е. соответствующие корневые подпространства не содержат присоединенных векторов.

2. Условие конечности дискретного спектра оператора L . Обозначим через $N_\varepsilon(c)$, $\varepsilon > 0$, ранг спектрального проектора оператора L , отвечающего части спектра, принадлежащей промежутку $[i\varepsilon, i\infty)$. Так как $\dim \ker(L - \lambda I) = \dim \ker(I + Q(\lambda))$, то

$$N_\varepsilon(c) = \sum \dim \ker(I + Q(is)),$$

где суммирование ведется по тем $s \geq \varepsilon$, для которых $-1 \in \sigma_p(Q(is))$. Отметим, что собственные значения компактного самосопряженного оператора $Q(is) \leq 0$ непрерывно зависят от s и, поскольку $dQ(is)/ds \geq 0$, они движутся вправо с ростом параметра s . При этом $\|Q(is)\| \rightarrow 0$, если $s \rightarrow \infty$, и, следовательно,

$(-\infty, -1] \cap \sigma(Q(is)) = \emptyset$ для достаточно больших значений s . Таким образом, устанавливается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $c(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $c(x) \geq 0$ при п. в. $x \in \mathbb{R}$. Если $Q(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, то $N_\varepsilon(c)$ совпадает с суммарной кратностью собственных значений оператора $Q(i\varepsilon)$, принадлежащих $(-\infty, -1]$.

Способ подсчета количества собственных значений оператора Шрёдингера, основанный на тех же соображениях, что и выше, известен под названием принципа Бирмана–Швингера (см. [6]). В работе [5] подобные соображения использовались для получения оценки суммарной кратности собственных значений оператора L в случае финитной функции $c(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $c(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $c(x)(\ln|x-y|)^2 c(y) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ и $c(x) \geq 0$ при п. в. $x \in \mathbb{R}$. Тогда точечный спектр $\sigma_p(L)$ конечен и суммарная кратность $N(c)$ собственных значений оператора L допускает оценку

$$N(c) \leq 1 + \frac{1}{4} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} c(x)(\ln|x-y|)^2 c(y) dx dy.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В предположениях теоремы имеем $c(x) \in L^1(\mathbb{R})$ и, стало быть, $N_\varepsilon(c) < \infty$. Обозначим через P_ε оператор с вырожденным ядром $\sqrt{c(x)c(y)}(\gamma + \ln \varepsilon)/2$ и отметим, что ядро $q(x, y; i\varepsilon)$ интегрального оператора $Q(i\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, представимо в виде

$$q(x, y; i\varepsilon) = \frac{1}{2} \sqrt{c(x)} \ln|x-y| \sqrt{c(y)} + \frac{1}{2} (\gamma + \ln \varepsilon) \sqrt{c(x)c(y)} - \frac{1}{2} \sqrt{c(x)} \text{Ein}(\varepsilon|x-y|) \sqrt{c(y)}, \quad (4)$$

где $\text{Ein}(z)$ — дополнительная интегральная показательная функция:

$$\text{Ein}(z) = \int_0^z \frac{1 - e^{-t}}{t} dt.$$

Используя предложение 2 и учитывая, что $\text{rank } P_\varepsilon = 1$, согласно теореме Вейля и Куранта о сравнении собственных значений, получаем

$$N_\varepsilon(c) - 1 \leq \sum_{s \leq -1} \dim \ker[Q(i\varepsilon) - P_\varepsilon - sI] \leq \|Q(i\varepsilon) - P_\varepsilon\|_{\mathfrak{S}_2}^2.$$

Вследствие этой оценки и представления (4)

$$N_\varepsilon(c) \leq 1 + \frac{1}{4} \left\{ \left(\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} c(x)(\ln|x-y|)^2 c(y) dx dy \right)^{1/2} + \left(\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} c(x)(\text{Ein}(\varepsilon|x-y|))^2 c(y) dx dy \right)^{1/2} \right\}^2. \quad (5)$$

Поскольку $\text{Ein}(s) \leq s$ при $s > 0$, справедливы неравенства

$$\iint_{\varepsilon|x-y| < \delta} c(x)(\text{Ein}(\varepsilon|x-y|))^2 c(y) dx dy \leq \delta^2 \left(\int_{\mathbb{R}} c(x) dx \right)^2, \\ \iint_{\delta \leq \varepsilon|x-y| \leq 1} c(x)(\text{Ein}(\varepsilon|x-y|))^2 c(y) dx dy \leq \iint_{\varepsilon|x-y| \geq \delta} c(x)c(y) dx dy$$

с произвольным $\delta > 0$, откуда видно, что

$$\iint_{\varepsilon|x-y|\leq 1} c(x)(\text{Ein}(\varepsilon|x-y|))^2 c(y) dx dy \rightarrow 0, \quad \varepsilon \downarrow 0.$$

Далее, при $s \geq 1$ имеем $\text{Ein}(s) \leq 1 + \ln s$ и, следовательно,

$$\iint_{\varepsilon|x-y|\geq 1} c(x)(\text{Ein}(\varepsilon|x-y|))^2 c(y) dx dy \leq \iint_{\varepsilon|x-y|\geq 1} c(x)(1+\ln(\varepsilon|x-y|))^2 c(y) dx dy.$$

Так как $c(x)(\ln|x-y|)^2 c(y) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, то

$$\iint_{\varepsilon|x-y|\geq 1} c(x)(\text{Ein}(\varepsilon|x-y|))^2 c(y) dx dy \rightarrow 0, \quad \varepsilon \downarrow 0.$$

Переходя к пределу в (5) при $\varepsilon \downarrow 0$, получаем искомую оценку для $N(c)$.

3. Рождение собственных значений. Рассмотрим однопараметрическое семейство операторов $L(\kappa) := L_0 + i\kappa V$, $\kappa \in \mathbb{R}_+$, где функция $c(x)$ удовлетворяет требованиям теоремы 2, и отметим, что величина $N(\kappa c)$ монотонно возрастает с ростом параметра κ . При достаточно малых значениях параметра $\kappa > 0$ оператор $L(\kappa)$ имеет ровно одно собственное значение, если $c(x) > 0$ на множестве положительной меры. При увеличении κ появляются новые собственные значения, и механизм их возникновения может быть описан на основании предложения 2. Особую роль при этом играет подмножество $\mathcal{E} \subset L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, выделенное следующим условием:

$$0 \leq c(x) \in \mathcal{E} \iff \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \text{dist}\{-1, \sigma(Q(i\varepsilon))\} = 0. \quad (6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $c(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Если $c(x) \notin \mathcal{E}$, то величина $N(\kappa c)$ постоянна в окрестности значения $\kappa = 1$; если же $c(x) \in \mathcal{E}$, то $N(\kappa c) > N(c)$ при $\kappa > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, собственные значения $\mu_n(s)$ оператора $Q(is)$ представляют собой монотонные функции параметра s . Поэтому существуют конечные или бесконечные пределы $\mu_n(+0)$ и условие (6) может быть записано в следующей форме: $-1 \in \{\mu_n(+0)\}_{n=1}^\infty$.

Если $c(x) \notin \mathcal{E}$, то $-1 \notin \{\mu_n(+0)\}_{n=1}^\infty$. Положим $N := N(c)$; тогда $\mu_N(+0) < -1$ и $\mu_{N+1}(+0) > -1$. Согласно предложению 2, для всех значений параметра κ , достаточно близких к 1, имеем $N_\varepsilon(\kappa c) = N$, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, и, следовательно,

$$N(\kappa c) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} N_\varepsilon(\kappa c) = N,$$

т.е. ранг спектрального проектора $N(\kappa c)$ постоянен в окрестности значения $\kappa = 1$. Если же $c(x) \in \mathcal{E}$, то $\mu_{N+1}(+0) = -1$, причем $\mu_{N+1}(\varepsilon) > -1$ для $\varepsilon > 0$, и $\mu_N(+0) < -1$. В силу предложения 2 для произвольного $\kappa > 1$ справедливо неравенство $N_\varepsilon(\kappa c) \geq N + 1$, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, и, стало быть,

$$N(\kappa c) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} N_\varepsilon(\kappa c) > N(c).$$

В случае $c(x) \in \mathcal{E}$ произвольному $\kappa > 1$ отвечает число $\varepsilon_0(\kappa) > 0$, такое, что $N_\varepsilon(\kappa c) > N(c)$, если $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, и $N_\varepsilon(\kappa c) \leq N(c)$ для $\varepsilon \geq \varepsilon_0$, причем $\varepsilon_0(\kappa) \rightarrow 0$, когда $\kappa \rightarrow 1$. Сказанное позволяет сделать следующий вывод: рождение новых

собственных значений оператора $L(\kappa)$ с ростом κ происходит из точки $\lambda = 0$ при тех и только тех значениях параметра κ , для которых $\kappa c \in \mathcal{C}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шихов С. Б.* Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ. Атомиздат, М., 1973.
2. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. Мир, М., 1982.
3. *Lehner J., Wing G. M.* Comm. Pure Appl. Math., **8**, 217–234 (1955).
4. *Lehner J.* J. Math. Mech., **11**, No. 2, 173–181 (1962).
5. *Куперин Ю. А., Набоко С. Н., Романов Р. В.* Функци. анализ и его прил., **33**, вып. 3, 47–58 (1999).
6. *Simon B.* Functional integration and quantum physics. Academic Press, New York, 1979.

Московский государственный университет,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
6 января 2000 г.

УДК 517.919

Некристаллографические группы Кокстера и краевые особенности

© 2001. И. Г. ЩЕРБАК

0. Введение. В работе 1972 г. [1] В. И. Арнольд описал деформации голоморфных ростков функций, миниверсальные относительно стабильной эквивалентности, и показал, что для ростков типа A_μ , D_μ , E_6 , E_7 , E_8 соответствующие бифуркационные диаграммы диффеоморфны многообразиям нерегулярных орбит комплексифицированного действия соответствующих групп отражений.

Деформации тех же ростков, миниверсальные относительно других отношений эквивалентности, возникают естественным образом при изучении особенностей с дополнительными структурами, такими, как граница, препятствие, симметрии и т. д. Среди соответствующих бифуркационных диаграмм можно распознать многообразия нерегулярных орбит других групп Кокстера. Так, например, миниверсальные деформации простых особенностей функций на многообразии с краем отождествляются с деформациями ростков $A_{2\mu-1}$, $D_{\mu+1}$, E_6 , миниверсальными в классе $\mathbb{Z}_2$ -симметричных функций, и соответствующие бифуркационные диаграммы диффеоморфны многообразиям нерегулярных орбит групп отражений B_μ , C_μ , F_4 [2]. Многообразия нерегулярных орбит групп Кокстера $I_2(5)$, H_3 , H_4 появляются в задаче об обходе препятствия как бифуркационные диаграммы деформаций особенностей A_4 , D_6 , E_8 соответственно, миниверсальных в классе четнократных особенностей [3].

В отличие от этих примеров, особенности, связанные с группами Кокстера $I_2(p)$ ($p \geq 5$) и H_3 , появляются в теории Ляшко критических точек функций на многообразии с особым краем [4] в ином контексте. В настоящей заметке устанавливается связь особенностей Ляшко с краевыми особенностями. Многообразия нерегулярных орбит групп $I_2(p)$ и H_3 оказываются диффеоморфными бифуркационным диаграммам *краевых деформаций* простых особенностей A_3 и A_4 , связанных с краевыми особенностями B_{p-1}^3 и F_4^4 соответственно. Таким образом, эти группы включаются в «стандартную» схему, описанную выше. Необходимые понятия и факты читатель может найти в работах [2, 4, 5] (см. также книгу [6]).