Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Щербак, Некристаллографические группы
Кокстера и краевые особенности, *Функц. анализ и
его прил.*, 2001, том 35, выпуск 2, 92–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa253>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:01:14

собственных значений оператора $L(\kappa)$ с ростом κ происходит из точки $\lambda = 0$ при тех и только тех значениях параметра κ , для которых $\kappa c \in \mathcal{C}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шихов С. Б.* Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ. Атомиздат, М., 1973. 2. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. Мир, М., 1982. 3. *Lehner J., Wing G. M.* Comm. Pure Appl. Math., **8**, 217–234 (1955). 4. *Lehner J.* J. Math. Mech., **11**, No. 2, 173–181 (1962). 5. *Куперин Ю. А., Набоко С. Н., Романов Р. В.* Функци. анализ и его прил., **33**, вып. 3, 47–58 (1999). 6. *Simon B.* Functional integration and quantum physics. Academic Press, New York, 1979.

Московский государственный университет,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
6 января 2000 г.

УДК 517.919

Некристаллографические группы Кокстера и краевые особенности

© 2001. И. Г. ЩЕРБАК

0. Введение. В работе 1972 г. [1] В. И. Арнольд описал деформации голоморфных ростков функций, миниверсальные относительно стабильной эквивалентности, и показал, что для ростков типа A_μ , D_μ , E_6 , E_7 , E_8 соответствующие бифуркационные диаграммы диффеоморфны многообразиям нерегулярных орбит комплексифицированного действия соответствующих групп отражений.

Деформации тех же ростков, миниверсальные относительно других отношений эквивалентности, возникают естественным образом при изучении особенностей с дополнительными структурами, такими, как граница, препятствие, симметрии и т. д. Среди соответствующих бифуркационных диаграмм можно распознать многообразия нерегулярных орбит других групп Кокстера. Так, например, миниверсальные деформации простых особенностей функций на многообразии с краем отождествляются с деформациями ростков $A_{2\mu-1}$, $D_{\mu+1}$, E_6 , миниверсальными в классе $\mathbb{Z}_2$ -симметричных функций, и соответствующие бифуркационные диаграммы диффеоморфны многообразиям нерегулярных орбит групп отражений B_μ , C_μ , F_4 [2]. Многообразия нерегулярных орбит групп Кокстера $I_2(5)$, H_3 , H_4 появляются в задаче об обходе препятствия как бифуркационные диаграммы деформаций особенностей A_4 , D_6 , E_8 соответственно, миниверсальных в классе четнократных особенностей [3].

В отличие от этих примеров, особенности, связанные с группами Кокстера $I_2(p)$ ($p \geq 5$) и H_3 , появляются в теории Ляшко критических точек функций на многообразии с особым краем [4] в ином контексте. В настоящей заметке устанавливается связь особенностей Ляшко с краевыми особенностями. Многообразия нерегулярных орбит групп $I_2(p)$ и H_3 оказываются диффеоморфными бифуркационным диаграммам *краевых деформаций* простых особенностей A_3 и A_4 , связанных с краевыми особенностями B_{p-1}^3 и F_4^4 соответственно. Таким образом, эти группы включаются в «стандартную» схему, описанную выше. Необходимые понятия и факты читатель может найти в работах [2, 4, 5] (см. также книгу [6]).

1. Функции на многообразии с особым краем и краевые особенности.

В работе Ляшко [4] изучаются ростки функций на многообразии с особым краем, т.е. тройки $(f, V, \mathbb{C}^n)$, где $f: (\mathbb{C}^n, O) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — голоморфный росток, а $V = \{z \in \mathbb{C}^n \mid g(z) = 0\}$ — росток гиперповерхности в изолированной простой особой точке O . Критические точки таких троек классифицируются с точностью до *стабильной эквивалентности*, т.е. до диффеоморфизмов пространства $(\mathbb{C}^n, O)$ и стабилизации, состоящей в добавлении квадратов новых переменных к уравнению края. Как отмечено в [4], если число переменных больше двух, то простые и унимодальные критические точки могут появляться только у *неособых* троек, т.е. таких, что 1-струя функции f в O ненулевая. В этом случае g можно рассматривать как росток в простой критической точке O функции на многообразии $\mathbb{C}^n$ с гладким краем $\{f(z) = 0\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (1) *Стабильно эквивалентные неособые тройки определяют одну и ту же краевую особенность.*

(2) *Простые критические точки троек отвечают простым краевым особенностям типа C_k ($k \geq 3$), F_4 .*

(3) *Некритические точки троек отвечают простым краевым особенностям типа B_k ($k \geq 2$).*

В классификации Ляшко унимодальная критическая точка типа $I_2(p)$ ($p \geq 5$) задается ростком $f = x + \varepsilon y + z^2$ на гиперповерхности $xy = z^p$ (здесь $\varepsilon \neq 0$ — параметр вдоль страта $\mu = \text{const}$). Легко проверить, что соответствующая краевая особенность имеет разложение (A_{p-1}, A_3) , и, значит, это особенность B_{p-1}^3 (в обозначениях работы [5]). Унимодальная критическая точка типа H_3 задается ростком $x + y + \varepsilon z^3$ на гиперповерхности $xy = z^5$ (снова ε — параметр вдоль страта $\mu = \text{const}$), а соответствующая краевая особенность имеет разложение (A_4, A_4) , т.е. это особенность F_4^4 в обозначениях из [5].

2. Локальные кольца и кратности. Оказывается, что во многих случаях *локальное кольцо неособой тройки $(f, g(z) = 0, \mathbb{C}^n)$ изоморфно локальному кольцу особенности $g|_{f=0}$* . Такие тройки мы называем *хорошими*. В частности, хорошими являются все тройки из списка Ляшко простых и унимодальных критических точек, тройки вида $(x, g(x, y_1, \dots, y_{n-1}) = 0, \mathbb{C}^n)$ с квазиоднородной функцией g и тройки, отвечающие краевым особенностям с разложением (A_k, A_l) . Нам не известен пример *нехорошей* тройки с изолированной конечно-кратной критической точкой, но общий факт доказать не удалось; в каждом из перечисленных случаев доказательство свое.

Кратность критической точки хорошей тройки $(f, g(z) = 0, \mathbb{C}^n)$ на 1 меньше кратности особенности $g|_{f=0}$.

3. Версальные деформации и бифуркационные диаграммы. Рассмотрим росток $g(x, y)$ в точке O пространства $\mathbb{C}^n$ с координатами $x, y = (y_1, \dots, y_{n-1})$ и краем $\{x = 0\}$. Пусть $\{e_i = e_i(y), 0 \leq i \leq \mu\}$ — представители базиса локального кольца роста $g|_{x=0} = g(0, y)$. Назовем семейство

$$G^0(y, \lambda) = g(\lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_\mu e_\mu, y)$$

краевой деформацией роста $g|_{x=0}$, а соответствующую бифуркационную диаграмму

$$\Sigma(G^0) = \{\lambda \in \mathbb{C}^{\mu+1} \mid 0 \text{ — критическое значение семейства } G^0(\cdot, \lambda)\}$$

краевой бифуркационной диаграммой особенности $g|_{x=0}$. Легко проверить, что эквивалентные краевые ростки задают диффеоморфные диаграммы.

Пусть теперь $x, y_1, \dots, y_{n-1}$ — координаты в $\mathbb{C}^n$, в которых хорошая тройка имеет вид $L = (x, g(x, y) = 0, \mathbb{C}^n)$. Согласно п. 2, ее версальную деформацию можно взять в виде

$$L_\lambda = (x + \lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_\mu e_\mu, g(x, y) = 0, \mathbb{C}^n).$$

Этой деформации отвечает семейство краевых ростков, ограничение которого на край является краевой деформацией ростка $g|_{x=0}$.

ТЕОРЕМА 1. *Бифуркационная диаграмма хорошей тройки является краевой бифуркационной диаграммой соответствующей краевой особенности.*

В частности, для тройки $(x, x^2 + y^5 = 0, \mathbb{C}^2)$ типа H_3 соответствующая краевая деформация — семейство

$$G_H^0(y, \lambda) = (\lambda_3 y^3 + \lambda_2 y^2 + \lambda_1 y + \lambda_0)^2 + y^5,$$

и бифуркационная диаграмма этой критической точки является краевой бифуркационной диаграммой особенности A_4 , отвечающей краевой особенности F_4^4 .

Критическая точка типа $I_2(p)$, $p \geq 5$, может быть задана тройкой $(x, (x + y^2)^2 + y^p = 0, \mathbb{C}^2)$. Соответствующая краевая деформация — семейство

$$G_I^0(y, \lambda) = (y^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_1 y + \lambda_0)^2 + y^p,$$

и соответствующая бифуркационная диаграмма — краевая бифуркационная диаграмма особенности A_3 , отвечающая краевой особенности B_{p-1}^3 .

Как показано в [4], бифуркационная диаграмма критической точки типа H_3 (соответственно $I_2(p)$) аналитически тривиальна вдоль страта $\mu = \text{const}$ и λ_3 (соответственно λ_2) — параметр вдоль этого страта.

ТЕОРЕМА 2. *Краевая бифуркационная диаграмма особенности A_4 (соответственно A_3), отвечающая краевой особенности F_4^4 (соответственно B_{p-1}^3), диффеоморфна многообразию нерегулярных орбит группы H_3 (соответственно $I_2(p)$), умноженному на комплексную прямую.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Функц. анализ и его прил., **6**, вып. 4, 3–25 (1972).
2. Арнольд В. И. УМН, **33**, вып. 5, 91–105 (1978).
3. Щербак О. П. УМН, **43**, вып. 3, 125–160 (1988).
4. Ляшко О. В. Функц. анализ и его прил., **17**, вып. 3, 28–36 (1983).
5. Щербак И. Г. Краевые особенности с простым разложением. Труды семинара им. И. Г. Петровского, вып. 15, 1991, с. 55–69.
6. Арнольд В. И., Васильев Б. А., Горюнов В. В., Ляшко О. В. Особенности. II. Классификация и приложения. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 39, ВИНТИ, 1989.

Тель-Авивский университет

Поступило в редакцию
2 февраля 2000 г.