Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Я. Азизов, В. К. Кириакиди, Г. А. Курина,
Индефинитный подход к задаче о приводимости
неотрицательно гамильтоновой оператор-функции к
блочной-диагональной форме, *Функци. анализ и его
прил.*, 2001, том 35, выпуск 3, 73–75

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa260>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 12:06:40

Индефинитный подход к задаче о приводимости неотрицательно гамильтоновой оператор-функции к блочно-диагональной форме*

© 2001. Т. Я. Азизов, В. К. Кириакиди, Г. А. Курина

В статьях [1, 2] исследуется условная приводимость неотрицательно гамильтоновых оператор-функций к блочно-диагональному виду. Подход, предлагаемый в настоящей работе, позволил получить значительно более общие результаты.

Пусть G — вещественное или комплексное гильбертово пространство и

$$H = G \oplus G. \quad (1)$$

Заданная на отрезке $[0, 1]$ функция $\mathcal{H}(t)$ со значениями в $L(H)$ называется гамильтоновой, если она имеет матричное представление

$$\mathcal{H}(t) = \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & -A^*(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

относительно разложения (1), где $B(t)$ и $C(t)$ — самосопряженные операторы при каждом $t \in [0, 1]$. Оператор-функция $\mathcal{H}(t)$ называется неотрицательно гамильтоновой, если она гамильтонова и $B(t)$, $C(t)$ — неотрицательные операторы при каждом $t \in [0, 1]$; она называется э-дихотомической, если при каждом t спектр $\sigma(\mathcal{H}(t))$ оператора $\mathcal{H}(t)$ не пересекается с мнимой осью, т. е. $\sigma(\mathcal{H}(t)) \subset \mathbb{C}_r \cup \mathbb{C}_l$, где через $\mathbb{C}_r$ и $\mathbb{C}_l$ обозначены правая и левая открытые полуплоскости соответственно.

Непрерывная на отрезке $[0, 1]$ э-дихотомическая оператор-функция $\mathcal{H}(t)$ со значениями в $L(H)$ называется условно (H_1, H_2) -приводимой, если $H = H_1 \oplus H_2$ и существует такая непрерывная обратимая при каждом $t \in [0, 1]$ оператор-функция $V(t)$ со значениями в $L(H)$, что H_i , $i = 1, 2$, инвариантны относительно $\mathcal{H}_1(t) := V^{-1}(t)\mathcal{H}(t)V(t)$:

$$\mathcal{H}_1(t)H_i \subset H_i \quad \text{и} \quad \sigma(\mathcal{H}_1(t)|_{H_i}) \subset \mathbb{C}_{r,l}, \quad i = 1, 2.$$

Если $\mathcal{H}(t)$ есть 1-периодическая, т. е. $\mathcal{H}(0) = \mathcal{H}(1)$, или почти периодическая функция, то такое же требование 1-периодичности или почти периодичности предъявляется и к функции $V(t)$.

Пусть J — самосопряженный унитарный оператор. Оператор $T^c := JT^*J$ является J -сопряженным к оператору T , а $\operatorname{Re} T := \frac{1}{2}(T + T^c)$ и $\operatorname{Im} T := \frac{1}{2i}(T - T^c)$ — соответственно J -вещественная и J -мнимая части оператора T . Линейный ограниченный оператор T называют J -аккретивным, если $\operatorname{Re} T$ есть J -неотрицательный оператор (более подробно см. в [3]).

ТЕОРЕМА 1. *Непрерывная на $[0, 1]$ функция $T(t)$ со значениями в множестве J -аккретивных э-дихотомических операторов из $L(H)$ является условно (H^+, H^-) -приводимой, где*

$$H^+ := \ker(J - I), \quad H^- := \ker(J + I).$$

*Работа поддержана грантами РФФИ №99-01-00391, 99-01-00968 и NWO-RFBR 047-008-008.

Для доказательства теоремы 1 строится обратимая при каждом $t \in [0, 1]$ оператор-функция $V(t) = P_+(t)P^+ + P_-(t)P^-$, где $P_\pm(t)$ — проекторы Рисса, соответствующие спектральным множествам оператора $T(t)$ в $\mathbb{C}_r$ и $\mathbb{C}_l$, а $P^\pm$ — ортопроекторы на $H^\pm$, отвечающие разложению

$$H = H^+ \oplus H^-. \quad (3)$$

Приведем условия, достаточные для э-дихотомичности J -аккретивного оператора (ср. [4]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть T есть J -аккретивный оператор и выполнено хотя бы одно из следующих условий: (а) $\operatorname{Re} T$ имеет ограниченный обратный; (б) $i \operatorname{Im} T$ э-дихотомичен. Тогда T является э-дихотомическим оператором.

Отсюда, в частности, следует, что неотрицательно гамильтонова оператор-функция $\mathcal{H}(t)$ э-дихотомична, если при каждом $t \in [0, 1]$ выполнено хотя бы одно из следующих двух условий (см. [2]): (i) операторы $A(t)$ и $B(t)$ равномерно положительны; (ii) оператор $A(t)$ э-дихотомический.

Следующая теорема является основным результатом этой работы.

ТЕОРЕМА 3. Непрерывная на $[0, 1]$ неотрицательно гамильтонова э-дихотомическая оператор-функция $\mathcal{H}(t)$ является условно (G, G) -приводимой. Более того, $V(t)$ можно выбрать так, чтобы $\mathcal{H}_1(t)$ был гамильтоновым оператором. Если $\mathcal{H}(t)$ — периодическая с периодом 1 или почти периодическая функция, то $V(t)$, а значит, и $\mathcal{H}_1(t)$ могут быть выбраны соответственно периодическими с тем же периодом или почти периодическими.

Поскольку $\mathcal{H}(t)$ является J -аккретивным при $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, из теоремы 1 следует условная (H^+, H^-) -приводимость оператор-функции $\mathcal{H}(t)$ при помощи некоторого оператора $U(t)$, откуда вытекает, что $\mathcal{H}(t)$ условно (G, G) -приводима при помощи оператора $V(t) = U(t)W$, где $W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}$. Чтобы обеспечить гамильтоновость оператора $\mathcal{H}_1(t)$, оператор-функцию $U(t)$ определяют следующим образом:

$$U(t) = \begin{pmatrix} I - Y(t)K(t) & -Y(t)(I - K(t)Y(t))^{-1} \\ K(t)(I - Y(t)K(t)) & I \end{pmatrix},$$

где $K(t)$, $X(t)$, $Y(t)$ — оператор-функции из матричного представления оператора $P_+(t)$ относительно канонического разложения (3), а именно, $P_+(t) = \begin{pmatrix} X(t) & Y(t) \\ K(t)X(t) & K(t)Y(t) \end{pmatrix}$. Если пространство вещественное, то для доказательства теоремы 3 рассматривается комплексификация и используется вещественность проекторов Рисса.

Требование неотрицательности гамильтоновых операторов в теореме 3 является существенным. Например, оператор-функция

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} -\cos 2\pi t & \sin 2\pi t \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t \end{pmatrix} \quad (4)$$

не является условно $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ -приводимой при помощи вещественной 1-периодической оператор-функции [5] (см. также [1]), а оператор-функция $\mathcal{H}(t) = \operatorname{diag}(\mathcal{H}(t),$

$-\mathcal{H}(t))$, где $\mathcal{H}(t)$ определена формулой (4), является в силу теоремы 3 условно $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ -приводимой, причем оператор-функция, осуществляющая это подобие, может быть явно выписана. Отметим, что для $\tilde{\mathcal{H}}(t)$ не выполняются условия приводимости к блочно-диагональной форме из [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Курина Г. А., Мартыненко Г. В. Матем. заметки, **66**, вып. 5, 688–695 (1999).
2. Курина Г. А., Мартыненко Г. В. Докл. РАН, **371**, №5, 594–596 (2000).
3. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Наука, М., 1986.
4. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Наука, М., 1970.
5. Sibuya Y. Math. Ann., **4**, 67–77 (1965).

Воронежский государственный университет
Воронежский высший авиационный инженерный институт
Воронежская государственная лесотехническая академия

Поступило в редакцию
29 августа 2000 г.
В переработанном виде
2 апреля 2001 г.

УДК 517.98

Представление косоэрмитовых элементов в алгебрах фон Неймана косыми коммутаторами

© 2001. Ш. А. Аюпов, Н. А. АЗАМОВ

Имеется целый ряд работ, посвященных представлению элементов алгебры фон Неймана (особенно факторов) в виде коммутаторов (т.е. в виде $[x, y] = xy - yx$) или суммы коммутаторов. Обзор результатов и более подробную библиографию можно найти в работе [1]. Эта проблематика имеет важное значение как для более глубокого изучения самих алгебр фон Неймана, так и для исследования лиевой структуры в этих алгебрах [1, 2].

В настоящей заметке мы рассмотрим проблему представления косоэрмитовых элементов коммутаторами косоэрмитовых элементов (называемых косыми коммутаторами) в вещественных факторах.

Пусть $B(H)$ есть $*$ -алгебра всех ограниченных линейных операторов в комплексном гильбертовом пространстве H . Напомним, что слабозамкнутая вещественная $*$ -подалгебра R в $B(H)$ называется вещественной алгеброй фон Неймана, если она содержит единичный оператор и $R \cap iR = \{0\}$ [2, 3]. Комплексная обертывающая алгебра фон Неймана для вещественной алгебры фон Неймана R совпадает с ее комплексификацией $N = R + iR$. При этом отображение $\alpha: a + ib \mapsto a^* + ib^*$ из N в N является инволютивным (т.е. периода 2) $*$ -антиавтоморфизмом алгебры N . Обратно, для любой алгебры фон Неймана M и ее инволютивного $*$ -антиавтоморфизма α множество $R = \{x \in M : \alpha(x) = x^*\}$ является вещественной алгеброй фон Неймана (подробнее см. [2–4]). Вещественная алгебра фон Неймана R называется вещественным фактором, если ее центр $Z_R = \{x \in R : xy = yx \text{ для любого } y \in R\}$ совпадает с $\{\lambda \mathbf{1} : \lambda \in \mathbb{R}\}$, где $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел.