Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Агранович, Спектральные задачи для системы Дирака со спектральным параметром в локальных граничных условиях, *Функц. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 3, 1–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa254>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 12:01:00

УДК 517.98

Спектральные задачи для системы Дирака со спектральным параметром в локальных граничных условиях*

© 2001. М. С. АГРАНОВИЧ

1. Мотивировка и краткое описание основных результатов. Стационарная система Дирака для свободной частицы записывается в виде

$$[-i\hbar\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + mc^2\beta - \mathcal{E}]w(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь m — масса частицы, $\mathcal{E}$ — ее энергия, c — скорость света; $\boldsymbol{\alpha}$ — «вектор» из 4×4 -матриц Дирака α_j ($j = 1, 2, 3$). Удобно разбить их на 2×2 -блоки; блоки на главной диагонали равны 0, а блоки вдоль побочной диагонали одинаковы и равны соответственно матрицам Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Матрица β — блочно-диагональная, с блоками E и $-E$ на главной диагонали, где $E = E_2$ — единичная 2×2 -матрица.

Матрицы Паули эрмитовы и обладают свойствами

$$\sigma_j^2 = E, \quad \sigma_j \sigma_k = -\sigma_k \sigma_j \quad (j \neq k). \quad (1.3)$$

Если частица с зарядом e находится в электромагнитном поле с магнитным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ и электрическим потенциалом $\varphi(\mathbf{r})$, то система принимает вид

$$[\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\hbar\nabla - e\mathbf{A}(\mathbf{r})) + mc^2\beta - \mathcal{E} + e\varphi(\mathbf{r})]w(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.4)$$

Ср., например, [1, §113].

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ со *связной* 2-мерной границей Γ . Мы рассмотрим нестандартные спектральные задачи для систем (1.1) и (1.4) в Ω со спектральным параметром в граничном условии на Γ , введенные и рассмотренные в [2] и [3–5] (см. также ссылки в этих работах). Для записи этого граничного условия удобно ввести 2×2 -матрицу

$$a(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & -\xi_3 \end{pmatrix} = \sum_j \sigma_j \xi_j; \quad (1.5)$$

здесь и дальше мы позволяем себе писать скалярные множители после матриц. Запишем вектор-функцию w в виде столбца $(u_1, u_2, v_1, v_2)'$, затем обозначим столбец $(u_1, u_2)'$ через u и столбец $(v_1, v_2)'$ через v . Далее, обозначим единичный вектор внешней нормали в точке x границы через $\nu = \nu(x)$. Тогда интересующее нас граничное условие запишется в виде

$$ia(\nu)v^+ = \lambda u^+ \quad \text{на } \Gamma, \quad (1.6)$$

*Работа поддержана грантом РФФИ 01-01-00284.

где λ — спектральный параметр, а u^+ и v^+ — значения функций u и v на границе. Структура условия (1.6) математически в известной мере объясняется структурой формулы Грина для системы (1.1) (см. ниже п. 5). В работах [2–5] предложено использовать (в теории так называемой « R -матрицы»¹⁾) ортонормированный базис на Γ из граничных значений u^+ собственных функций этой задачи. Она рассмотрена там с физической точки зрения; при этом в общем случае постулируются дискретность спектра и полнота собственных функций. В случае когда Γ — сфера и возможно разделение переменных, они указываются в явном виде.

В предлагаемой статье при дополнительных предположениях, включающих *бесконечную гладкость поверхности Γ и потенциалов*, показывается, что упомянутые задачи действительно имеют дискретный спектр²⁾, но с двумя точками накопления собственных значений, 0 и ∞ . Части u^+ собственных функций принадлежат $C^\infty(\Gamma)$, и из них можно составить ортонормированный базис в $L_2(\Gamma)$, остающийся безусловным базисом во всех соболевских L_2 -пространствах $H^t(\Gamma)$, $t \in \mathbb{R}$. Части v^+ собственных функций обладают аналогичными свойствами. Мы указываем также асимптотику собственных значений задачи, стремящихся к 0 и к бесконечности.

Наш план состоит в следующем. Мы сначала заменим два из четырех уравнений Дирака двумя уравнениями второго порядка относительно только u или только v ; это уравнения Гельмгольца в случае системы (1.1) и уравнения типа Шрёдингера в случае системы (1.4). Новая система из четырех уравнений эквивалентна исходной на решениях, бесконечно гладких в $\bar{\Omega}$. (Рассматривать решения в соболевских пространствах фиксированных порядков неудобно.) Одно из двух других дополнительных предположений, которые мы сделаем, состоит в отсутствии нетривиальных решений у однородной задачи Дирихле для только что упомянутых уравнений второго порядка. Оно позволит свести преобразованную задачу к спектральному уравнению относительно u^+ с некоторым ПДО (псевдодифференциальным оператором) L первого порядка на Γ . Это сведение будет эквивалентным на бесконечно гладких функциях. Оператор L не является эллиптическим; тем не менее, на бесконечно гладких функциях он имеет обратный оператор L^{-1} — тоже неэллиптический ПДО первого порядка. И, наконец, некоторая линейная комбинация операторов L и L^{-1} оказывается эллиптическим ПДО первого порядка, самосопряженным в $L_2(\Gamma)$. Отсюда и выводятся наши результаты.

Подробно мы рассматриваем случай системы (1.1); обобщения на случай системы (1.4) выводятся в п. 8.

Все это близко к ситуации со спектральными задачами для системы Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - ik\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + ik\mathbf{H} = 0, \quad (1.7)$$

предложенными в [6] и изученными в [7] и [8, §40]; см. также [9, п. 5.11]. Более точно, задача (1.1), (1.6) похожа на задачу для системы (1.7) в Ω с граничным условием

$$\lambda(\nu \times \mathbf{H}^+) - i\mathbf{E}_{\text{tg}}^+ = 0 \quad (1.8)$$

¹⁾ Это понятие не имеет ничего общего с понятием R -матрицы в работах по квантовому методу в обратной задаче рассеяния.

²⁾ Здесь и дальше с оговоркой: 0 — точка существенного спектра.

на Γ , хотя, конечно, эти задачи имеют разную специфику. У этих задач близкие и притом необычные спектральные свойства (включая наличие двух точек накопления собственных значений), выявляемые близкими средствами.

В п. 6 указывается простой абстрактный пример оператора с двумя точками накопления собственных значений.

В п. 9 мы укажем обобщения на любые размерности $n \geq 2$ и другие числа $2m$ неизвестных функций. Чтобы легко получить эти обобщения, мы в ближайших пунктах будем пользоваться не первым, а вторым представлением матрицы $a(\xi)$ в (1.5) вместе с равенствами (1.3), хотя можно было бы, конечно, пользоваться первым представлением. В п. 10 предлагаются еще две спектральные задачи для системы (1.1), аналогичные двум другим задачам для системы Максвелла из [6–9]. Из этих двух новых задач в первой, внешней, задаче с аналогичным (1.6) граничным условием обнаруживаются две точки накопления собственных значений, а в другой задаче, задаче сопряжения, в отличие от аналогичной задачи для системы Максвелла, имеется только одна точка накопления спектра.

В п. 11 мы проверяем эллиптичность исходной спектральной задачи при $\lambda \neq 0$ и приводим соответствующие априорные оценки.

В п. 12 сделано замечание о спектральной задаче для уравнения Шрёдингера со спектральным параметром в граничном условии; это более простой «нерелятивистский» аналог задачи (1.4), (1.6) (см. [4, 5] и приведенные там ссылки).

Точные формулировки основных результатов содержатся в теоремах 1–5. Комбинации обобщений, конечно, возможны, но мы их не рассматриваем для экономии места. Не останавливаемся мы также на анализе обобщений на системы типа Дирака с переменными старшими коэффициентами на многообразиях (ср. [10, 11]).

Приношу искреннюю благодарность Р. Шмытковскому, сообщившему мне о спектральных задачах из [2–5]; я очень признателен ему за обстоятельное обсуждение этих задач, а также результатов настоящей работы.

2. Преобразование системы (1.1). Перепишем эту систему в виде

$$a(D)u(x) - b_1v(x) = 0, \quad a(D)v(x) - b_2u(x) = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $D = (D_1, D_2, D_3)$, $D_j = -i\partial_j$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$; $a(D)$ — матричный оператор с символом $a(\xi)$; b_j — вещественные постоянные. Эта система эллиптика, так как $a(D)$ — эллиптический оператор. Легко проверяется, что $-a(D)^2$ — оператор Лапласа Δ (умноженный на единичную матрицу; в дальнейшем такие замечания явно не делаются, но подразумеваются):

$$a(D)^2 = \left(\sum \sigma_j D_j \right) \left(\sum \sigma_k D_k \right) = -\Delta \quad (2.2)$$

в силу (1.3). Аналогично проверяется, что $a(\nu)^2$ — единичная матрица. Отметим, что если умножить (1.6) на $ia(\nu)$ и принять за спектральный параметр $\mu = -1/\lambda$, то функции u и v меняются ролями.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В физической постановке существенно, что система (1.1) сохраняет свой вид при поворотах системы координат. Так как при таком повороте оператор $a(D)$ очевидным образом преобразуется, то подразумевается, что это преобразование компенсируется соответствующим унитарным преобразованием

вектор-функций u и v . Последние преобразования образуют представление группы вращений в $\mathbb{R}^3$. См., например, [12, часть I]. Граничное условие (1.6) при таких преобразованиях не меняется.

До п. 7 мы будем считать, что выполнено

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. $b_1 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$.

При этом предположении из системы (2.1) стандартным образом исключается одна из неизвестных (вектор)-функций u , v : например, применяя оператор $a(D)$ к первой системе в (2.1) и используя вторую систему в (2.1), получаем

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \quad \text{где } k^2 = b_1 b_2; \quad (2.3)$$

здесь $k > 0$ или $k = i|k|$, но $k \neq 0$. Объединяя систему (2.3) с первой системой в (2.1), получаем систему

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \quad a(D)u(x) - b_1 v(x) = 0. \quad (2.4)$$

Аналогичным образом из (2.1) получается система

$$\Delta v(x) + k^2 v(x) = 0, \quad a(D)v(x) - b_2 u(x) = 0. \quad (2.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Системы (2.1), (2.4) и (2.5) эквивалентны на бесконечно гладких в $\overline{\Omega}$ функциях.

Действительно, достаточно, например, проверить, что из (2.4) следует вторая система в (2.1). Применяем оператор $a(D)$ ко второй системе в (2.4) и складываем полученную систему с первой системой; остается поделить результат на $-b_1$. $\square$

Отметим, что мы уже полностью использовали предположение 1. При переходах от одной системы к другой «расходуется» гладкость, но для дальнейшего достаточно, что переходы являются эквивалентными на бесконечно гладких в $\overline{\Omega}$ функциях.

Задача Дирихле

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u = u^+ \quad \text{на } \Gamma \quad (2.6)$$

эллипична и, если k чисто мнимое, имеет одно и только одно решение, например, в $C^\infty(\overline{\Omega})$, если $u^+ \in C^\infty(\Gamma)$. Но имеется последовательность положительных $k = k_j \uparrow \infty$, для которых $-k^2$ — собственное значение оператора Лапласа при однородном условии Дирихле $u^+ = 0$. Эти значения придется исключить из рассмотрения:

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Однородная задача Дирихле (2.6) с $u^+ = 0$ не имеет нетривиальных решений.

При этом предположении любое решение u , v системы (2.4) однозначно строится по u^+ : сначала u определяется как решение задачи Дирихле для первой системы в (2.4), затем v определяется из второй системы. Аналогично решение системы (2.5) однозначно строится по v^+ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что граничная задача для системы (2.4) с заданием на Γ только u^+ не эллипична. Действительно, при проверке условия Шапиро–Лопатинского младшие члены отбрасываются. Если заменить k^2 и b_1 нулями, то остается система $a(D)u = 0$ и видно, что граничных условий слишком много. Не эллипична также задача с заданием u^+ для системы (2.1), что снова сразу видно, если заменить b_1 и b_2 нулями.

Эллиптические задачи для системы (2.1) с локальными граничными условиями существуют, и примером может служить задача (2.1), (1.6) с ненулевым вещественным λ . Мы отложим проверку этого до п. 11. По поводу существования и несуществования эллиптических задач с локальными граничными условиями для других систем типа Дирака см. [11].

3. Сведение спектральной задачи к уравнению на границе. Обозначим через $\Phi(x)$ фундаментальное решение

$$\Phi(x) = -(4\pi)^{-1} e^{ik|x|} |x|^{-1} \quad (3.1)$$

уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$. Введем потенциал простого слоя

$$\mathcal{A}\psi(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x-y) \psi(y) dS_y. \quad (3.2)$$

Здесь удобно считать $\Phi(x)$ скалярной 2×2 -матрицей и ψ вектором-столбцом высоты 2. Обозначим через $\mathcal{A}\psi$ сужение этого потенциала на Γ . Эти операторы зависят от k . Известно (см., например, [8, §36], или [9, п. 5.7]), что $\mathcal{A}$ — эллиптический ПДО порядка -1 и что при предположении 2 существует (неограниченный) обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$ — эллиптический ПДО порядка 1. Для решений задачи Дирихле (2.6) справедлива формула

$$u = \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}u^+. \quad (3.3)$$

Для решений системы (2.4) получается соотношение

$$v^+ = b_1^{-1} [a(D)\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}u^+]^+, \quad (3.4)$$

где $[\dots]^+$ — операция сужения на границу. Аналогично для решений системы (2.5) мы имеем

$$u^+ = b_2^{-1} [a(D)\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}v^+]^+. \quad (3.5)$$

Положим

$$M\psi = i[a(D)\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\psi]^+. \quad (3.6)$$

Из (3.4)–(3.6) вытекает, что

$$M^2 = -k^2 I \quad (3.7)$$

на бесконечно гладких функциях на Γ , где I — единичный оператор. Положим также

$$Lu^+ = ia(\nu)v^+ = b_1^{-1}a(\nu)Mu^+. \quad (3.8)$$

Спектральное граничное условие (1.6) принимает вид

$$Lu^+ = \lambda u^+. \quad (3.9)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Задача (2.4), (1.6) в $C^\infty(\bar{\Omega})$ эквивалентна уравнению (3.9) в $C^\infty(\Gamma)$.

Действительно, пусть u^+ — решение уравнения (3.9). Определим u формулой (3.3) и найдем v из второй системы в (2.4). Из формул (3.4), (3.6) и (3.8) видно, что выполняется условие (1.6), так что получается решение исходной спектральной задачи. $\square$

4. L и M как псевдодифференциальные операторы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Операторы L и M — ПДО первого порядка. Они не эллиптически.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как легко подсчитать, используя (1.5) и (1.3),

$$ia(\nu)a(D) = a(\nu)a(\partial) = \partial_\nu + c(\partial), \quad (4.1)$$

где ∂_ν — производная в направлении внешней нормали и

$$c(\partial) = \sum_{j \neq k} \sigma_j \sigma_k \nu_j \partial_k = \sum_{j > k} \sigma_j \sigma_k (\nu_j \partial_k - \nu_k \partial_j). \quad (4.2)$$

В круглых скобках стоят производные по направлениям, ортогональным нормали ν . Поэтому весь оператор $c(\partial)$ действует по касательным к границе направлениям.

Теперь воспользуемся известными граничными свойствами потенциала $\mathcal{A}\psi$. При переходе на границу он остается непрерывным вместе с производными от него по касательным направлениям, а нормальная производная имеет предел

$$[\partial_\nu \mathcal{A}\psi]^+ = (-\frac{1}{2}I + B')\psi, \quad (4.3)$$

где B' — интегральный оператор на Γ с ядром $K(x, y)$, получаемым из ядра оператора A дифференцированием по нормали $\nu(x)$. См., например, [13, гл. 2]. Мы видим, что

$$L = b_1^{-1} [(-\frac{1}{2}I + B')A^{-1} + c(\partial)] \quad \text{и} \quad M = b_1 a(\nu)L. \quad (4.4)$$

Оператор B' в случае уравнения Гельмгольца на гладкой поверхности — ПДО порядка -1 (см., например, [8, §37], или [9, п. 5.8]). Мы заключаем, что L и M — ПДО первого порядка на Γ .

Теперь соотношение (3.7) выглядит необычно. Из него, в частности, следует, что главный символ ПДО M^2 тождественно равен 0. Приведем простую независимую проверку этого факта.

Фиксируя точку x на Γ , можно перенести в нее начало координат и предположить, что нормаль $\nu(0)$ направлена вдоль третьей координатной оси, так что $\nu_1 = \nu_2 = 0$ и $\nu_3 = 1$ (см. замечание 1). Считая x_1 и x_2 локальными координатами на Γ вблизи рассматриваемой точки, можно вычислить главный символ оператора A^{-1} в самой этой точке (см., например, [14, п. 3.4]); он равен $-2|\xi'|$, где $\xi' = (\xi_1, \xi_2)$. Поэтому главный символ оператора M оказывается следующим:

$$\sigma(M) = \sigma_3 |\xi'| + i \sum_{k \neq 3} \sigma_k \xi_k. \quad (4.5)$$

Вычислим квадрат этой матрицы, используя соотношения (1.3):

$$\sigma(M^2) = |\xi'|^2 + i|\xi'| \sum_{k \neq 3} (\sigma_3 \sigma_k + \sigma_k \sigma_3) \xi_k - \sum_{j, k \neq 3} \sigma_j \sigma_k \xi_j \xi_k = 0.$$

Получилась нулевая матрица.

Отсюда, в частности, следует, что определители главных символов ПДО M и L (см. (3.8)) — тождественные нули. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Оператор L имеет обратный оператор

$$L^{-1} = -b_2^{-1} M a(\nu) = -b_2^{-1} b_1 a(\nu) L a(\nu) \quad (4.6)$$

на бесконечно гладких функциях; это также неэллиптический ПДО первого порядка на Γ . ПДО $S = b_1 L - b_2 L^{-1} = a(\nu)M + M a(\nu)$ эллиптичен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение очевидно в силу соотношений (3.7), (3.8) и предложения 3. Второе следует из формул для главных символов ПДО b_1L и b_2L^{-1} : в начале той же, что и выше, системы локальных координат

$$\sigma(b_1L) = |\xi'| + i \sum_{k \neq 3} \sigma_3 \sigma_k \xi_k \quad \text{и} \quad \sigma(b_2L^{-1}) = -|\xi'| + i \sum_{k \neq 3} \sigma_3 \sigma_k \xi_k \quad (4.7)$$

в силу формул (4.4)–(4.6) и (1.3). Вычитая второе выражение из первого, получаем эллиптический символ $2|\xi'|$. $\square$

Конечно, $b_1L - b_2L^{-1}$ — не единственная линейная комбинация ПДО L и L^{-1} , являющаяся эллиптическим оператором.

5. Спектральные свойства операторов S и L .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 (ср. [3–5]). *Оператор L является формально самосопряженным: на бесконечно гладких функциях ψ^1, ψ^2*

$$(L\psi^1, \psi^2) = (\psi^1, L\psi^2).$$

Здесь скобками обозначено скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проще всего воспользоваться формулой Грина. Пусть (u^1, v^1) и (u^2, v^2) — два решения системы (2.1), бесконечно гладкие в $\bar{\Omega}$. Имеем (опуская знаки $+$ у граничных значений)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(D)u^1 \cdot \overline{v^2} dx &= \int_{\Omega} u^1 \cdot \overline{a(D)v^2} dx - i \int_{\Gamma} a(\nu)u^1 \cdot \overline{v^2} dS, \\ \int_{\Omega} a(D)v^1 \cdot \overline{u^2} dx &= \int_{\Omega} v^1 \cdot \overline{a(D)u^2} dx - i \int_{\Gamma} a(\nu)v^1 \cdot \overline{u^2} dS, \end{aligned}$$

так как $a(D)$ — формально самосопряженный оператор. Отсюда, используя равенства (2.1) и формулу (3.8), получаем

$$\begin{aligned} b_1 \int_{\Omega} v^1 \cdot \overline{v^2} dx &= b_2 \int_{\Omega} u^1 \cdot \overline{u^2} dx + \int_{\Gamma} u^1 \cdot \overline{Lu^2} dS, \\ b_2 \int_{\Omega} u^1 \cdot \overline{u^2} dx &= b_1 \int_{\Omega} v^1 \cdot \overline{v^2} dx - \int_{\Gamma} Lu^1 \cdot \overline{u^2} dS. \end{aligned}$$

Остается сложить полученные равенства. $\square$

Упомянем второе возможное доказательство. Известно, что $(-\frac{1}{2}I + B')A^{-1}$ — формально самосопряженный оператор в $L_2(\Gamma)$ (см. [8, §37], или [9, п. 5.8]; это следует из формальной самосопряженности оператора Гельмгольца и формулы Грина для него). В силу (4.4) достаточно проверить формальную самосопряженность оператора $c(\partial)$. Для этого записываем поверхность локально, скажем, в виде $x_3 = f(x_1, x_2)$ и вычисляем оператор, формально сопряженный к дифференциальному оператору $\nu_j \partial_k - \nu_k \partial_j$ при $j \neq k$ в локальных координатах (x_1, x_2) на Γ . Хотя он имеет переменные коэффициенты, получается тот же оператор с обратным знаком. Остается использовать (4.2) и (1.3).

Из предложения 5 следует, что оператор L^{-1} тоже формально самосопряженный; поэтому то же верно для S . Но S — эллиптический оператор первого порядка; это позволяет рассматривать его как самосопряженный оператор в $L_2(\Gamma)$ с областью определения $H^1(\Gamma)$, полуограниченный снизу, поскольку его главный символ положительно определен. Спектр этого оператора дискретен и состоит из

собственных значений конечной кратности, стремящихся к ∞ . Его собственные функции принадлежат $C^\infty(\Gamma)$, и из ортонормированных базисов в собственных подпространствах составляется ортонормированный базис в $L_2(\Gamma)$, остающийся безусловным базисом во всех соболевских пространствах $H^t(\Gamma)$. Собственные значения $\mu_j(S)$, занумерованные в порядке неубывания с учетом кратностей, имеют правильную асимптотику

$$\mu_j = Cj^{1/2} + O(1) \quad (5.1)$$

с положительной постоянной C , которая выражается через главный символ. (См., например, [15, п. 6.1] и приведенные там ссылки.)

Рассмотрим теперь собственное подпространство $X_\mu(S)$ оператора S , отвечающее фиксированному собственному значению μ . Оно состоит из бесконечно гладких функций. Так как операторы L и S перестановочны, то это подпространство инвариантно относительно L .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Собственные значения λ оператора L в $X_\mu(S)$ — это корни λ_1 и λ_2 квадратного уравнения $\mu = b_1\lambda - b_2\lambda^{-1}$. Если они различны, то $X_\mu(S)$ — ортогональная сумма собственных подпространств $X_{\lambda_1}(L)$ и $X_{\lambda_2}(L)$, имеющих одинаковую размерность. Если же корни совпадают, то $X_\mu(S) = X_\lambda(L)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор L является самосопряженным в $X_\mu(S)$ и имеет там ортонормированный базис из собственных функций. Если $L\psi = \lambda_1\psi$, то $L^{-1}\psi = \lambda_1^{-1}\psi$, $S\psi = \mu\psi$, где $\mu = b_1\lambda_1 - b_2\lambda_1^{-1}$, и, кроме того, $L[a(\nu)\psi] = \lambda_2[a(\nu)\psi]$ (см. (4.6)), где λ_2 — второй корень уравнения $b_1\lambda - b_2\lambda^{-1} = \mu$. Если эти корни различны, то отображение $\psi \mapsto a(\nu)\psi$ — изоморфизм между $X_{\lambda_1}(L)$ и $X_{\lambda_2}(L)$ (а если корни совпадают, то это автоморфизм в $X_\lambda(L) = X_\mu(S)$). $\square$

ТЕОРЕМА 1. *Спектр оператора L состоит из собственных значений конечной кратности. Они образуют две серии: неубывающие по модулю собственные значения, имеющие с учетом кратности асимптотику $C_1(2j)^{1/2} + O(1)$, и невозрастающие по модулю собственные значения, имеющие с учетом кратности асимптотику $C_2(2j)^{-1/2} + O(j^{-1})$, где $C_1 = C/b_1$ и $C_2 = -b_2/C$. Соответствующие собственные функции принадлежат $C^\infty(\Gamma)$, и из них можно составить ортонормированный базис в $L_2(\Gamma)$, который остается безусловным базисом во всех соболевских пространствах $H^t(\Gamma)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементарный подсчет с подстановкой асимптотики (5.1) в формулу для корней квадратного уравнения $b_1\lambda - b_2\lambda^{-1} = \mu$ показывает, что L имеет две серии собственных значений с асимптотиками, указанными в формулировке. Остается заметить, что если λ отлично от собственных значений оператора L , то уравнение $(L - \lambda I)\varphi = \psi \in L_2(\Gamma)$ имеет решение

$$\varphi = [(b_1L - b_2L^{-1}) - (b_1\lambda - b_2\lambda^{-1})]^{-1}[b_1I + b_2\lambda^{-1}L^{-1}]\psi.$$

Здесь справа на ψ действует ограниченный оператор. $\square$

В частности, отсюда и из общеизвестных теорем вложения следует, что ряд Фурье по собственным функциям от достаточно гладкой функции (из $H^t(\Gamma)$ при $t > 1$) сходится к ней равномерно, допускает почленное дифференцирование (при $t > 2$) и т. д.

Структура оператора L уточняется теперь следующим образом. Пространство $H^t(\Gamma)$ при любом t есть прямая сумма двух подпространств $H_+^t(\Gamma)$ и $H_-^t(\Gamma)$

(при $t = 0$ — ортогональная сумма). Первое есть замыкание в $H^t(\Gamma)$ линейной оболочки собственных функций этого оператора, отвечающих собственным значениям, стремящимся к ∞ . Второе — замыкание линейной оболочки собственных функций, отвечающих остальным собственным значениям, стремящимся к 0. Обе шкалы инвариантны относительно L . Во второй L действует как оператор порядка -1 , т.е. как ограниченный оператор из $H_-^t(\Gamma)$ в $H_-^{t+1}(\Gamma)$; в любом $H_-^t(\Gamma)$ это компактный оператор. В первой же шкале L действует как оператор порядка 1 , т.е. как ограниченный оператор из $H_+^{t+1}(\Gamma)$ в $H_+^t(\Gamma)$. В любом $H_+^t(\Gamma)$ это неограниченный оператор с компактным обратным, он имеет плотную область определения $H_+^{t+1}(\Gamma)$ и замкнут. При этом сужения оператора L на $H_{\pm}^0(\Gamma)$ — самосопряженные операторы.

6. Элементарная модель. Ситуация, которую мы рассматриваем, как и аналогичная ситуация с упомянутыми выше спектральными задачами для системы Максвелла [7–9], несколько парадоксальна. В настоящем пункте мы построим пример с явно заданными операторами A, B, C, D в гильбертовом пространстве, которые обладают следующими свойствами:

1. A — неограниченный оператор, такой, что $A^2 = -I$.
2. B — ограниченный оператор, такой, что $B^2 = I$.
3. $C = BA$ — неограниченный оператор с двумя точками накопления спектра, 0 и ∞ , имеющий неограниченный обратный C^{-1} ; C имеет ортонормированный базис из собственных функций. Равенства $C^{-1}C = I$ и $CC^{-1} = I$ справедливы на областях определения соответственно операторов C и C^{-1} .
4. $D = C - C^{-1}$ — самосопряженный неограниченный оператор с компактным обратным.

Здесь A — аналог оператора M , B — аналог оператора умножения на матрицу $a(\nu)$, C — аналог оператора L и D — аналог оператора S ; b_1 и b_2 взяты равными 1. (В других пунктах буквы A, C и D имеют другой смысл.)

Пусть H_1 — (комплексное сепарабельное) гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_j\}$ ($j = 1, 2, \dots$) и H — гильбертово пространство столбцов $w = (u, v)'$, где $u, v \in H_1$. Ортонормированный базис в H образуют векторы $e_{j0} = (e_j, 0)'$ и $e_{0,k} = (0, e_k)'$. Подпространство, натянутое на два вектора e_{l0} и e_{0l} , обозначим через $H^{(l)}$. Для всех наших операторов это будут инвариантные подпространства, и каждый оператор мы зададим последовательностью его матриц в $H^{(l)}$ в базисе e_{l0}, e_{0l} . Пусть $\{\gamma_l\}$ — последовательность чисел, больших 1, монотонно стремящаяся к ∞ . Наши операторы A, B, C, D будут иметь соответственно следующие матрицы A_l, B_l, C_l, D_l в $H^{(l)}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\gamma_l^{-1} \\ \gamma_l & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma_l & 0 \\ 0 & -\gamma_l^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma_l - \gamma_l^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma_l - \gamma_l^{-1} \end{pmatrix}.$$

Как легко видеть, $A_l^2 = -E$ и $B_l^2 = E$, $C_l = B_l A_l$, $D_l = C_l - C_l^{-1}$; поэтому выполнены все нужные соотношения для A, B, C и D . При этом оператор B ограничен, а D имеет компактный обратный, замкнут и имеет плотную область определения. Сужение оператора C на подпространство векторов вида $(0, v)'$ компактно, а сужение этого оператора на подпространство векторов вида $(u, 0)'$ замкнуто, имеет плотную область определения и компактный обратный; эти два подпространства, конечно, инвариантны относительно C . Оператор D и сужения

оператора C на только что указанные подпространства являются самосопряженными операторами.

Мы можем, в частности, взять $\{\gamma_j\}$ с правильной степенной асимптотикой. Все эти операторы можно определить как «ряды типа Фурье» на окружности (изменив только способ нумерации базисных экспонент; см. [16] или [15, п. 2.4]). Аналогичный пример можно построить с оператором на торе любой размерности. Поэтому можно позаботиться о том, чтобы это были ПДО.

7. Обсуждение ограничений, наложенных на b_j . В случае $b_1 = b_2 = 0$ спектральные свойства задачи (2.1), (1.6) патологичны: система (2.1) распадается на независимые системы для u и v , и если мы имеем нетривиальное решение (u, v) спектральной задачи с ненулевым собственным значением, то можем свободно менять последнее, умножая на произвольный постоянный множитель, скажем, функцию v . Но этот случай, по-видимому, не имеет физического смысла.

Покажем теперь, что при $b_1 \neq 0$ и $b_2 = 0$ полученные выше результаты в известной мере сохраняются.

Система (2.1) принимает вид

$$a(D)u - b_1v = 0, \quad a(D)v = 0, \quad (7.1)$$

и на бесконечно гладких в $\bar{\Omega}$ функциях она эквивалентна системе

$$\Delta u = 0, \quad a(D)u - b_1v = 0. \quad (7.2)$$

Действительно, из (7.1) следует первая система в (7.2), а из (7.2) следует вторая система в (7.1). Задача Дирихле для уравнения Лапласа однозначно разрешима, и для решений мы снова имеем $u = \mathcal{A}^{-1}u^+$ (где теперь $k = 0$), что приводит к формуле (3.4). Определим оператор M формулой (3.6). Переходя в (3.7) к пределу при $k \rightarrow 0$, получаем

$$M^2 = 0 \quad (7.3)$$

на бесконечно гладких функциях. Определим оператор L снова формулой (3.8) и запишем граничное условие в виде (3.9). Это уравнение эквивалентно спектральной задаче (7.1), (1.6) на бесконечно гладких функциях. Действительно, если u^+ — решение этого уравнения, то определяем u как решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа с этим граничным значением и находим v из второго равенства в (7.2); получается решение спектральной задачи.

Положим теперь

$$N = b_1^{-1}Ma(\nu), \quad S = b_1L + b_1N \quad (7.4)$$

(можно было бы положить $S = L + N$). Тогда на бесконечно гладких функциях

$$LN = NL = 0, \quad LS = SL, \quad NS = SN. \quad (7.5)$$

При этом оператор $S = a(\nu)M + Ma(\nu)$ эллиптичен: его главный символ вычисляется так же, как раньше. Кроме того, L и N — формально самосопряженные операторы, так что S — самосопряженный оператор с дискретным спектром и правильной асимптотикой вида (5.1) собственных значений.

Из (7.5) следует, что любое собственное подпространство оператора S инвариантно относительно L и N . При этом если ψ — собственная функция оператора S с ненулевым собственным значением μ , то либо $b_1L\psi = \mu\psi$ и $N\psi = 0$, либо $b_1N\psi = \mu\psi$ и $L\psi = 0$. (Действительно, если, например, $b_1L\psi = \kappa\psi$, $\kappa \neq 0$, то

$N\psi = 0$, откуда $\kappa = \mu$.) Но операторы L и N подобны; поэтому у них одинаковые наборы собственных значений. Отсюда делаем следующие выводы.

ТЕОРЕМА 2. *При $b_1 \neq 0$, $b_2 = 0$ оператор L имеет ортонормированный базис в $L_2(\Gamma)$ из бесконечно гладких собственных функций, остающийся безусловным базисом во всех $H^l(\Gamma)$. Этот оператор имеет бесконечнократное собственное значение 0, остальные собственные значения имеют конечные кратности и стремятся к бесконечности. Занумерованные в порядке убывания с учетом кратности, они имеют асимптотику*

$$\lambda_j = (C/b_1)(2j)^{1/2} + O(1). \quad (7.6)$$

При $k > 0$ мы предполагали, что задача Дирихле для уравнения Гельмгольца с этим k однозначно разрешима. Поясним теперь, что если это условие нарушено, то собственные функции задачи не образуют полной системы в $L^2(\Gamma)$. Действительно, допустимые значения u^+ , как известно, ортогональны к нормальным производным $\partial_\nu w^+$ решений w однородной задачи Дирихле. Поэтому замкнутая линейная оболочка собственных функций имеет дефект в $L_2(\Gamma)$, по крайней мере конечномерный. Мы не выясняли, дискретен ли спектр при этих k и действительно ли дефект конечномерен. Отметим, однако, что очень малые $k > 0$ заведомо не исключительны и что для нужд физики поверхность Γ можно выбирать, этим можно в принципе воспользоваться, чтобы «сойти» со спектра задачи Дирихле.

8. Случай системы (1.4). Незначительно обобщая систему (1.4), рассмотрим систему

$$[a(D) - a(c(x))]u(x) = b_1(x)v(x), \quad [a(D) - a(c(x))]v(x) = b_2(x)u(x), \quad (8.1)$$

где $c(x) = (c_1(x), c_2(x), c_3(x))$, $c_j(x)$ и $b_k(x)$ — бесконечно гладкие в $\overline{\Omega}$ вещественные скалярные функции и $a(c(x)) = \sum \sigma_j c_j(x)$. Примем, что выполнено

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1'. $b_1(x) \neq 0$ и $b_2(x) \neq 0$ в $\overline{\Omega}$.

Тогда аналогично предложению 1 проверяется, что система (8.1) эквивалентна каждой из следующих систем (8.2), (8.3) на бесконечно гладких функциях:

$$\mathcal{L}_1 u(x) = 0, \quad [a(D) - a(c(x))]u(x) = b_1(x)v(x), \quad (8.2)$$

$$\mathcal{L}_2 v(x) = 0, \quad [a(D) - a(c(x))]v(x) = b_2(x)u(x), \quad (8.3)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j u(x) = & -[a(D) - a(c(x))]^2 u(x) \\ & + [a(D)b_j(x)]b_j^{-1}(x)[a(D) - a(c(x))]u(x) + b_1(x)b_2(x)u(x). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Как легко видеть, это операторы с лапласианом Δ в главной части. Сделаем

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2'. *Задачи Дирихле*

$$\mathcal{L}_j u = 0 \text{ в } \overline{\Omega}, \quad u^+ = 0 \text{ на } \Gamma \quad (j = 1, 2) \quad (8.5)$$

не имеют нетривиальных решений.

Тогда аналогичные задачи с неоднородным граничным условием $u = u^+$ на Γ однозначно разрешимы. Следовательно, не имеют нетривиальных решений формально сопряженные однородные задачи Дирихле $\mathcal{L}_j^* u = 0$ в Ω , $u^+ = 0$ на Γ и тем более однородные задачи Коши $\mathcal{L}_j^* u = 0$ в Ω , $u^+ = 0$ и $\partial_\nu u^+ = 0$ на Γ .

В свою очередь, отсюда следует (см. например, [17, п. 5.1]), что глобально существующим фундаментальные решения $\Phi_j(x, y)$ для уравнений $\mathcal{L}_j u(x) = 0$ ($x \in \overline{\Omega}$, $y \in \overline{\Omega}$, $x \neq y$). Это позволяет образовать потенциалы простого слоя

$$\mathcal{A}_j \psi(x) = \int_{\Gamma} \Phi_j(x, y) \psi(y) dS_y \quad (j = 1, 2) \quad (8.6)$$

и определить операторы $A_j \psi$ как сужения этих потенциалов на Γ .

Пусть $\Phi_0(x)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, определяемое формулой (3.1) с $k = 0$. Ясно, что $\Phi_j(x, y)$ совпадают с $\Phi_0(x - y)$ с точностью до слагаемых с особенностью (при $x = y$) порядка меньше, по крайней мере, на 1. Поэтому A_j — снова эллиптические ПДО порядка -1 и потенциалы $\mathcal{A}_j$ имеют такие же граничные свойства, как $\mathcal{A}$ (см. выше п. 4). Сделаем дополнительно

Предположение 3'. Коэффициенты уравнений $\mathcal{L}_j u = 0$ ($j = 1, 2$) могут быть гладко продолжены на $\mathbb{R}^3$ так, чтобы внешние однородные задачи Дирихле для них имели только тривиальные решения.

При этом условии операторы A_j имеют (неограниченные) обратные — эллиптические ПДО 1-го порядка; это проверяется так же, как в случае уравнения Гельмгольца (см. [8, §36] или [9, п. 5.7]). Для решений систем (8.2) и (8.3) получаются аналогичные (3.4) формулы

$$\begin{aligned} v^+ &= M_1 u^+, \quad \text{где } M_1 u^+ = [b_1^{-1}(x) a(D) \mathcal{A}_1 A_1^{-1} u^+]^+, \\ u^+ &= M_2 v^+, \quad \text{где } M_2 v^+ = [b_2^{-1}(x) a(D) \mathcal{A}_2 A_2^{-1} v^+]^+. \end{aligned} \quad (8.7)$$

В отличие от п. 4 мы включили множители $b_j^{-1}(x)$ и не включили множитель i в эти операторы. Ясно, что

$$M_1 M_2 = M_2 M_1 = I \quad (8.8)$$

на бесконечно гладких функциях. Положим

$$L_1 = i a(\nu) M_1. \quad (8.9)$$

Спектральная задача (8.1), (1.6) приводится к уравнению

$$L_1 u^+ = \lambda u^+, \quad (8.10)$$

и аналогично предложению 2 проверяется, что это приведение является эквивалентным на бесконечно гладких функциях ($u, v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $u^+ \in C^\infty(\Gamma)$). Оператор L_1 имеет на бесконечно гладких функциях обратный

$$L_1^{-1} = -i M_2 a(\nu). \quad (8.11)$$

Используя теперь формулу (4.1) и граничные свойства потенциалов $\mathcal{A}_j$, мы получаем формулы (ср. с (4.4))

$$L_1 = b_1^{-1}(x) [(-\frac{1}{2}I + B'_1) A_1^{-1} + c(\partial)], \quad (8.12)$$

$$L_1^{-1} = -a(\nu) b_2^{-1}(x) [(-\frac{1}{2}I + B'_2) A_2^{-1} + c(\partial)] a(\nu), \quad (8.13)$$

где B'_j — ПДО порядка -1 . Таким образом, L_1 , M_j и L_1^{-1} — ПДО 1-го порядка на Γ . Конечно, они не эллиптичны, это видно уже из (8.8) и подтверждается вычислением главных символов. В начале той же, что и раньше, системы локальных

координат

$$\sigma(L_1) = b_1^{-1}(0) \left[|\xi'| + i \sum_{k \neq 3} \sigma_3 \sigma_k \xi_k \right], \quad \sigma(L_1^{-1}) = b_2^{-1}(0) \left[-|\xi'| + i \sum_{k \neq 3} \sigma_k \sigma_3 \xi_k \right]. \quad (8.14)$$

Теперь надо подобрать эллиптическую линейную комбинацию операторов L_1 и L_1^{-1} . Мы сделаем это следующим образом:

$$S = \beta_1 L_1 - \beta_2 L_1^{-1}, \quad \text{где } \beta_j = \operatorname{sgn} b_j(x) \quad (8.15)$$

(такая возможность имелаась и при постоянных b_j). Проверим эллиптичность этого оператора. Для этого достаточно проверить эллиптичность символа

$$\delta_1 \sigma_3 |\xi'| + i \delta_2 \sum_{j \neq 3} \sigma_j \xi_j, \quad (8.16)$$

где $\delta_1 = |b_1^{-1}(0)| + |b_2^{-1}(0)|$ и $\delta_2 = |b_1^{-1}(0)| - |b_2^{-1}(0)|$. Возводим матрицу (8.16) в квадрат; с учетом (1.3) получаем $(\delta_1^2 - \delta_2^2) |\xi'|^2 E$ — эллиптический символ второго порядка, поскольку $\delta_1 > |\delta_2|$.

Матрица $a(c(x))$ эрмитова. Операторы L_j — формально самосопряженные: проверка этого аналогична доказательству предложения 5, нужно только заменить $a(D)$ на $a(D) - a(c(x))$ и оставить $b_j(x)$ под знаками интегралов по Ω . Значит, L_1^{-1} — тоже формально самосопряженный, а S — самосопряженный операторы. Главный символ оператора S остался положительно определенным, и его собственные значения имеют асимптотику вида (5.1). Теперь теорема 1 почти дословно обобщается:

ТЕОРЕМА 3. *Спектр оператора L_1 состоит из собственных значений конечной кратности. Они образуют две серии: неубывающие по модулю собственные значения, имеющие с учетом кратности асимптотику $C_1(2j)^{1/2} + O(1)$, и невозрастающие по модулю собственные значения, имеющие с учетом кратности асимптотику $C_2(2j)^{-1/2} + O(j^{-1})$, где $C_1 = \beta_1 C$ и $C_2 = -\beta_2/C$. Соответствующие собственные функции принадлежат $C^\infty(\Gamma)$, и из них можно образовать ортонормированный базис в $L_2(\Gamma)$, который остается безусловным базисом во всех соболевских пространствах $H^t(\Gamma)$.*

9. Обобщения результатов на другие размерности и другие числа неизвестных функций. Пусть теперь Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с бесконечно гладкой связной $(n-1)$ -мерной границей Γ . Чтобы построить естественное обобщение задачи (2.1), (1.6), нам нужны эрмитовы $m \times m$ -матрицы σ_j ($j = 1, \dots, n$), обладающие свойствами (1.3), где теперь E — единичная $m \times m$ -матрица. Такой набор матриц существует в том и только в том случае, если m кратно числу $2^{[n/2]}$ (см., например, [10, с. 186]). Например, при $n = 2$ годятся любые две из матриц (1.2). При $n = 3$ допустимы четные m . При $n = 4$ минимальное m равно 4.

Определим матрицу $a(\xi)$ как сумму $\sum \sigma_j \xi_j$ по всем $j = 1, \dots, n$ и рассмотрим систему вида (2.1), где теперь $u(x)$ и $v(x)$ — векторы высоты m ; b_1 и b_2 — вещественные постоянные (или скалярные $m \times m$ -матрицы). Граничное условие запишем в виде (1.6). Все наши построения таковы, что они немедленно обобщаются, достаточно в них формально заменить индекс 3 на n . При предположениях

1 и 2 получается теорема типа теоремы 1, а если $b_2 = 0$, то теорема типа теоремы 2. Единственная поправка состоит в том, что собственные значения эллиптического ПДО S порядка 1 на Γ имеют теперь асимптотику $Cj^{1/(n-1)} + O(1)$, соответственно меняются асимптотические формулы для собственных значений оператора L .

Далее, результаты обобщаются на системы типа (1.4) в любой размерности $n \geq 2$, и получается аналог теоремы 3. Мы не будем останавливаться на очевидных деталях.

10. Другие спектральные задачи для системы Дирака. По аналогии с другими спектральными задачами для системы Максвелла из [6–9] мы можем предложить следующие варианты задачи (2.1), (1.6), которую будем называть теперь задачей I.

Задача II. Ищется решение системы (2.1) в неограниченной области Ω^- , дополнительной к замыканию области $\Omega = \Omega^+$, с граничным условием

$$ia(\nu)v^- = -\lambda u^- \quad \text{на } \Gamma. \quad (10.1)$$

Здесь и дальше u^- и v^- — граничные значения функций u и v , определенных в Ω^- .

Задача III. Ищется решение системы (2.1) вне Γ с условиями сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad ia(\nu)[v^+ - v^-] = \lambda u^\pm \quad \text{на } \Gamma. \quad (10.2)$$

Так как Ω^- — неограниченная область, то нужно добавить условия на бесконечности. Для уравнения Гельмгольца они хорошо известны. Пусть для определенности $n = 3$. При $k > 0$ это обычные условия излучения

$$\partial_r u - iku = O(r^{-2}) \quad (r = |x| \rightarrow \infty). \quad (10.3)$$

(Здесь мы следуем [13]; в [6, 8, 9] используется условие излучения со знаком + слева перед i .) При чисто мнимом k это условие заменяется условием экспоненциального убывания, а при $k = 0$ — условием $u = O(r^{-1})$. Такие же условия накладываются, конечно, на v . (Аналогично обстоит дело, если система имеет вид (8.1), но при достаточно больших $|x|$ принимает вид (2.1).)

Напомним, что внешняя задача Дирихле для уравнения Гельмгольца однозначно разрешима при любом k (см., например, [13, гл. 3]). Но для простоты мы примем, что выполнено предположение 2, чтобы можно было пользоваться оператором A^{-1} . Кроме того, при рассмотрении задачи II будем считать выполненным предположение 1. Аналоги операторов $M = M_I$ и $L = L_I$ для этой задачи определим формулами

$$M_{II} = -i[a(D)\mathcal{A}A^{-1}\psi]^-, \quad L_{II} = b_1^{-1}a(\nu)M_{II} = -b_1^{-1}[(\tfrac{1}{2}I + B')A^{-1} + c(\partial)]. \quad (10.4)$$

Задача II приводится к уравнению

$$L_{II}u^- = \lambda u^-.$$

Оператор M_{II} имеет в начале той же, что и раньше, системы локальных координат главный символ $\sigma_3|\xi'| - i \sum_{k \neq 3} \sigma_k \xi_k$. Снова $M_{II}^2 = -k^2 I$, и L_{II} имеет обратный $L_{II}^{-1} = -b_2^{-1} M_{II} a(\nu)$ на бесконечно гладких функциях, а $S_{II} = b_1 L_{II} - b_2 L_{II}^{-1}$ — эллиптический оператор, имеющий тот же главный символ, что и оператор $S = S_I$.

Разница по сравнению с задачей I состоит по существу только в следующем. При положительных k оператор $(\frac{1}{2}I + B')A^{-1}$ не является самосопряженным, но является бесконечно слабым возмущением самосопряженного оператора. Как следствие это верно и для оператора S_{II} . Отсюда вытекает, что он имеет дискретный спектр, состоящий из собственных значений; корневые пространства конечномерны, и собственные значения стремятся к бесконечности. Хотя они комплексные, они сохраняют асимптотику вида (5.1). Их мнимые части стремятся к 0 быстрее любой степени номера. Корневые функции принадлежат $C^\infty(\Gamma)$, и из них можно составить полную минимальную систему, являющуюся «безусловным базисом со скобками» сразу во всех соболевских пространствах $H^t(\Gamma)$. См. по этому поводу [15, п. 6.2], а также [8] или [9, гл. 5]. Конечномерные корневые подпространства $Y_\mu(S_{II})$ оператора S_{II} инвариантны относительно L_{II} , и собственные значения оператора L_{II} в них — это по-прежнему корни квадратного уравнения $\mu = b_1\lambda - b_2\lambda^{-1}$. Если эти собственные значения различны, то, как нетрудно проверить, $\psi \mapsto a(\nu)\psi$ — изоморфизм между соответствующими корневыми подпространствами оператора L_{II} .

Что же касается чисто мнимого k , то в этом случае $(\frac{1}{2}I + B')A^{-1}$ — формально самосопряженный оператор, а S — самосопряженный оператор, так что справедлив аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 4. 1. Пусть k — чисто мнимое и выполнено предположение 1. Тогда спектральные свойства оператора L_{II} аналогичны спектральным свойствам оператора L_I , см. теорему 1.

2. Пусть $k > 0$ и выполнены предположения 1 и 2. Тогда корневые функции оператора L_{II} принадлежат $C^\infty(\Gamma)$ и из них можно составить безусловный базис со скобками сразу во всех соболевских пространствах $H^t(\Gamma)$. Собственные значения имеют две точки накопления, 0 и ∞ , и сохраняют асимптотику, указанную в теореме 1. Мнимые части собственных значений оператора L_{II} стремятся к нулю быстрее любой степени номера и имеют знак, совпадающий со знаком числа $-b_1$.

Последнее утверждение проверяется следующим образом: в силу (10.4) оператор $-b_1L_{II}$ диссипативен вместе с его несамосопряженной частью $(\frac{1}{2}I + B')A^{-1}$, для которой это — известный факт (ср. [8, 9]).

От предположения 2 можно освободиться за счет подходящих поправок к фундаментальному решению (см. [8, §37] или [9, п. 5.8], или [13, гл. 3]).

Теперь рассмотрим задачу III. Примем, что $b_1 \neq 0$ и выполнено предположение 2, и покажем, что собственные значения этой задачи имеют, в отличие от случаев задач I и II, только одну точку сгущения собственных значений, а именно ∞ . Мы имеем

$$v = b_1^{-1}a(D)\mathcal{A}^{-1}u^\pm \quad \text{в } \Omega^\pm,$$

поэтому

$$ia(\nu)v^\pm = b_1^{-1}[(\mp \frac{1}{2}I + B')A^{-1} + c(\partial)]$$

и, так как $(-\frac{1}{2}I + B') - (\frac{1}{2}I + B') = -I$,

$$ia(\nu)[v^+ - v^-] = -b_1^{-1}A^{-1}u^\pm. \quad (10.5)$$

Таким образом, задача III приводится к уравнению

$$L_{III}u^\pm = \lambda u^\pm, \quad (10.6)$$

где L_{III} — оператор справа в (10.5). Это эллиптический ПДО 1-го порядка с главным символом $2b_1^{-1}|\xi'|$ в начале той же, что и раньше, системы локальных координат. Это, кроме того, самосопряженный оператор при чисто мнимом или нулевом k , и $-b_1 L_{III}$ — диссипативный оператор, бесконечно близкий к самосопряженному, при положительных k . Без несущественного множителя $-b_1^{-1}$ этот оператор подробно рассмотрен в [8, §36] и [9, п. 5.7] (точнее, там рассмотрен обратный оператор на скалярных функциях). Получаем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $b_1 \neq 0$.

1. Пусть k чисто мнимое или равно 0. Тогда оператор L_{III} имеет бесконечно гладкие собственные функции, из которых можно составить ортонормированный базис в $L_2(\Gamma)$, остающийся безусловным базисом во всех соболевских пространствах $H^t(\Gamma)$. Собственные значения вещественны и, будучи занумерованы в порядке неубывания модулей с учетом кратностей, имеют асимптотику $\lambda_j = Cj^{1/2} + O(1)$, где знак постоянной C совпадает со знаком числа b_1 .

2. Пусть k положительно и выполнено предположение 2. Тогда собственные значения имеют ту же асимптотику, но не вещественны, их мнимые части имеют знак, совпадающий со знаком числа $-b_1$, и стремятся к 0 быстрее j^{-h} с любым h . Корневые функции принадлежат $C^\infty(\Gamma)$, и из них можно образовать безусловный базис со скобками сразу во всех соболевских пространствах $H^t(\Gamma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условие излучения (10.3) при $k > 0$ мы наложили на u и v с учетом того, что это решения уравнения Гельмгольца. В работе [18] на основе кватернионного подхода к системе Дирака найдено другое условие излучения для нее. В наших обозначениях оно получается следующим образом. Положим

$$\mathcal{D}_\pm = \begin{pmatrix} \pm a(D) & -b_1 \\ -b_2 & \pm a(D) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}(\nu) = \begin{pmatrix} ka(\nu) & -b_1 \\ -b_2 & ka(\nu) \end{pmatrix}. \quad (10.7)$$

Систему (2.1) можно записать в виде $\mathcal{D}_+ W(x) = 0^1$. Произведение $\mathcal{D}_+ \mathcal{D}_-$ — это матричный оператор Гельмгольца $(\Delta + k^2)E_4$, где E_4 — единичная 4×4 -матрица. Поэтому

$$\Psi(x) = \mathcal{D}_- \Phi(x) E_4 \quad (10.8)$$

— фундаментальное решение системы (2.1) (другое фундаментальное решение получается заменой k на $-k$ в показателе в (3.1)). Это известные факты. Теперь заметим, что если $X(r)$ — (скалярная) функция, зависящая только от радиуса $r = |x|$, то на луче с направляющим единичным вектором ν

$$\mathcal{D}_-(X(r)E_4) = \begin{pmatrix} iX'(r)a(\nu) & -b_1 X(r) \\ -b_2 X(r) & iX'(r)a(\nu) \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что вдоль этого луча $\mathcal{R}(\nu)\Psi(x) = O(r^{-2})$, а для другого фундаментального решения это неверно. Поэтому условие излучения, соответствующее фундаментальному решению (10.8), можно задать в виде

$$\mathcal{R}(\nu)W(x) = O(r^{-2}). \quad (10.9)$$

¹⁾Чтобы сделать ее формально самосопряженной, достаточно поменять местами u и v в векторе W .

Это и есть условие излучения из [18]. Но фундаментальное решение (10.8) можно выделить также условием (10.3). Поэтому условия (10.3) и (10.9) эквивалентны.

11. Эллиптичность задачи и априорные оценки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. При $\lambda \neq 0$ задача (2.1), (1.6) эллиптическая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 1 условие Шапиро–Лопатинского достаточно проверить в предположении, что единичный вектор внешней нормали во взятой точке границы имеет координаты 0, 0, 1. Эта проверка элементарна. Дело сводится к рассмотрению системы

$$[\sigma_1 \xi_1 + \sigma_2 \xi_2 - i\sigma_3 \partial_t]U(t) = 0, \quad [\sigma_1 \xi_1 + \sigma_2 \xi_2 - i\sigma_3 \partial_t]V(t) = 0$$

на луче $\{t : t < 0\}$ при $|\xi'| = 1$, где $\xi' = (\xi_1, \xi_2)$, с граничным условием $i\sigma_3 V(0) = \lambda U(0)$ в пространстве решений, убывающих при $t \rightarrow -\infty$. Ищем эти решения в виде $U(t) = e^{\alpha t} U_0$, $V(t) = e^{\alpha t} V_0$. Чтобы найти $\alpha = \alpha(\xi')$, приравняем нулю определитель матрицы $\sigma_1 \xi_1 + \sigma_2 \xi_2 - i\sigma_3 \alpha$. Получаем $\alpha = \pm 1$ и оставляем $\alpha = 1$ (при этом видно, что система правильно эллиптическая). Находим соответствующий собственный вектор $C = (C_1, C_2)'$; здесь обе компоненты C_1 и C_2 отличны от нуля. Теперь имеем $U_0 = \gamma C$, $V_0 = \delta C$. Подставляя $U(t)$ и $V(t)$ в граничное условие, видим, что нетривиальных решений нет. $\square$

Результат автоматически распространяется на задачи (8.1), (1.2).

Предположим теперь, что λ отлично от нуля и от собственных значений задачи (2.1), (1.6), и рассмотрим задачу для системы (2.1) с неоднородным граничным условием

$$ia(\nu)v^+ - \lambda u^+ = g. \quad (11.1)$$

Она однозначно разрешима, и в силу общих свойств эллиптических задач справедлива следующая априорная оценка в соболевских нормах:

$$\|u\|_{s+1, \Omega} + \|v\|_{s+1, \Omega} \leq C_s \|g\|_{s+1/2, \Gamma} \quad (11.2)$$

при $s \geq 0$. Это неравенство можно использовать для оценки погрешности при замене функции g частными суммами ее разложения в ряд Фурье по собственным функциям u_j^+ . В частности, в силу известной теоремы вложения для соболевских пространств видно, что при $g \in H^{1+\varepsilon}(\Gamma)$, $\varepsilon > 0$ (например, при $g \in C^2(\Gamma)$), соответствующие приближения к решениям u , v сходятся к ним равномерно в $\overline{\Omega}$.

12. Замечание о спектральной задаче для уравнения Шрёдингера. «Нерелятивистский» вариант рассмотренных выше задач — это скалярная задача

$$\Delta u + [\mathcal{E} - V(x)]u(x) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \partial_\nu u^+ = \lambda u^+ \quad \text{на } \Gamma \quad (12.1)$$

(см. [4, 5] и приведенные там ссылки). Если $V(x)$ — вещественная функция из $C^\infty(\overline{\Omega})$ и однородная задача Дирихле для уравнения Шрёдингера в (12.1) при данном $\mathcal{E}$ не имеет нетривиальных решений, то задача (12.1) эквивалентна уравнению $L_V u^+ = \lambda u^+$, где L_V — хорошо изученный оператор на Γ , переводящий u^+ в $\partial_\nu u^+$ (см. [8, 9] в случае уравнения Гельмгольца). Это эллиптический самосопряженный ПДО 1-го порядка, и его спектральные свойства описываются очевидным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г., Вдовин Ю. А., Мямлин В. А. Курс теоретической физики, т. II, Наука, М., 1971.
2. Hamacher P., Hinze J. Finite-volume variational method for the Dirac equation. Phys. Rev. A, **44**, No. 9, 1705–1711 (1991).
3. Szmytkowski R. Unified construction of variational R -matrix methods for the Dirac equation. Physical Review A, **57**, No. 6, 4351–4364 (1998).
4. Szmytkowski R. Operator formulation of Wigner's R -matrix theories for the Schrödinger and Dirac equations. J. Math. Phys., **39**, No. 10, 5231–5252 (1998).
5. Szmytkowski R. Metoda R -macierzy dla równań Schrödingera i Diraca. Politechnika Gdańska, monografie 3, Gdańsk, 1999.
6. Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. Наука, М., 1977.
7. Агранович М. С., Голубева З. Н. О некоторых задачах для системы Максвелла со спектральным параметром в граничном условии. ДАН СССР, **231**, №4, 777–780 (1976).
8. Агранович М. С. Спектральные свойства задач дифракции. Добавление в [6], с. 289–416.
9. Agranovich M. S., Katsenelenbaum B. Z., Sivov A. N., Voitovich N. N. Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory. Wiley-VCH, Berlin, 1999.
10. Ivrii V. Microlocal Analysis and Precise Spectral Asymptotics. Springer-Verlag, Berlin etc., 1998.
11. Booss-Bavnbek B., Woiciechowski K. P. Elliptic Boundary Problems for Dirac Operators. Birkhäuser, Boston etc., 1993.
12. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. Физматгиз, М., 1958.
13. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния, перевод с англ., Мир, М., 1987.
14. Агранович М. С., Амосов Б. А. Оценки s -чисел и спектральные асимптотики для интегральных операторов типа потенциала на негладких поверхностях. Функц. анализ и его прилож., **30**, вып. 2, 1–18 (1996).
15. Агранович М. С. Эллиптические операторы на гладких многообразиях. Итоги науки и техники, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 63, ВИНТИ, М., 1990, с. 5–129.
16. Агранович М. С. Об эллиптических операторах на замкнутой кривой. Труды ММО, **47**, 22–67 (1984).
17. Agranovich M. S. Elliptic boundary problems, Encyclopaedia of Math. Sciences, Vol. 79, Partial Differential Equations IX, Springer-Verlag, Berlin etc., 1997, pp. 1–144.
18. Kravchenko V. V., Castillo R. An analog of the Sommerfeld radiation condition for the Dirac operator. Math. Methods in Appl. Sci. (в печати).