Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Алимов, О структуре дополнения к чебышёвским множествам, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 3, 19–27

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa255>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 11:05:29

О структуре дополнения к чебышёвским множествам*

© 2001. А. Р. Алимов

§1. Введение

Подмножество $M \neq \emptyset$ линейного нормированного пространства X называется *чебышёвским множеством*, если для каждой точки $x \in X$ множество $P_M x := \{y \in M : \|x - y\| = \inf_{z \in M} \|x - z\|\}$ ближайших к ней точек из M состоит из одной точки.

Для данного чебышёвского множества $M \subset X$ мы изучаем структуру его дополнения $X \setminus M$, рассматривая следующую проблему: из скольких компонент связности может состоять такое дополнение? В частности, мы улучшаем в отношении размерности один результат из [1] (см. теоремы 2* и С ниже) и даем характеристику конечномерных линейных нормированных и несимметрично нормированных пространств, содержащих строгое солнце с заданным количеством компонент связности дополнения (теорема 1). Мы обобщаем на случай несимметрично нормированных пространств характеристику А. Л. Брауна четырехмерных нормированных пространств, в которых всякое чебышёвское множество выпукло (теоремы Е и 3). Основными результатами являются теоремы 1, 2, 2*, 3 и 3*.

Для доказательства теорем 2, 2*, 3 и 3* используется и обобщается на случай несимметрично нормированных пространств развитый Брауном в [2] аппарат, основанный на свойствах граневой структуры выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$.

Задача о связности дополнения к чебышёвским множествам и к некоторым другим множествам с заданными аппроксимативными свойствами была впервые рассмотрена в [1, 3, 4].

§2. Определения и обозначения

В работе аппроксимативные свойства множеств будут изучаться как в классическом случае линейных нормированных пространств, так и в случае естественных обобщений таких пространств — линейных пространств с несимметричной нормой, впервые введенных в [5].

Всюду ниже X — действительное линейное пространство, $\dim X < \infty$ (если не оговорено противное).

Несимметричным расстоянием $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ на X называется функционал Минковского некоторого фиксированного выпуклого ограниченного тела B — единичного шара, содержащего начало координат в своей внутренности. А именно, для $x, y \in X$, $x \neq 0$, *несимметричное расстояние* $\rho(x, y)$ определяется следующим образом:

$$\rho(0, x) := \sup\{\sigma \geq 0 : x \notin \sigma B\}, \quad \rho(x, y) := \rho(0, y - x), \quad \rho(0, 0) = 0.$$

*Работа была выполнена при частичной финансовой поддержке математического института университета Эрланген–Нюрнберг, РФФИ, грант №99-01-00357, и ИНТАС, грант №01080.

Функция $d(x) = \rho(0, x)$ называется *несимметричной нормой*; она удовлетворяет всем аксиомам нормы, исключая аксиому симметрии; в общем случае $\rho(x, y) \neq \rho(y, x)$, т. е. $d(y - x) \neq d(x - y)$. Неравенство треугольника выполнено в следующем виде: $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых $x, y, z \in X$. В случае если функция расстояния d симметрична, она является нормой; при этом $\|x\| = \rho(0, x)$ для $x \in X$.

Через (LNN) обозначается класс всех линейных несимметрично нормированных пространств (см. [1, 3, 5]), т. е. пространств, на которых введено несимметричное расстояние $\rho(\cdot, \cdot)$, или, что то же самое, несимметричная норма $d(\cdot)$, а (LN) обозначает класс всех линейных нормированных пространств. Ясно, что

$$(LN) \subset (LNN).$$

Пусть $B = \{y \in X : \rho(0, y) \leq 1\}$ — единичный шар пространства $X \in (LNN)$, а $S = \{y \in X : \rho(0, y) = 1\}$ — единичная сфера. Точки $s_1, \dots, s_n \in S$ называются *попарно далекими* [1, 3], если для тел $B_i := B - s_i$ ($i = 1, \dots, n$) выполнены условия

$$0 \in B_i \quad \text{и} \quad B_i \cap \text{int } B_j = \emptyset \quad (i \neq j, i, j = 1, \dots, n).$$

Положим (см. [1, 3])

- $k(B)$ — максимально возможное число попарно далеких точек шара B ,
- $k_{\text{exp}}(B)$ — максимально возможное число попарно далеких *достижимых* точек шара B .

(Напомним, что точка $s \in B$ называется *достижимой*, когда найдется опорная гиперплоскость H к шару B в точке s , такая, что $H \cap B = \{s\}$.)

Если $\dim X = n < \infty$, то (см. [1])

$$2 \leq k_{\text{exp}}(B) \leq k(B) \leq 2^n. \quad (1)$$

Оценка сверху 2^n достигается в том и только в том случае, если B есть n -мерный параллелепипед [3].

Например, если B — единичный шар пространства $\mathbb{R}^n$ с обычной евклидовой нормой, то $k(B) = k_{\text{exp}}(B) = 2$; если B — аффинный правильный шестиугольник или треугольник на плоскости (с внутренностью), то $k(B) = k_{\text{exp}}(B) = 3$.

Если $B \subset \mathbb{R}^3$ — «игральная кость» (т. е. трехмерный куб со сглаженными вершинами), то $k(B) = 4$, в то время как $k_{\text{exp}}(B) = 2$. (2)

Пусть $\emptyset \neq M \subset X$, $x \in X$. Под расстоянием от точки x до множества M мы понимаем величину $\rho(x, M) = \inf_{y \in M} \rho(x, y)$. Множество всех ближайших к точке x точек из M обозначается через $P_M x = \{y \in M : \rho(x, y) = \rho(x, M)\}$.

Пусть $M \subset X$, $M \neq \emptyset$. Точка $s \in S$ называется *M -действующей* [1] (здесь буква « M » означает рассматриваемое множество M), если

$$s \in \tau(x) \quad \text{для некоторого } x \notin M, \quad \text{где } \tau(x) := \frac{P_M x - x}{\rho(x, P_M x)} \subset S. \quad (3)$$

Через $k_{\text{act,exp}}(B|M)$ обозначается максимальное число M -действующих достижимых попарно далеких точек сферы S при приближении фиксированным множеством M . Из определения немедленно следует, что

$$k_{\text{act,exp}}(B|M) \leq k_{\text{exp}}(B) \quad \text{для любого множества } M.$$

Множество $M \subset X$ называется *солнцем*, если для каждой точки $x \notin M$ найдется точка $y \in P_M x \neq \emptyset$, такая, что

$$y \in P_M(\lambda x + (1 - \lambda)y) \quad \text{для всех } \lambda \geq 0. \quad (4)$$

Множество M — *строгое солнце*, если каждая точка обладает хотя бы одной ближайшей точкой в M и условие (4) выполнено для любой точки $x \notin M$ и для любой точки $y \in P_M x$. Ясно, что каждое строгое солнце является солнцем. Если для точек x, y выполнено условие (4), то y называется *солнечной точкой* для x .

О солнцах, строгих солнцах и чебышёвских множествах см. [1, 3, 6–13].

Если $x \in X$, $r > 0$, то

$$B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\} \text{ — замкнутый шар,}$$

$$\overset{\circ}{B}(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\} \text{ — открытый шар,}$$

$$S(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) = r\} \text{ — сфера}$$

с центром x и радиусом r .

§3. Исторические замечания

Структура дополнения к чебышёвским множествам и солнцам изучались в [1, 3, 12]. В частности, дополнение к ограниченному солнцу всегда связно [12]. В конечномерном пространстве всякое чебышёвское множество является солнцем (см., например, [9]) и, следовательно, дополнение к ограниченному чебышёвскому множеству связно.

Характеризации пространств (не обязательно конечномерных), содержащих солнце с заданным количеством компонент связности в дополнении, дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА А [3]. Пусть $X \in (LNN)$ и ν — кардинальное число. В пространстве X существует солнце с ν компонентами связности в дополнении тогда и только тогда, когда $k(B) \geq \nu$.

Следующая теорема, анонсированная в [4], дает ответ на вопрос о числе компонент связности дополнения к строгому солнцу в конечномерном пространстве. Доказательство теоремы 1 дается в §4.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X \in (LNN)$, $\dim X < \infty$, и пусть ν — натуральное число. В пространстве X существует строгое солнце с ν компонентами связности в дополнении, если и только если $k(B) \geq \nu$.

Следующие три теоремы касаются чебышёвских множеств в конечномерных пространствах.

ТЕОРЕМА В [1]. Пусть $X \in (LNN)$, $\dim X < \infty$, $\nu \in \mathbb{N}$, $0 \leq \nu \leq k_{\exp}(N)$. Тогда в X существует чебышёвское множество с ν компонентами связности в дополнении.

Поскольку в конечномерном пространстве всякое чебышёвское множество является солнцем, теорема А дает частичный ответ на вопрос о строении дополнения к чебышёвскому множеству. Однако из утверждения (2) и теоремы С будет следовать, что оценка числа компонент связности дополнения к чебышёвскому множеству, полученная из теоремы А, не всегда является точной.

ТЕОРЕМА С [1]. Пусть $X \in (LNN)$, $\dim X < \infty$, и пусть $M \subset X$ — чебышёвское множество с ν компонентами связности в дополнении. Тогда $k(B) \geq \nu$. Далее, если $\dim X \leq 3$, то $k_{\text{act}, \exp}(B|M) \geq \nu$. В частности, $k_{\exp}(B) \geq \nu$.

Таким образом, теоремы В и С дают полный ответ о числе компонент связности дополнения к чебышёвскому множеству в пространстве X , если $\dim X \leq 3$. В следующей теореме теорема С усиливается в отношении размерности и переносится на случай 4-мерных линейных нормированных и несимметрично нормированных пространств. Полная версия этой теоремы (теорема 2*) дается в §4.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X \in (LNN)$, $\dim X \leq 4$, и пусть $M \subset X$ — чебышёвское множество, дополнение к которому состоит из ν компонент связности. Тогда $k_{\text{act,exp}}(B|M) \geq \nu$. В частности, $k_{\text{exp}}(B) \geq \nu$.

Задача о структуре дополнения к чебышёвским множествам оказалась тесно связанной с проблемой выпуклости чебышёвских множеств. Отметим здесь лишь, что конечномерные нормированные пространства, в которых всякое чебышёвское множество выпукло, охарактеризованы, только если их размерность не более четырех (см. [2, 6, 9, 12–15], а также [10, 11], где охарактеризованы конечномерные линейные нормированные пространства, в которых всякое ограниченное чебышёвское множество выпукло).

В [2] А. Л. Браун ввел важное понятие *граневой системы выпуклых множеств*. Здесь мы напомним, что *грань* выпуклого множества K — это непустое выпуклое экстремальное подмножество $F \subset K$ (т. е. если $\lambda a + \mu b \in F$, где $\lambda, \mu > 0$ и $\lambda + \mu = 1$, то $a, b \in F$), а *достижимая грань* множества K — непустое пересечение множества K с опорной гиперплоскостью к нему.

Семейство $\mathcal{F}$ непустых замкнутых выпуклых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ называется *граневой системой выпуклых множеств*, если оно обладает следующими свойствами:

- (F1) если $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ и $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$, то $\bigcap \mathcal{G} \in \mathcal{F}$;
- (F2) если $F, G \in \mathcal{F}$ и $F \subset G$, то F — грань множества G ;
- (F3) для каждого натурального k множество $\bigcup \{F^k : F \in \mathcal{F}\}$ замкнуто в произведении $(\mathbb{R}^n)^k$.

Если K — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, то семейство его собственных граней, равно как и семейство его достижимых граней, является граневой системой выпуклых множеств.

В [2] Браун сформулировал и доказал следующее утверждение.

ТЕОРЕМА D. Пусть $\mathcal{F}$ — граневая система выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что x_0 — экстремальная точка некоторого элемента $F \in \mathcal{F}$, N — окрестность точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $N \subset (\bigcup \mathcal{F})$. Если $n = 1, 2$ или 3 , то $\{y\} \in \mathcal{F}$ для некоторого $y \in N$.

Пусть $\llbracket F_n \rrbracket$ — утверждение теоремы D, в котором часть «если $n = 1, 2$ или 3 » последнего предложения опущена. Таким образом, теорема D устанавливает справедливость утверждений $\llbracket F_1 \rrbracket$, $\llbracket F_2 \rrbracket$ и $\llbracket F_3 \rrbracket$. Верно ли утверждение $\llbracket F_n \rrbracket$ при $n \geq 4$, неизвестно.

Применяя свой результат $\llbracket F_3 \rrbracket$ к некоторой граневой системе выпуклых множеств в $\mathbb{R}^4$, построенной по чебышёвскому множеству, и используя глубокие новые рассуждения, Браун в [2] доказал следующую важную теорему E.

Напомним, что точка $s \in S$ называется точкой *гладкости*, если опорная гиперплоскость к сфере S в точке s единственна.

ТЕОРЕМА E. Пусть $X \in (LN)$, $\dim X = n < \infty$. Предположим, что справедливо утверждение $\llbracket F_{n-1} \rrbracket$ или $n \leq 4$. Тогда каждое чебышёвское множество

в X выпукло, если и только если каждая достижимая точка шара B является точкой гладкости.

Этот результат обобщает характеризацию трехмерных пространств, в которых всякое чебышёвское множество выпукло, полученную В. И. Бердышевым [15] и А. Брондстедом [5]. Отметим, что Брондстед доказал свою теорему для более широкого класса пространств — линейных пространств с несимметричной нормой, в то время как Бердышев рассматривал лишь классический нормированный случай. Немного изменяя рассуждения Брауна [2] при доказательстве теоремы Е, мы обобщаем теорему Е на несимметрично нормированные пространства.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $X \in (LNN)$, $\dim X = n < \infty$. Предположим, что справедливо утверждение $\llbracket F_{n-1} \rrbracket$ или $n \leq 4$. Тогда каждое чебышёвское множество в X выпукло, если и только если каждая достижимая точка шара B является точкой гладкости.

§ 4. Структура дополнений к чебышёвским множествам и выпуклость чебышёвских множеств

В этом параграфе, пользуясь результатами Брауна и леммой 4 (см. ниже), мы формулируем и доказываем теорему 2*, улучшая в отношении размерности теорему С из §3. Попутно мы обобщаем характеризацию Брауна 4-мерных линейных нормированных пространств, в которых всякое чебышёвское множество выпукло (теорема Е), на несимметричный случай (теорема 3).

ТЕОРЕМА 2*. Пусть $X \in (LNN)$, $\dim X = n < \infty$. Предположим, что справедливо утверждение $\llbracket F_{n-1} \rrbracket$ или $n \leq 4$. Предположим также, что $M \subset X$ — чебышёвское множество в X , дополнение к которому состоит из ν компонент связности. Тогда $k_{\text{act,exp}}(B|M) \geq \nu$. В частности, $k_{\text{exp}}(B) \geq \nu$.

Если $y \in S(x, r)$, то через $\text{Exp}_{B(x, r)}(y)$ мы обозначаем наименьшую достижимую грань шара $B(x, r)$, содержащую точку y . Поскольку мы рассматриваем конечномерные пространства, то множество $\text{Exp}_{B(x, r)}(y)$ всегда непусто.

Пусть $M \subset X$ — замкнутое множество, $x \in X \setminus M$ и $\hat{y} \in P_M x$. Положим

$$J(x, \hat{y}) = -\text{Exp}_{B(x, \rho(x, M))}(\hat{y}) + x + \hat{y}.$$

В случае если M — чебышёвское множество, точка $\hat{y} = P_M x$ определена однозначно и мы пишем для краткости $J(x)$.

ЛЕММА F [5]. Пусть $X \in (LNN)$, $\dim X = n < \infty$, и пусть $M \subset X$ — замкнутое множество, $x \in X \setminus M$, а η — солнечная точка из M для x . Тогда если $z \in J(x, \eta)$, то

- 1) $\eta \in P_M z$;
- 2) $\rho(z, M) = \rho(x, M) = \rho(x, \eta)$;
- 3) η — солнечная точка из M для z .

Если $y \in X$, $M \subset X$, то для краткости будем писать $\rho(y)$ вместо $\rho(y, M)$.

Для $x, y \in X$, $x \neq y$, обозначим через

$$\overset{\circ}{K}(y, x) = \{v \in X : [v, y] \cap \overset{\circ}{B}(x, \rho(x, y))\} \neq \emptyset$$

открытый опорный конус к шару $B(x, \rho(x, y))$ в точке y . О различных определениях опорного конуса см. [9, гл. 3]. В дальнейшем мы будем пользоваться хорошо известной характеристикой солнц А. Брондстеда и Е. В. Ошмана (см.,

например, [9]): множество $M \subset X$ является солнцем тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \notin M$ найдется точка $y \in P_M x$, такая, что $\overset{\circ}{K}(y, x) \cap M = \emptyset$.

Следующая лемма фактически доказана (но явно не сформулирована) Брауном в [2, pp. 336–338] в нормированном случае и играет важную роль в доказательстве теорем 3* и 2*. Для несимметрично нормированных пространств рассуждения Брауна проходят без изменения.

ЛЕММА G. Пусть $X \in (LNN)$, $\dim X = n < \infty$, и пусть $M \subset X$ — чебышёвское множество. Пусть $x \notin M$. Предположим, что справедливо утверждение $\|F_{n-1}\|$ или $n \leq 4$, а также что

(5) для всякой точки $z \notin M$, такой, что $x \in \overset{\circ}{K}(P_M z, z)$, достижимая грань шара $B(z, \rho(z))$, определяемая точкой $P_M z$, не содержит достижимых точек шара $B(z, \rho(z))$.

Тогда найдется точка $z \notin M$, такая, что $x \in \overset{\circ}{K}(P_M z, z)$ и $\dim J(z) = 0$, т. е. $P_M z$ — достижимая точка шара $B(z, \rho(z))$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие (5) в лемме G является существенным. Если взять в пространстве $\ell_\infty(2)$ в качестве чебышёвского множества евклидов круг радиуса 1 с центром в точке с декартовыми координатами $(0, 2)$, а в качестве точки x начало координат, то легко видеть, что не существует точки $z \in X \setminus M$, такой, что $x \in \overset{\circ}{K}(P_M z, z)$ и $P_M z \in \exp B(z, \rho(z))$.

Из леммы G мы можем извлечь несколько больше информации, чем содержится в теореме 3. А именно, имеет место

ТЕОРЕМА 3*. Пусть $X \in (LNN)$, $\dim X = n < \infty$. Предположим, что справедливо утверждение $\|F_{n-1}\|$ или $n \leq 4$. Пусть $M \subset X$ — чебышёвское множество. Тогда M выпукло, если и только если каждая достижимая M -действующая точка шара B является точкой гладкости.

Теорема 3 непосредственно следует из теоремы 3*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3*. Предположим, что справедливо утверждение $\|F_{n-1}\|$ (напомним, что $\|F_{n-1}\|$ выполнено для всех $n \leq 4$).

Предположим, что всякая достижимая M -действующая точка единичного шара B является точкой гладкости.

Мы докажем выпуклость замкнутого множества M , установив, что каждая точка $x \in X \setminus M$ может быть отделена от M посредством замкнутой гиперплоскости.

Пусть $x \in X \setminus M$. Предположим, что утверждение (5) не выполняется. Тогда найдется точка $z \notin M$, такая, что $x \in \overset{\circ}{K}(P_M z, z)$ и достижимая грань $\text{Exp}_{B(z, \rho(z))}(P_M z)$ содержит достижимую точку η . По лемме F точка η является M -действующей точкой. В силу минимальности достижимой грани любая опорная гиперплоскость к шару $B(z, \rho(z))$, проходящая через z , проходит также через η , а по предположению точка η является точкой гладкости шара $B(z, \rho(z))$. Из этого вытекает, что $P_M z$ — также точка гладкости и, следовательно, конус $\overset{\circ}{K}(P_M z, z)$ является открытым полупространством. Поэтому точка z , а вместе с ней и x , может быть отделена от множества M гиперплоскостью — границей полупространства $\overset{\circ}{K}(P_M z, z)$.

Теперь предположим, что (5) выполняется. Тогда по лемме G найдется точка $z \in X \setminus M$, такая, что

$$x \in \mathring{K}(P_M z, z) \quad \text{и} \quad \dim J(z) = 0,$$

т. е. $P_M z$ — достижимая точка шара $B(z, \rho(z, M))$. Но в этом случае по предположению точка $P_M z$ является точкой гладкости шара $B(z, \rho(z))$, и, следовательно, конус $\mathring{K}(P_M z, z)$ является открытым полупространством, граница которого — искомая гиперплоскость — отделяет точку x от множества M .

Если же существует негладкая достижимая точка шара B , то пространство X содержит невыпуклое чебышёвское множество, — это утверждение известно для пространств любой размерности (см. [5, 15]). Теорема 3* доказана. $\square$

ЛЕММА 4. Пусть $X \in (LNN)$, $\dim X = n < \infty$, и пусть $M \subset X$ — чебышёвское множество. Предположим, что выполнено одно из следующих утверждений:

- 1) $n \leq 4$;
- 2) справедливо утверждение $\llbracket F_{n-1} \rrbracket$;
- 3) M выпукло.

Тогда найдется достижимая M -действующая точка $s \in S$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для любого натурального $n \geq 3$ найдутся негладкое линейное нормированное пространство X размерности n и строгое солнце $M \subset X$, такие, что единичная сфера пространства X не содержит M -действующих достижимых точек. В качестве единичного шара искомого пространства можно взять n -мерный куб со сглаженными, как в (2), вершинами, а в качестве строгого солнца M — гиперплоскость, параллельную любой из гиперграней куба.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Если множество M выпукло, то существование достижимой M -действующей точки $s \in S$ доказано в [1, Прог. 6]. Если выполнено 1) или 2), то нужное нам утверждение следует из леммы G. Действительно, пусть $x \notin M$. Если выполнено (5), то по лемме G найдется точка $z \notin M$, такая, что $P_M z \in \exp B(z, \rho(z))$, т. е. точка $\tau(z) \in S$ — искомая достижимая M -действующая точка.

Если же условие (5) не выполнено, то это означает, что найдется точка $z \notin M$, такая, что достижимая грань $\text{Exp}_{B(z, \rho(z))}(P_M z)$ шара $B(z, \rho(z))$ содержит достижимую точку z . Но тогда по лемме F точка $P_M z$ является ближайшей точкой к точке $z^* = z + P_M z - z \in J(z)$. А из того, что z — достижимая точка шара $B(z, \rho(z))$, следует, что $P_M z$ — достижимая точка шара $B(z^*, \rho(z^*))$. Итак, $\tau(z^*)$ — искомая достижимая M -действующая точка. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2*. Согласно неравенствам (1), $\nu \leq 2^n$.

Если $\nu = 1$, то неравенство $k_{\text{act}, \exp}(B|M) \geq 1$ следует из леммы 4.

Предположим, что $\nu \geq 2$, и пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_\nu$ — компоненты связности множества $X \setminus M$. Для $i \in \{1, \dots, \nu\}$ положим

$$M_i = X \setminus \Omega_i = M \cup \{\Omega_i : 1 \leq j \leq \nu, j \neq i\}. \quad (6)$$

Ясно, что каждое из M_i — также чебышёвское множество и для каждого $x \in \Omega_i$ имеем $P_M x = P_{M_i} x$ ($i = 1, \dots, \nu$). Для каждого i , применяя лемму 4, находим M_i -действующую точку $s_i = \tau(x_i) \in S$ (которая также является M -действующей точкой), $x_i \in \Omega_i$. Наконец, в [1, Лемма 6] установлено, что точки $s_1, \dots, s_\nu$ являются попарно далекими. Теорема 2* доказана. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если $M \subset X$ — строгое солнце с ν компонентами связности в дополнении, то $k(B) \geq \nu$ по теореме А.

Предположим теперь, что $k(B) \geq \nu$. Нам нужно построить строгое солнце в X с ν компонентами связности в дополнении. По теореме А найдутся ν попарно далеких точек $s_1, \dots, s_\nu \in S$. Лемма 2 из [1] утверждает, что точки s_i , $i = 1, \dots, \nu$, могут быть выбраны экстремальными точками сферы S . По [3] множество

$$X \setminus \bigcup_{i=1, \dots, \nu} \mathring{K}(0, -s_i)$$

является солнцем в X . Если для некоторого i точка s_i является достижимой точкой сферы S , то в силу леммы 5 из [1] найдется множество $M_i = D_i \subset \mathring{K}(0, -s_i)$, такое, что множество $X \setminus D_i$ является чебышёвским и, конечно, строгим солнцем.

Предположим, что для некоторого i точка s_i является экстремальной, но не достижимой точкой шара B . Обозначим через K_i замыкание конуса $\mathring{K}(0, -s_i)$. Теперь s_i также не является достижимой точкой конуса K_i . Из этого следует, что линейная размерность d конуса (т. е. размерность максимального аффинного подпространства, содержащегося в K_i) отлична от нуля. Через H обозначим подпространство линейности конуса K_i , т. е. $H = \{x : x + K = K\}$, $\dim H = d$. Пусть $H^\perp$ — подпространство в $\mathbb{R}^n$ (здесь $n := \dim X$), которое ортогонально к H . Так как $K_i^\perp := K \cap H^\perp$ — выпуклый замкнутый конус, то из определения d следует, что 0 — достижимая точка конуса $K_i^\perp$. Следовательно, 0 — достижимая точка шара $B^\perp := B(-s_i, 1) \cap H^\perp$ пространства $H^\perp$, и по упомянутой выше лемме 5 из [1] найдется выпуклое множество $D_i^\perp \subset K_i^\perp$, такое, что множество $H^\perp \setminus H^\perp D_i^\perp$ является чебышёвским множеством в $H^\perp$. Теперь положим

$$D_i = \{D_i^\perp + x : x \in H\} \subset K_i. \quad (7)$$

Тот факт, что $X \setminus D_i$ является строгим солнцем в X , немедленно следует из (7) и определений D_i , H и $H^\perp$.

Теперь докажем, что множество $M_i := X \setminus \text{int } D_i$ является строгим солнцем в X .

В силу доказанного выше каждое множество вида $X \setminus \text{int } D_i$ является строгим солнцем в X . Так как для разных i, j пересечение $\mathring{K}(0, -s_i) \cap \mathring{K}(0, -s_j)$ пусто, то из включения $D_i \subset \mathring{K}(0, -s_i)$ вытекает, что $D_i \cap D_j = \emptyset$, $i \neq j$. Из этого следует, что множество

$$X \setminus \bigcup_{i=1, \dots, \nu} \text{int } D_i$$

является строгим солнцем в X с ν компонентами связности в дополнении. Теорема 1 доказана. $\square$

Благодарность. Автор благодарен Х. Беренсу и Математическому институту университета Эрланген–Нюрнберг за возможность работы в Эрлангене и за гостеприимство. Также автор благодарит С. В. Конягина за обсуждение работы и рецензента за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alimov A. R.* Chebyshev set's complement. *East. J. Approx.*, **2**, No. 2, 215–232 (1996).
2. *Brown A. L.* Chebyshev sets and facial systems of convex sets in finite-dimensional spaces. *Proc. London Math. Soc.* (3), **41**, 297–339 (1980).
3. *Alimov A. R.* A number of connected components of sun's complement. *East J. Approx.*, **1**, No. 4, 419–429 (1995).
4. *Alimov A.* The Number of Connected Components of Chebyshev sets and “suns's” complement. *Proc. A. Ramadze Math. Inst.*, **117**, 135–136 (1998).
5. *Brøndsted A.* Convex sets and Chebyshev sets, II. *Math. Scand.*, **18**, 5–15 (1966).
6. *Карлов М. И., Царьков И. Г.* Выпуклость и связность чебышёвских множеств и солнц. *Фундам. прикл. матем.*, **3**, № 4, 967–978 (1997).
7. *Кошечев В. А.* Связность и аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах *Матем. заметки*, **17**, № 2, 193–204 (1975).
8. *Кошечев В. А.* Связность и солнечные свойства множеств в линейных нормированных пространствах. *Матем. заметки*, **19**, № 2, 267–278 (1976).
9. *Власов Л. П.* Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах. *УМН*, **28**, вып. 6, 3–66 (1973).
10. *Царьков И. Г.* Компактные и слабо компактные чебышёвские множества в линейных нормированных пространствах. *Труды МИАН*, **189**, 169–184 (1989).
11. *Царьков И. Г.* Ограниченные чебышёвские множества в конечномерных банаховых пространствах. *Матем. заметки*, **36**, № 1, 73–78 (1984).
12. *Brown A. L.* Chebyshev sets and the shapes of convex bodies. In: *Methods of Functional Analysis in Approximation Theory* (Micchelli C. A., ed.), Internat. Series of Numerical Math, Vol. 76, Proc. Int. Conf., Indian Inst. Techn. Bombay, 16–20.XII.1985, Birkhäuser, Basel, 1986, pp. 97–121.
13. *Балаганский В. С., Власов Л. П.* Проблема выпуклости чебышёвских множеств. *УМН*, **51**, вып. 6, 125–188 (1996).
14. *Deutsch F.* The convexity of Chebyshev sets in Hilbert space (Rassias Th. M. et al., eds.). In: *Topics in polynomials of one and several variables and their applications*, Volume dedicated to the memory of P. L. Chebyshev (1821–1894), Singapore, World Scientific, 1993, pp. 143–150.
15. *Бердышев В. И.* К вопросу о чебышёвских множествах. *Докл. АзССР*, **22**, № 9, 3–5 (1966).

Московский государственный университет
e-mail: alimov@shade.msu.ru

Поступило в редакцию
11 мая 2000 г.