Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. К. Шейнман, Фермионная модель представлений аффинных алгебр Кричевера–Новикова, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 3, 60–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa259>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 15:13:31

УДК 517.9

Фермионная модель представлений аффинных алгебр Кричевера–Новикова*

© 2001. О. К. ШЕЙНМАН

§1. Введение

Аффинные алгебры Кричевера–Новикова возникли в [5, 6] как обобщение аффинных алгебр Каца–Мули, связанное с компактной римановой поверхностью с двумя отмеченными точками. Они относятся к новому классу так называемых квазиградуированных алгебр (см. определение в §2), структура и представления которых к настоящему моменту находятся в начальной стадии изучения. В то же время квазиградуированность является важным понятием, позволяющим обобщить многие свойства хорошо изученного класса градуированных алгебр, важнейшим из которых является возможность строить представления, порожденные вакуумным вектором. Первые конструкции представлений аффинных алгебр Кричевера–Новикова (модулей Верма и неприводимых модулей) были предложены в [15, 17, 18], а для случая нескольких отмеченных точек — в [13]. Эти конструкции носят абстрактно-алгебраический характер. Оставалась открытой задача нахождения таких геометрических объектов, на которых рассматриваемые алгебры действуют естественным образом. В настоящей работе такой объект предъявлен: это функциональные пространства, специальным образом связанные с голоморфными векторными расслоениями над соответствующей римановой поверхностью, введенные ранее в [8, 9] в связи с решением солитонных уравнений.

Отправляясь от этих пространств, мы строим представления, порожденные старшими векторами, с помощью известной конструкции бесконечного фермионного представления (клин-представления) [1, 5, 6, 12, 21]; см. также [2, 3]. С этой целью мы используем базисы в рассматриваемых пространствах функций, введенные в [11] и обобщающие известные базисы Кричевера–Новикова в пространствах функций и тензоров на римановой поверхности с двумя отмеченными точками [5–7]. В §2 мы излагаем конструкцию этих базисов, немного расширяя изложение работы [11].

Основная теорема работы — теорема 3.2 — устанавливает условия эквивалентности фермионных представлений. При этом наиболее существенным условием оказывается эквивалентность порождающих их расслоений.

Появление расслоений в теории представлений алгебр Кричевера–Новикова представляется далеко не случайным фактом. В [14, 16] показано, что пространство орбит коприсоединенного представления такой алгебры совпадает с пространством классов эквивалентности конечномерных неприводимых представле-

*Работа поддержана грантом РФФИ №99-01-00198.

ний фундаментальной группы проколотов римановой поверхности. По сути это те же самые данные, которые ранее возникали в классификации Нарасимхана–Сешадри модулей стабильных расслоений на (компактной) римановой поверхности. Эти данные также тесно связаны [19] с конструкцией Хитчина расслоений Хиггса.

К идее о возможности построения представлений по алгебраическим кривым, исходя из других соображений, пришли И. М. Кричевер и С. П. Новиков в работе [11]. Квазиградуированная структура на алгебрах Кричевера–Новикова и их модулях позволяет рассматривать теорию представлений этих алгебр как раздел теории разностных операторов, где существенную роль играет теория коммутирующих разностных операторов, развитая в работах этих авторов [4, 10, 11] и непосредственно приводящая к голоморфным расслоениям на кривых. Фактически связь с теорией солитонов имелась ими ввиду еще при написании работ [5–7]. Заметим, что глубокая связь между теорией представлений аффинных алгебр Кричевера–Новикова и теорией коммутативных колец разностных операторов проявляется, в частности, в доказательстве теоремы 3.1 настоящей работы.

Эта работа возникла как результат наших обсуждений с И. М. Кричевером всех сторон рассматриваемой конструкции, за что автор приносит ему свою глубокую благодарность. При этом И. М. Кричевер сообщил автору результаты работы [11] задолго до ее опубликования, высказал множество идей по использованию этих результатов в поставленной задаче теории представлений и терпеливо обсуждал варианты их реализации. Наиболее принципиальным среди этих предложений был переход от пространства сечений векторного расслоения, на котором, как известно, нет, вообще говоря, действия матричных алгебр, к соответствующему пространству вектор-функций (см. §2), где такое действие имеется.

§2. Базисы Кричевера–Новикова в пространствах сечений голоморфных расслоений

(а) Алгебры Кричевера–Новикова. Пусть Σ — компактная алгебраическая кривая над $\mathbb{C}$ с двумя отмеченными точками $P_{\pm}$, $\mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$ — алгебра мероморфных функций на Σ , регулярных вне точек $P_{\pm}$, и $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли. Тогда

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm}) \oplus \mathbb{C}c \quad (2.1)$$

называется *алгеброй Кричевера–Новикова аффинного типа* [5, 14, 16] с одномерным центром, порожденным элементом c . Элементы алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ будут обозначаться через $\tilde{X} = X + ac$, где $X \in \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$, $a \in \mathbb{C}$. Скобка на $\hat{\mathfrak{g}}$ задается с помощью соотношений

$$[x \otimes A, y \otimes B] = [x, y] \otimes AB + \gamma(x \otimes A, y \otimes B)c, \quad [x \otimes A, c] = 0,$$

где γ — коцикл, определяемый с помощью соотношения

$$\gamma(x \otimes A, y \otimes B) = (x, y) \operatorname{res}_{P_{+}}(A dB). \quad (2.2)$$

Как сказано во введении, на алгебре $\hat{\mathfrak{g}}$ имеется замечательная квазиградуированная структура.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. (а) Пусть $\mathcal{L}$ — алгебра Ли или ассоциативная алгебра, допускающая разложение в прямую сумму конечномерных подпространств $\mathcal{L}_n$:

$\mathcal{L} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_n$. Алгебра $\mathcal{L}$ называется *квазиградуированной* (почти градуированной, обобщенно градуированной), если $\dim \mathcal{L}_n < \infty$ и существуют постоянные R и S , такие, что

$$\mathcal{L}_n \cdot \mathcal{L}_m \subseteq \bigoplus_{h=n+m-R}^{n+m+S} \mathcal{L}_h \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

Элементы подпространства $\mathcal{L}_n$ называются *однородными элементами степени n* .

(b) Пусть $\mathcal{L}$ — квазиградуированная алгебра Ли или ассоциативная алгебра и $\mathcal{M}$ есть $\mathcal{L}$ -модуль, допускающий разложение $\mathcal{M} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_n$ в прямую сумму своих подпространств. Модуль $\mathcal{M}$ называется *квазиградуированным* (почти градуированным, обобщенно градуированным), если $\dim \mathcal{M}_n < \infty$ и существуют постоянные R' и S' , такие, что

$$\mathcal{L}_m \cdot \mathcal{M}_n \subseteq \bigoplus_{h=n+m-R'}^{n+m+S'} \mathcal{M}_h \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Элементы подпространства $\mathcal{M}_n$ называются *однородными элементами степени n* .

Константы R, S, R', S' мы иногда называем ниже величинами разброса градуировки.

Для алгебр Кричевера–Новикова пространством однородных элементов степени n при $n > 0$ и $n < -g$ является пространство $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_n$, где $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$ — подпространство функций, имеющих порядок n в точке P_+ и порядок $-n + g$ в точке P_- (ср. также пример 2.1 ниже). По поводу постоянных R, S и других деталей см. [5, 13].

(b) Голоморфные расслоения. Параметры Тюринга. Рассматривается риманова поверхность Σ рода g и голоморфное расслоение F ранга l на ней. Будем предполагать, что заданы l голоморфных сечений $\Psi_1, \dots, \Psi_l$ расслоения F , образующих базис в слоях над каждой точкой за исключением конечного числа точек $\gamma_1, \dots, \gamma_{gl}$, называемых точками вырождения. Такой набор сечений назовем *оснащением*, а расслоения, обладающие оснащением, назовем, следуя [8, 9], *оснащенными*.

Если выбрать локальную тривиализацию расслоения F и в ней задать сечения $\Psi_1, \dots, \Psi_l$, скажем вектор-столбцами (функций), то из этих вектор-столбцов можно составить матрицу Ψ . Она будет невырожденной везде за исключением точек γ_i , $i = 1, \dots, gl$, где для расслоений общего положения $\det \Psi$ будет иметь простые нули: $\det \Psi(\gamma_i) = 0$, $(\det \Psi)'(\gamma_i) \neq 0$. Говоря ниже о расслоениях общего положения, мы будем иметь ввиду выполнение именно этих условий. Дивизор $D = \gamma_1 + \dots + \gamma_{gl}$ назовем *дивизором расслоения F* . При наших условиях $\text{rank } \Psi(\gamma_i) = l - 1$. Действительно, $(\det \Psi)'(\gamma_i)$ — это сумма детерминантов, у которых $l - 1$ строк — из матрицы Ψ , а одна — из матрицы Ψ' . По условию хотя бы один из этих детерминантов отличен от нуля, а следовательно, какие-то $l - 1$ строк матрицы Ψ линейно независимы.

Тогда для каждого $i = 1, \dots, gl$ нетривиальное решение системы линейных уравнений $\Psi(\gamma_i)\alpha_i = 0$ существует и единственно с точностью до пропорциональности. Пусть $\alpha_i = (\alpha_{ij})_{j=1, \dots, l}^i$ ($i = 1, \dots, gl$). Дивизор расслоения и числа

$(\alpha_{ij})_{i=1,\dots,gl}^{j=1,\dots,l}$ в [8, 9] названы *параметрами Тюринга* расслоения F . Оснащение определено однозначно с точностью до действия на матрицу Ψ элементов группы $GL(l)$ *справа* (в то время как функции перехода действуют на нее *слева*; таким образом, действие группы $GL(l)$ коммутирует с функциями перехода и, тем самым, переводит сечения в сечения). Благодаря этому параметры Тюринга определены однозначно с точностью до пропорциональности и умножения на элементы из $GL(l)$ *слева*. Согласно результатам работы [20], параметры Тюринга определяют расслоение однозначно с точностью до эквивалентности. Следует отметить, что для эквивалентных оснащенных расслоений набор точек $\gamma_1, \dots, \gamma_{gl}$ один и тот же.

Как было отмечено в [8, 9], из результатов А. Н. Тюринга [20] вытекает следующее описание пространства мероморфных сечений расслоения F (мы будем рассматривать только те мероморфные сечения, которые голоморфны вне точек $P_{\pm}$). В слое над любой точкой P вне дивизора D элементы $\Psi_j(P)$ ($j = 1, \dots, l$) образуют базис. Следовательно, для каждого мероморфного сечения S его значение $S(P)$ можно разложить по этому базису. Сопоставим сечению S вектор-функцию $f = (f_1, \dots, f_l)^T$ на римановой поверхности Σ так, что вне D

$$S(P) = \sum_{j=1}^l \Psi_j(P) f_j(P). \quad (2.5)$$

По формуле Кронекера $f_j = \det(\Psi_1, \dots, \Psi_{j-1}, S, \Psi_{j+1}, \dots, \Psi_l)(\det \Psi)^{-1}$, откуда видно, что функции f_j могут быть продолжены в точки дивизора D и будут иметь там не более чем простые полюсы, так как $\Psi_1, \dots, \Psi_l$ в точках дивизора D голоморфны, а $\det \Psi$ имеет там простые нули. В локальных координатах в окрестности точки γ_i в силу формулы (2.5) имеем $S(z) = \Psi(\gamma_i)(\text{res}_{\gamma_i} f)z^{-1} + O(1)$. Левая часть последнего соотношения голоморфна. Следовательно, вычеты функций f_j , $j = 1, \dots, l$, в точке γ_i подчиняются системе линейных уравнений $\Psi(\gamma_i)(\text{res}_{\gamma_i} f) = 0$ — в точности той же, что и параметры Тюринга в этой точке. По предположению матрица $\Psi(\gamma_i)$ имеет ранг $l - 1$. Следовательно, векторы $\text{res}_{\gamma_i} f$ и α_i пропорциональны.

Следующее утверждение представляет собой один из вариантов изложения результатов работы [20].

Предложение 2.1 [8, 9]. *Пространство мероморфных сечений расслоения общего положения F , голоморфных вне отмеченных точек $P_{\pm}$, изоморфно пространству мероморфных вектор-функций $f = (f_1, \dots, f_l)^T$ на той же римановой поверхности, голоморфных вне точек $P_{\pm}$ и дивизора D , в точках последнего имеющих не более чем простые полюсы и удовлетворяющих соотношениям*

$$(\text{res}_{\gamma_i} f_j) \alpha_{ik} = (\text{res}_{\gamma_i} f_k) \alpha_{ij}, \quad i = 1, \dots, gl, \quad j = 1, \dots, l.$$

(с) Базисы Кричевера–Новикова. Изложение этого пункта до предложения 2.3 включительно следует заметке [11].

Для каждой пары целых чисел n, j ($0 \leq j < l$) построим вектор-функцию из пространства, которое определено в предложении 2.1, обозначаемую через $\psi_{n,j}$. Число n назовем ее *степенью*. Функцию $\psi_{n,j}$ зададим ее асимптотиками

в точках $P_{\pm}$. Рассмотрим $\psi_{n,j}$ как вектор-столбец и составим из этих вектор-столбцов матрицу Ψ_n . Положим в точке P_+

$$\Psi_n(z_+) = z_+^n \sum_{s=0}^{\infty} \xi_{n,s}^+ z_+^s, \quad \text{где } \xi_{n,0}^+ = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

а в точке P_-

$$\Psi_n(z_-) = z_-^{-n} \sum_{s=0}^{\infty} \xi_{n,s}^- z_-^s, \quad \text{где } \xi_{n,0}^- = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

где $z_{\pm}$ — локальные параметры в окрестностях точек $P_{\pm}$ соответственно и $*$ обозначают произвольные комплексные числа.

Таким образом, функция Ψ_n имеет нуль порядка n в точке P_+ и полюс порядка n в точке P_- , а ее детерминант имеет gl простых полюсов в точках дивизора D и дополнительный дивизор нулей вне точек $P_{\pm}$, который заранее не фиксируется.

ПРИМЕР 2.1. В базисе Кричевера–Новикова в алгебре $\mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$ с особенностями в двух точках асимптотики имеют вид [5] (при $m > 0$, $m < -g$)

$$A_m \cong \alpha_m^{\pm} z_{\pm}^{\pm m + \varepsilon_{\pm}} (1 + O(z_{\pm})), \quad \alpha_m^+ = 1, \quad (2.8)$$

где $\varepsilon_+ = 0$, $\varepsilon_- = -g$, т. е. сумма порядков (степень дивизора отмеченных точек) равна $-g$ (заметим, что l в данном случае равно 1). Следовательно, имеется еще ровно g нулей вне точек $P_{\pm}$. От изложенного выше общего случая этот пример отличается тем, что дополнительные g полюсов сосредоточены все в тех же точках $P_{\pm}$, а внешний дивизор степени $-g$ отсутствует. Это отличие не является существенным. Изоморфизм устанавливается с помощью умножения (деления) на скалярную функцию, имеющую g -кратный нуль в точке P_- и заданный дивизор (простых) полюсов степени $-g$ (существующую по теореме Римана–Роха).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 [11]. 1. Матричная функция Ψ_n , удовлетворяющая условиям (2.6), (2.7), существует и единственна.

2. Размерность пространства, порожденного вектор-функциями $\psi_{n,j}$ при фиксированном n , равна l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Понятно, что утверждения 1 и 2 эквивалентны. Условия (2.6), (2.7) в части, касающейся матриц $\xi_{n,0}^{\pm}$, — это условия нормировки, позволяющие однозначно выделить вектор-функции $\psi_{n,j}$ в l -мерном пространстве.

Размерность пространства функций с gl полюсами в точках дивизора D , имеющих порядки $\pm n$ соответственно в точках $P_{\pm}$, равна $gl - g + 1$. С учетом того, что вектор-функции у нас имеют размерность l , получим размерность пространства $l(gl - g + 1)$. Но эти функции подчинены $(l - 1)gl$ соотношениям Тюринга. Поэтому размерность рассматриваемого пространства функций равна $l(gl - g + 1) - (l - 1)gl = l$. $\square$

Алгебра $\mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$ естественным образом действует как на сечения расслоения F путем умножения последних на функции, так и на соответствующие вектор-функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Действие элементов алгебры $\mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$ на базисные элементы $\psi_{n,j}$ является квазиградуированным:

$$A_m \psi_{n,j} = \sum_{k=m+n}^{m+n+\bar{g}} \sum_{j'=0}^{l-1} C_{m,n,j}^{k,j'} \psi_{k,j'}, \quad (2.9)$$

где $\bar{g} = g + 1$ при $-g \leq m \leq 0$ и $\bar{g} = g$ в остальных случаях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся асимптотикой (2.8), где $\varepsilon_- = -g$ для $m > 0$ или $m < -g$ и $\varepsilon_- = -g - 1$ для $-g \leq m \leq 0$ [5]. Положим $\bar{g} = -\varepsilon_-$. Тогда, умножая матрицу Ψ_n на A_m , получим порядок z_+^{n+m} в точке P_+ и порядок $z_-^{-n-m-\bar{g}}$ в точке P_- . Этого достаточно для выполнения соотношений (2.9) при некоторых значениях констант $C_{m,n,j}^{k,j'}$. В частности, разброс градуировки по индексу n в общем случае равен g (при $-g \leq m \leq 0$ он равен $g + 1$), т.е. ограничен. Этим квазиградуированность действия доказана. Отметим для дальнейшего, что разброс градуировки по индексу $ln - j$ в общем случае равен lg . $\square$

В отличие от алгебры $\mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$ для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ не существует естественного действия на сечения расслоения. Предположим, однако, что задано представление τ алгебры $\mathfrak{g}$ в l -мерном пространстве. Такое представление индуцирует действие этой алгебры на вектор-функции $\psi_{n,j}$. А именно, пусть $x \in \mathfrak{g}$ и $\tau(x) = (x_{i'}^i)$, где $(x_{i'}^i)$ — матрица, причем индексы i, i' принимают значения от 1 до l . Вектор-функцию $\psi_{n,j}$ представим в виде набора ее координат: $\psi_{n,j} = (\psi_{n,j}^{i'})$. В координатном представлении действие x на $\psi_{n,j}$ запишется в виде $(x\psi_{n,j})^i = \sum_{i'} x_{i'}^i \psi_{n,j}^{i'}$. Располагая действием на вектор-функциях алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$, определим соответствующее действие алгебры Ли $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$:

$$((xA_m)\psi_{n,j})^i = \sum_{k=m+n}^{m+n+\bar{g}} \sum_{j'=0}^{l-1} \sum_{i'} C_{m,n,j}^{k,j'} x_{i'}^i \psi_{k,j'}^{i'}. \quad (2.10)$$

Формула (2.10) представляет собой запись тензорного произведения представления τ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и действия (2.9) алгебры $\mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$. Таким образом, она задает представление тензорного произведения этих алгебр. Из предложения 2.3 вытекает, что действие (2.10) является квазиградуированным с величиной разброса градуировки g по индексу n (соответственно с величиной gl по индексу $ln - j$).

Ниже мы будем интерпретировать $\psi_{n,j}^i$ не как координаты вектор-функций, а как формальные символы, а соотношения (2.10) — как формальные линейные преобразования этих символов. При таком подходе действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ не меняет индексов n, j , а при фиксированных n, j роль старшего вектора играет символ $\psi_{n,j}^l$.

§3. Фермионные представления

Рассмотрим оснащенное голоморфное расслоение F ранга l и соответствующее пространство F_{KN} вектор-функций Кричевера–Новикова. В этом пространстве рассмотрим базис $\{\psi_{n,j} \mid n \in \mathbb{Z}, j = 0, \dots, l-1\}$, соответствующее множество символов $\psi_{n,j}^i$ ($i = 1, \dots, l$) и действие (2.10) на нем, определенные в предыдущем параграфе. Напомним, что это действие зависит от некоторого представления $\tau: \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(l)$. По этим данным построим пространство V_F , называемое пространством полубесконечных форм, и представление $\pi_{F,\tau}$ алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ в нем.

Занумеруем символы $\psi_{n,j}^i$ в порядке лексикографического возрастания троек $(n, -j, i)$, полагая номер элемента $\psi_{0,0}^l$ равным -1 . Пусть $N = N(n, j, i)$ — номер тройки (n, j, i) ; тогда $N(n, j, i) = l^2 n - lj + i - l - 1$. Положим $\psi_N = \psi_{n,j}^i$. Формальные конечные линейные комбинации символов $\{\psi_N \mid N \in \mathbb{Z}\}$ образуют векторное пространство, которое мы обозначим F_{KN}^s .

Пространство V_F строится следующим образом. Его образующими над $\mathbb{C}$ являются формальные выражения вида $\psi_{N_0} \wedge \psi_{N_1} \wedge \dots$, называемые полубесконечными мономами, где $N_0 < N_1 < \dots$. Требуется, чтобы при перестановке $\psi_N, \psi_{N'}$ ($N \neq N'$) полубесконечный моном менял знак и чтобы при достаточно больших k ($k \gg 1$) выполнялось соотношение $N_k = k + m$, где m — целое число, называемое (вслед за [2]) *зарядом* монома (не путать с *центральной зарядом*: из замечания 3.1 следует, что заряд m является скорее компонентой веса).

Степень монома ψ заряда m называется

$$\deg \psi = \sum_{k=0}^{\infty} (N_k - k - m). \quad (3.1)$$

Определенная таким образом степень задает на пространстве V_F квазиградуированную структуру, т. е. разложение в прямую сумму конечномерных подпространств. Заметим, что определение чисел N_k содержит произвол — оно зависит от нумерации элементов $\psi_{n,j}^i$ при заданном n . Важно, что определение степени от этого произвола не зависит, так как изменение этой нумерации сводится к перестановке некоторых слагаемых в формуле (3.1).

Представление $\pi_{F,\tau}$ определяется следующим образом. Рассмотрим алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$, вложенную в алгебру Ли $\hat{\mathfrak{g}}$ как линейное пространство. Любой элемент $x \in \bar{\mathfrak{g}}$ действует на символы ψ_N линейными заменами квазиградуированным образом согласно формуле (2.10). Это в точности означает, что если символы ψ_N рассматривать как формальный базис бесконечномерного линейного пространства, то действие элемента $x \in \bar{\mathfrak{g}}$ в этом базисе задается бесконечной матрицей с конечным числом ненулевых диагоналей или, что эквивалентно, разностным оператором. Следуя [3], обозначим алгебру таких матриц через $\mathfrak{a}_{\infty}$. Таким образом, базису $\{\psi_N\}$ соответствует вложение алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ в алгебру $\mathfrak{a}_{\infty}$. Достаточно определить действие алгебры $\mathfrak{a}_{\infty}$ в V_F , и в силу этого вложения мы получим представление $\hat{\mathfrak{g}}$ в этом пространстве.

Возьмем базисный элемент $E_{IJ} \in \mathfrak{a}_{\infty}$. Определим его действие на полубесконечный моном $\psi = \psi_{I_0} \wedge \psi_{I_1} \wedge \dots$ следующим образом:

$$r(E_{IJ})\psi = (E_{IJ}\psi_{I_0}) \wedge \psi_{I_1} \wedge \dots + \psi_{I_0} \wedge (E_{IJ}\psi_{I_1}) \wedge \dots + \dots \quad (3.2)$$

Ввиду условия $I_k = k + m$ ($k \gg 1$) действие (3.2) корректно определено при $I > J$ и при $I < J$. Оператор $r(E_{II})$ действует на полубесконечный моном умножением на 1 или 0 в зависимости от того, содержит ли последний ψ_I . Поэтому для диагональной матрицы $D = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \lambda_I E_{II}$, имеющей бесконечное число $\lambda_I \neq 0$ с $I > 0$, сумма $D\psi$, определенная в силу формулы (3.2), содержала бы бесконечное множество членов. В этом случае применим следующую регуляризацию [2]. Положим

$$\hat{r}(E_{IJ}) = r(E_{IJ}), \quad \text{если } I \neq J \text{ или } I = J < 0, \quad (3.3)$$

$$\hat{r}(E_{II}) = r(E_{II}) - \text{Id}, \quad \text{если } I \geq 0. \quad (3.4)$$

Тогда имеют место следующие коммутационные соотношения [2]:

$$[\hat{r}(E_{IJ}), \hat{r}(E_{MN})] = \delta_{JM} \hat{r}(E_{IN}) - \delta_{NI} \hat{r}(E_{MJ}), \quad \text{если } (I, J) \neq (N, M), \quad (3.5)$$

$$[\hat{r}(E_{IJ}), \hat{r}(E_{JI})] = \hat{r}(E_{II}) - \hat{r}(E_{JJ}) + \text{Id}. \quad (3.6)$$

Таким образом, в результате регуляризации возникает коцикл α ,

$$\alpha(E_{IJ}, E_{JI}) = -\alpha(E_{JI}, E_{IJ}) = 1, \quad \text{если } I \geq 0, J < 0,$$

$$\alpha(E_{IJ}, E_{MN}) = 0 \quad \text{в остальных случаях.}$$

Вполне очевидно, что действие алгебры $\mathfrak{a}_\infty$ сохраняет заряд монома, так как бесконечный «хвост» каждого из мономов в правой части формулы (3.2) совпадает с «хвостом» монома в левой части этого соотношения. Кроме того, $\pi_{F,\tau}$ является квазиградуированным представлением. Это вытекает из квазиградуированности действия в пространстве F_{KN} (предложение 2.3, соотношения (2.9), (2.10)).

Будем называть *старшими* (или *вакуумными*) мономами полубесконечные мономы вида $\tilde{\psi}_M = \psi_M \wedge \psi_{M+1} \wedge \psi_{M+2} \wedge \dots$ (все индексы идут подряд, начиная с некоторого).

Алгебра $\mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$ также может быть вложена в алгебру $\mathfrak{a}_\infty$ матриц с конечным числом ненулевых диагоналей. Для этого достаточно переписать соотношение (2.9), заменяя в нем $\psi_{n,j}$ на $\psi_{n,j}^i$ и далее заменяя тройку индексов n, j, i соответствующим номером $N = N(n, j, i)$:

$$A_m \psi_N = \sum_{N'=l^2 m + N}^{l^2 m + N + g_l} C_{m,N}^{N'} \psi_{N'},$$

где $g_l = l^2 \bar{g}$ (см. предложение 2.3). Следующая лемма поясняет характер действия алгебры $\mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$ на старшие мономы. Возьмем старший моном $\tilde{\psi}_M = \bigwedge_{N=M}^{\infty} \psi_N$.

ЛЕММА 3.1. $A_m \tilde{\psi}_M$ имеет ненулевую проекцию на $\tilde{\psi}_M$ только для $m = -g, \dots, -1, 0$, и эта проекция равна $\sum_{K=M}^{-1} C_{mK}^K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду соотношения (2.9) для произвольного целого N элемент $A_j \psi_N$ имеет ненулевую проекцию на ψ_N тогда и только тогда, когда ψ_N присутствует в правой части соотношения (2.9), т. е. при $n + m \leq n \leq n + m + g$. Отсюда следует, что $-g \leq m \leq 0$.

Запишем действие элемента A_m , $-g \leq m \leq 0$, бесконечной матрицей с конечным числом диагоналей. Тогда $A_m = \dots + \sum_K C_{mK}^K E_{KK} + \dots$, где многоточия

обозначают члены с E_{IJ} , $I \neq J$. При $I < J$ эти члены переводят $\tilde{\psi}_M$ в 0, а при $I > J$ — либо в 0, либо в моном меньшей степени, нежели $\tilde{\psi}_M$. Для E_{KK} при любом K имеем $E_{KK}\psi_N = \delta_{KN}\psi_N$, а при $K \geq 0$ в силу определенной выше регуляризации $E_{KK}\tilde{\psi}_M = 0$. Следовательно,

$$A_m\tilde{\psi}_M = \left(\sum_{K=M}^{-1} C_{mK}^K \right) \tilde{\psi}_M + \dots, \quad (3.7)$$

где многоточие обозначает сумму членов степени, меньшей, нежели $\tilde{\psi}_M$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Из доказательства леммы 3.1 следует, что собственное значение оператора $\text{Id} = \sum_N E_{NN}$ (тождественный оператор пространства F_{KN}^s) на $\tilde{\psi}_M$ при $M < 0$ совпадает с $-M$, а при $M \geq 0$ равно 0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Два фермионных представления называются *сильно эквивалентными (изоморфными)*, если существует их изоморфизм как линейных пространств, коммутирующий с действием алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$, *квазиоднородный*, т. е. переводящий однородные компоненты первого модуля в однородные компоненты второго, и такой, что образ любого старшего монома снова является старшим мономом того же заряда.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть фермионное представление π задается оснащенный голоморфным расслоением F и неприводимым представлением τ алгебры $\mathfrak{g}$, а фермионное представление π' — оснащенный голоморфным расслоением F' и неприводимым представлением τ' . Представления π и π' эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие оснащенные расслоения F и F' , а представления τ , τ' алгебры $\mathfrak{g}$ равны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть расслоения F и F' эквивалентны и эквивалентность осуществляется отображением $C: F \rightarrow F'$. Очевидно, что C индуцирует следующие изоморфизмы:

(1) пространств глобальных голоморфных сечений, $H^0(\Sigma, F) \cong H^0(\Sigma, F')$; при этом матрицы Ψ и Ψ' , составленные из базисных голоморфных сечений, переходят друг в друга: $\Psi' = C\Psi$;

(2) пространств мероморфных вектор-функций Кривевера–Новикова, рассматриваемых как $\mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$ -модули: $F_{KN} \cong F'_{KN}$, равно как и связанных с ними пространств F_{KN}^s , $F_{KN}'^s$.

Ввиду равенства представлений τ и τ' пространства F_{KN}^s и $F_{KN}'^s$ изоморфны и как $\mathfrak{g}$ -модули. Следовательно, соответствующие представления алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ в пространствах полубесконечных форм над F_{KN}^s и $F_{KN}'^s$ эквивалентны.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Рассмотрим два эквивалентных фермионных представления π и π' алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$, порожденные оснащенные расслоениями F и F' и неприводимыми представлениями τ и τ' соответственно в смысле приведенной выше конструкции. Пусть C — их сильный изоморфизм: $\pi' = C\pi C^{-1}$.

Пусть v — какой-либо старший моном в пространстве представления π и $v' = Cv$. Тогда в силу определения 3.1 v' — тоже старший моном. Наша ближайшая цель — доказательство эквивалентности представлений τ и τ' . С этой целью рассмотрим структуру старших мономов v и v' .

Пусть $v = \psi_M$. Тройка индексов (n, j, i) , такая, что $M = N(n, j, i)$, определяется однозначно (см. выше). Введем для нее обозначения $n = n(M)$, $j = j(M)$,

$i = i(M)$. Выберем v так, что $i = l$. Как отмечено в конце предыдущего параграфа, это равносильно тому, что ψ_M — старший вектор подпредставления, эквивалентного τ , действующего в пространстве F_{KN}^s . Пусть $v' = \tilde{\psi}'_{M'}$ и соответственно $n' = n(M')$, $j' = j(M')$, $i' = i(M')$. По определению квазиоднородный изоморфизм сохраняет заряд. Поэтому $M = M'$; следовательно, $i = i' = l$ и $\psi'_{M'}$ — старший вектор подпредставления, эквивалентного τ' .

Итак, ψ_M и $\psi'_{M'}$ — старшие векторы представлений τ , τ' соответственно. Структура монома $v = \tilde{\psi}_M$, следовательно, такова: на первом месте стоит старший вектор ψ_M представления τ , а справа от него — бесконечное внешнее произведение символов ψ_N , которое может быть разбито на последовательно стоящие группы (назовем их пакетами), каждая из которых есть внешнее произведение (всех) базисных элементов представления τ . Из этого немедленно следует, что для произвольного $x \in \mathfrak{g}$

$$\pi(x)v = (\tau(x)\psi_M) \wedge \psi_{M+1} \wedge \dots \quad (3.8)$$

Действительно, если $\tau(x)$ — нильпотентный элемент, то остальные члены (возникающие при действии $\pi(x)$ на v по формуле Лейбница) равны 0. Если же $\tau(x)$ — диагональный элемент, то их сумма аннулируется для каждого пакета ввиду того, что сумма весов (с учетом их кратности) конечномерного представления полупростой алгебры Ли равна 0. (Для неприводимых представлений $sl(2)$ это очевидно, а все остальные случаи сводятся к этому путем разложения на неприводимые представления простых трехмерных подалгебр, отвечающих простым корням. В случае редутивных алгебр эта аргументация не прошла бы для центрального элемента.) Аналогичное рассмотрение показывает, что

$$\pi'(x)v' = (\tau'(x)\psi'_{M'}) \wedge \psi'_{M'+1} \wedge \dots \quad (3.9)$$

Пусть $x = h$ — картановский элемент, а α_τ , $\alpha_{\tau'}$ — старшие веса представлений τ , τ' соответственно. Тогда из формул (3.8), (3.9) следует, что $\pi(h)v = \alpha_\tau(h)v$ и $\pi'(h)v' = \alpha_{\tau'}(h)v'$. Ввиду эквивалентности представлений π и π' имеем $\alpha_\tau = \alpha_{\tau'}$. Следовательно, τ и τ' эквивалентны.

В пространствах F_{KN}^s и V_F действует алгебра $\mathfrak{g}$ и, следовательно, ее универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$. Там действует также ассоциативная алгебра $\mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$ и тензорное произведение $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$. При этом представление алгебры $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$ по построению распадается в произведение представлений алгебр $U(\mathfrak{g})$ и $\mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$: если $u \otimes A \in U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$, то $\pi(u \otimes A) = \tau(u)\pi(A)$. Мы хотим показать, что из эквивалентности представлений алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ следует эквивалентность соответствующих представлений алгебры $\mathcal{A}(\Sigma, P_\pm)$. Пусть $u = u^{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \dots e_{i_n} \in U(\mathfrak{g})$ (по верхним и нижним индексам предполагается суммирование). Рассмотрим также элемент $u' = u^{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \dots (e_{i_n} A)$, где в каждом мономе функция A отнесена к последнему сомножителю. Тогда $\pi(u') = \tau(u)\pi(A)$. Для эквивалентного представления π' алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ имеем $\pi' = C\pi C^{-1}$, где C — сплетающий оператор, и, следовательно,

$$\tau'(u)\pi'(A) = C(\tau(u)\pi(A))C^{-1}. \quad (3.10)$$

Пусть $Z(\mathfrak{g})$ — центр кольца $U(\mathfrak{g})$. Тогда в силу неприводимости представлений τ , τ' кольцо $Z(\mathfrak{g})$ действует на F_{KN}^s и $F_{KN}^{s'}$ скалярными операторами. Для $u \in Z(\mathfrak{g})$ пусть $\tau(u) = \lambda_u \circ \text{Id}$, $\tau'(u) = \lambda'_u \circ \text{Id}$. При этом так как $\tau \cong \tau'$, то $\lambda_u = \lambda'_u$. Теперь

из равенства (3.10), сокращая на λ_u (что можно сделать хотя бы при одном u), получим $\pi'(A) = C\pi(A)C^{-1}$, что и требовалось.

Покажем, что эквивалентны представления кольца $\mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$ в пространствах F_{KN} и F'_{KN} . Для этого рассмотрим действие элемента $A_n \in \mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$ на мономы вида $\psi_{N,M} = \psi_N \wedge \psi_{M+1} \psi_{M+2} \dots$. Если $M - N$ велико по сравнению с n , то среди структурных констант действия элемента A_n на $\psi_{N,M}$ содержатся структурные константы его действия на ψ_N . Таким образом по первому действию второе восстанавливается. Пусть, как обычно, $N = N(n, j, i)$. Структурные константы действия элемента A_m на $\psi_{n,j}^i$ не зависят от i и совпадают со структурными константами его действия на $\psi_{n,j}$, что видно из сравнения формул (2.9) и (2.10). Таким образом мы получили требуемую эквивалентность F_{KN} и F'_{KN} как $\mathcal{A}(\Sigma, P_{\pm})$ -модулей. В работе [11] показано, что в этом случае оснащенные расслоения F и F' эквивалентны. Вернемся к представлениям τ, τ' . Выше показано, что они эквивалентны, т.е. существует элемент $\gamma \in GL(l)$, такой, что $\tau' = \gamma\tau\gamma^{-1}$. Если матрица γ не была бы скалярной, она «смешивала» бы однородные компоненты $\psi_{n,j}^i$ по индексу i . Таким образом изоморфизм C не был бы квазиоднородным, что противоречит предположению. Следовательно, γ принадлежит центру группы $GL(l)$ и потому $\tau = \tau'$. Это завершает доказательство. $\square$

Введем более общее понятие эквивалентности фермионных представлений, нежели то, которое введено определением 3.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Два фермионных представления называются *эквивалентными (изоморфными)*, если между их пространствами представлений существует изоморфизм вида $C_{\gamma} = C \cdot \tilde{\gamma}$, перестановочный с действием алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$, где C — сильный изоморфизм в смысле определения 3.1, $\gamma \in GL(l)$ и отображение $\tilde{\gamma}$ определено следующим образом: $\tilde{\gamma}(\psi_{N_1} \wedge \psi_{N_2} \wedge \dots) = \gamma\psi_{N_1} \wedge \gamma\psi_{N_2} \wedge \dots$.

Каждое из отображений C и $\tilde{\gamma}$ в этом определении возникает в результате некоторой операции над расслоениями. Сильному изоморфизму C , как показано при доказательстве теоремы 3.1, соответствует изоморфизм расслоений, который может быть задан эквивалентной заменой функций склейки. Ниже, в теореме 3.2, будет показано, что отображение $\tilde{\gamma}$ возникает из замены оснащения в расслоении. Операции этих двух типов коммутируют между собой (см. §2, п. (b)). Следовательно, отображения C и $\tilde{\gamma}$ перестановочны и, таким образом, изоморфизм вида C_{γ} действительно является отношением эквивалентности. Следующая лемма понадобится при доказательстве теоремы 3.2.

ЛЕММА 3.2. *Каковы бы ни были неприводимое l -мерное представление τ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и голоморфное расслоение общего положения F ранга l и степени gl , класс эквивалентности представления τ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством оснащений расслоения F .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $GL(l)$ действует на неприводимых представлениях алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathbb{C}^l$: элемент $\gamma \in GL(l)$ переводит представление τ в эквивалентное представление $\gamma^{-1}\tau\gamma$. При этом представление τ остается неподвижным тогда и только тогда, когда элемент γ скалярен: $\gamma \in \mathbb{C} \cdot \text{Id}$.

Одновременно группа $GL(l)$ действует на оснащениях расслоения F : элемент γ переводит оснащение, задаваемое матрицей сечений Ψ , в оснащение, задаваемое матрицей сечений $\Psi\gamma$ (см. §2, п. (b)). При этом скалярные операторы, и в

точности они, оставляют параметры Тюринга неизменными как точки проективного пространства, поскольку умножают их все на одно и то же число.

Таким образом, оба рассматриваемых множества как многообразия равны $GL(l)/\mathbb{C} \cdot \text{Id}$. $\square$

ТЕОРЕМА 3.2. *Изоморфизм в смысле определения 3.2 является отношением эквивалентности на множестве фермионных представлений. Соответствующее множество классов эквивалентности фермионных представлений находится во взаимно однозначном соответствии с множеством пар $([F], [\tau])$, где $[F]$ — класс эквивалентности (неоснащенных) голоморфных расслоений ранга l степени gl (общего положения), а $[\tau]$ — класс эквивалентности неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{g}$ размерности l .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны голоморфное (неоснащенное) расслоение общего положения F ранга l и степени gl и неприводимое l -мерное представление τ алгебры $\mathfrak{g}$. Выберем в F любые два оснащения, задаваемые матрицами голоморфных сечений Ψ и Ψ' . Тогда существует матрица $\gamma \in GL(l)$, такая, что $\Psi' = \Psi\gamma^{-1}$. Пусть набору данных $\{F, \tau, \Psi\}$ соответствует фермионное представление $\pi = \pi(F, \tau, \Psi)$, а набору данных $\{F, \tau', \Psi'\}$ — фермионное представление $\pi' = \pi(F, \tau', \Psi')$. Тогда между пространствами представлений π и π' возникает изоморфизм $\tilde{\gamma}$: если моном $\psi_{N_1} \wedge \psi_{N_2} \wedge \dots$ принадлежит пространству представления π , то в силу конструкции фермионного представления ему соответствует моном $\gamma\psi_{N_1} \wedge \gamma\psi_{N_2} \wedge \dots$. Это можно увидеть из соотношения (2.5). Для оснащения Ψ оно (в матричном виде) выглядит так: $S = \Psi f$. Соответственно для оснащения Ψ' оно запишется в виде $S = \Psi\gamma^{-1} \cdot \gamma f$, т.е. элементы $f \in F_{KN}$ подвергаются автоморфизму γ .

Итак, показано, что отображение $\tilde{\gamma}$ возникает в результате замены оснащения $\Psi \mapsto \Psi\gamma^{-1}$ в голоморфном расслоении. Как отмечено выше, из этого вытекает, что изоморфизм в смысле определения 3.2 является отношением эквивалентности на множестве фермионных представлений.

Для того чтобы отображение $\tilde{\gamma}$ было перестановочно с действием алгебры $\mathfrak{g}$ (что тоже является требованием определения 3.2), необходимо и достаточно, чтобы $\tau' = \gamma\tau\gamma^{-1}$. Таким образом, мы приходим к следующей картине. Классы сильной эквивалентности фермионных представлений ввиду теоремы 3.1 параметризуются наборами данных $\{F, \tau, \Psi\}$. При фиксированной структуре голоморфного расслоения F изоморфизму $\tilde{\gamma}$ отвечает преобразование соответствующего набора данных: $\Psi \mapsto \Psi\gamma^{-1}$, $\tau \mapsto \gamma\tau\gamma^{-1}$. Следовательно, классам эквивалентности фермионных представлений (в смысле определения 3.2) отвечают орбиты в пространстве наборов данных $\{F, \tau, \Psi\}$ под действием преобразований $F \mapsto F$, $\Psi \mapsto \Psi\gamma^{-1}$, $\tau \mapsto \gamma\tau\gamma^{-1}$. Из леммы 3.2 следует, что эти орбиты находятся во взаимно однозначном соответствии с парами $([F], [\tau])$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Кас V. G., Peterson D. H. Spin and wedge representations of infinite-dimensional Lie algebras and groups. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 3308–3312 (1981).
2. Кас V. G., Raina A. K. Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras. Adv. Ser. in Math. Physics, Vol. 2, World Scientific, 1987.
3. Кац В. Бесконечномерные алгебры Ли. Мир, М., 1993.

4. Кривевер И. М. Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения. УМН, **33**, вып. 4, 215–216 (1978).
5. Кривевер И. М., Новиков С. П. Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов. Функц. анализ и его прил., **21**, вып. 2, 46–63 (1987).
6. Кривевер И. М., Новиков С. П. Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского. Функц. анализ и его прил., **21**, вып. 4, 47–61 (1987).
7. Кривевер И. М., Новиков С. П. Алгебры типа Вирасоро, тензор энергии-импульса и операторные разложения на римановых поверхностях. Функц. анализ и его прил., **23**, вып. 1, 24–40 (1989).
8. Кривевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП). I. Функц. анализ и его прил., **12**, вып. 4, 41–52 (1978).
9. Кривевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения. УМН, **35**, вып. 6, 47–68 (1980).
10. Кривевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения и скалярные разностные операторы. Одноточечные конструкции. УМН, **55**, вып. 1, 187–188 (2000).
11. Кривевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения и коммутирующие разностные операторы. Двухточечные конструкции. УМН, **55**, вып. 3, 181–182 (2000).
12. Schlichenmaier M. Central extensions and semi-infinite wedge representations of Krichever–Novikov algebras for more than two points. Lett. Math. Phys. **20**, 33–46 (1990).
13. Шлихтенмайер М., Шейнман О. К. Теория Весса–Зумино–Виттена–Новикова, уравнения Книжника–Замолотчикова и алгебры Кривевера–Новикова, I. УМН, **54**, вып. 1, 213–250 (1999).
14. Шейнман О. К. Эллиптические аффинные алгебры Ли. Функц. анализ и его прил., **24**, вып. 3, 51–61 (1990).
15. Шейнман О. К. Модули старшего веса некоторых квазиградуированных алгебр Ли на эллиптических кривых. Функц. анализ и его прил., **26**, вып. 3, 65–71 (1992).
16. Шейнман О. К. Аффинные алгебры Ли на римановых поверхностях. Функц. анализ и его прил., **27**, вып. 4, 54–62 (1993).
17. Шейнман О. К. Модули со старшим весом для аффинных алгебр Ли на римановых поверхностях. Функц. анализ и его прил., **29**, вып. 1, 56–71 (1995).
18. Sheinman O. K. Representations of Krichever–Novikov algebras. In: Topics in topology and mathematical physics (Novikov S. P., ed.), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1995, pp. 185–197.
19. Шейнман О. К. Алгебры Кривевера–Новикова и уравнения автодуальности на римановых поверхностях. УМН, **56**, вып. 1, 185–186 (2001).
20. Тюрин А. Н. Классификация векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода. Изв. АН СССР, **29**, 657–688 (1965).
21. Фейгин Б. Л., Фукс Д. Б. Кососимметрические инвариантные дифференциальные операторы на прямой и модули Верма над алгеброй Вирасоро. Функц. анализ и его прил., **16**, вып. 2, 47–63 (1982).

Математический институт РАН им. В. А. Стеклова,
Независимый московский университет
e-mail: oleg@sheinman.mccme.ru

Поступило в редакцию
11 мая 2000 г.