Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Яшагин, Об однотоочечных долях Глисона алгебр Бляшке, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 1, 92–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa26>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:53:09

Об одноточечных долях Глисона алгебр Бляшке

© 2006. Е. И. ЯШАГИН

Введение. Пусть $A(X)$ — максимальная равномерная алгебра на компакте X . Если пространство $\operatorname{Re} A = \{\operatorname{Re} f : f \in A\}$ плотно в пространстве $C_{\mathbb{R}}(X)$ всех вещественнозначных функций на X , то алгебру $A(X)$ называют *алгеброй Дирихле*. Алгебра $A(X)$ *унимодулярна*, если линейные комбинации унимодулярных функций из $A(X)$ плотны в $A(X)$.

Пусть M — множество всех линейных мультипликативных функционалов на $A(X)$. Говорят, что $m_1, m_2 \in M$ принадлежат одной и той же доле Глисона, если $d(m_1, m_2) = \|m_1 - m_2\| < 2$. Принадлежность к одной и той же доле Глисона есть отношение эквивалентности на M . Согласно теореме Вермера (см. [1, 2]), если $G \subset M$ — неодноточечная доля Глисона алгебры Дирихле $A(X)$, то существует гомеоморфизм $\varphi: D^0 \rightarrow G$ аналитического диска $D^0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на G , такой, что преобразование Гельфанда $\hat{f}(z) = \varphi(z)(f)$ для любого $f \in A(X)$ есть аналитическая функция.

Следует отметить, что пример равномерной алгебры, не имеющей неодноточечных долей, такой, что каждая точка из пространства ее максимальных идеалов является точкой пика, был построен Коулом [3]. Бэсенер [4] предложил более конкретный пример равномерной алгебры, определенной на компактном метрическом пространстве (пространстве ее максимальных идеалов) со следующими свойствами: она не совпадает с множеством всех непрерывных функций на пространстве ее максимальных идеалов и каждая точка пространства максимальных идеалов есть точка пика.

В данной работе строится пример максимальной унимодулярной алгебры Дирихле, одноточечные доли Глисона которой плотны в множестве всех линейных мультипликативных функционалов в $*$ -слабой топологии.

1. Алгебра Бляшке. Пусть $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — единичная окружность и $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ — единичный диск в $\mathbb{C}$. Бесконечное семейство $\{b_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ конечных произведений Бляшке

$$b_k(z) = e^{i\theta_k} \prod_{j=1}^{n_k} \frac{z - z_{j,k}}{1 - \bar{z}_{j,k} \cdot z}, \quad 0 \leq |z_{j,k}| < 1, \quad 0 \leq \theta_k < 2\pi, \quad (1)$$

порождает проективный предел

$$D_1 \xleftarrow{b_1} D_2 \xleftarrow{b_2} D_3 \xleftarrow{b_3} \dots$$

единичных дисков $D_k = D$, где $b_k: z \rightarrow b_k(z)$. Сужение этой последовательности на единичные окружности $S_k = S$ образует проективный предел

$$S_1 \xleftarrow{b_1} S_2 \xleftarrow{b_2} S_3 \xleftarrow{b_3} \dots$$

единичных окружностей. Пусть

$$D_{\infty} = \varprojlim_k D_k, \quad S_{\infty} = \varprojlim_k S_k.$$

Отметим, что $b_k(z_{k+1}) = z_k$ и суперпозиция $b_k^\infty = b_k \circ b_{k+1} \circ b_{k+2} \circ \dots$ порождает проекцию $b_k^\infty: D_\infty \rightarrow D_k$, причем $b_k^\infty = b_k \circ b_{k+1}^\infty$, $b_k^\infty(S_\infty) = S$.

Пусть A_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, — замкнутая в $\sup$ -норме подалгебра алгебры $C(D_\infty)$, порожденная единичным элементом алгебры $C(D_\infty)$ и функцией b_k^∞ . Из (1) следует, что

$$b_k^\infty = b_k(b_{k+1}^\infty) = e^{i\theta_k} \prod_{j=1}^{n_k} \frac{b_{k+1}^\infty - z_{j,k}}{1 - \bar{z}_{j,k} \cdot b_{k+1}^\infty}.$$

Пусть

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Алгеброй Бляшке, образованной произведениями Бляшке $\{b_k(z)\}_{k=1}^\infty$, называется равномерная алгебра B на D_∞ , порожденная функциями $\{b_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, т. е. $B = \bar{A}$.

В работе [5] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. (i) Пространство линейных мультипликативных функционалов на алгебре B совпадает с D_∞ .

(ii) Граница Шилова этой алгебры есть S_∞ .

(iii) Сужение алгебры B на S_∞ есть унимодулярная максимальная алгебра Дирихле.

2. Доли Глисона алгебры B . Каждое произведение Бляшке $b(z)$ порождает накрытие $b: D \rightarrow D$, $z \rightarrow b(z)$. Точка $z_0 \in D^0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ называется *точкой разветвления* для накрытия $b: D \rightarrow D$, если у этой точки нет окрестности U , такой, что сужение накрытия b на U инъективно. В этом случае можно подобрать такую окрестность U , чтобы сужение накрытия b на U было биголоморфно отображению $z^k: D \rightarrow D$, $z \rightarrow z^k$ с $k > 1$ (см. [6, с. 43–44]). Число $k = \deg_b(z_0)$ называется степенью разветвления точки z_0 . Согласно предложению 2.1 из [4, р. 15], если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — аналитические функции на D^0 и $z_1 = f_2(z_0) \in D^0$, то

$$\deg_{f_1 \circ f_2}(z_0) = \deg_{f_1}(z_1) \cdot \deg_{f_2}(z_0).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Точка $s \in D_\infty$, $s = (z_1, z_2, \dots, z_k, \dots)$, $b_k(z_{k+1}) = z_k$, называется *особой точкой* в D_∞ , если для любого натурального числа n найдется целое число $k > n$, такое, что точка z_{k+1} является точкой разветвления для накрытия $b_k: D_{k+1} \rightarrow D_k$, т. е. $\deg_{b_k}(z_{k+1}) \geq 2$.

Для долей Глисона и определенных таким образом особых точек из D_∞ справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Каждая доля Глисона, содержащая особую точку, есть одноточечное множество.

3. Пример. Пусть $z_1 \in D^0$ — точка разветвления для накрытия $b_1: D \rightarrow D$, порожденного произведением Бляшке $b_1(z)$. Если $z_0 \in b_2^{-1}(z_1)$, где $b_2(z)$ — произведение Бляшке, то z_0 есть точка разветвления для накрытия $b_1 \circ b_2: D \rightarrow D$. Действительно,

$$\deg_{b_1 \circ b_2}(z_0) = \deg_{b_1}(z_1) \cdot \deg_{b_2}(z_0) \geq 2, \quad \text{так как } \deg_{b_1}(z_1) \geq 2.$$

Данный факт можно применить для доказательства следующей леммы.

ЛЕММА 5. *Для любых точек $w_1, \dots, w_n \in D^0$ найдется конечное произведение Бляшке $b(z)$, такое, что для всех $k = 1, \dots, n$ прообраз $b^{-1}(w_k)$ содержит хотя бы одну точку разветвления для накрытия $b: D \rightarrow D$, $z \rightarrow b(z)$.*

Известно (см. [7, с. 190]), что пространство мультипликативных функционалов диск-алгебры $A(D)$ есть D и база *-слабой топологии на D задается множествами вида $\{z \in D : |z - z_0| < \varepsilon\}$. Аналогично, за базу *-слабой топологии точки $s_0 \in D_\infty$ можно взять множества вида $\{s \in D_\infty : |b_k^\infty(s) - b_k^\infty(s_0)| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, $k = 1, 2, \dots$.

Используя предыдущую лемму, можно сформулировать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 6. *Существует алгебра Бляшке, одноточечные доли Глисона которой плотны в D_∞ в *-слабой топологии.*

Из теорем 2, 4 и 6 непосредственно следует главный результат.

ТЕОРЕМА 7. *Существует максимальная унимодулярная алгебра Дирихле, у которой одноточечные доли Глисона плотны в пространстве мультипликативных функционалов.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Wermer J. J. Duke Math., **27**, 373–382 (1960).
2. Гамелин Т. Равномерные алгебры. Мир, М., 1973.
3. Browder A. Introduction to function algebras. Benjamin, New York, 1969.
4. Basener W. G. Trans. Amer. Math. Soc., **182**, 353–381 (1973).
5. Grigoryan S. A., Tonev T. V. Internat. J. Math. Math. Sci., **27**, No. 10, 599–620 (2001).
6. Форстер О. Римановы поверхности. Мир, М., 1980.
7. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. Мир, М., 1984.

Казанский государственный энергетический университет
e-mail: Evgene.Yashagin@ksu.ru

Поступило в редакцию
31 мая 2004 г.