Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. А. Аюпов, Н. А. Азамов, Представление косоэрмитовых элементов в алгебрах фон Неймана косыми коммутаторами, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 3, 75–77

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa261>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 12:18:56

$-\mathcal{H}(t))$, где $\mathcal{H}(t)$ определена формулой (4), является в силу теоремы 3 условно $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ -приводимой, причем оператор-функция, осуществляющая это подобие, может быть явно выписана. Отметим, что для $\tilde{\mathcal{H}}(t)$ не выполняются условия приводимости к блочно-диагональной форме из [1, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Курина Г. А., Мартыненко Г. В. Матем. заметки, **66**, вып. 5, 688–695 (1999).
2. Курина Г. А., Мартыненко Г. В. Докл. РАН, **371**, №5, 594–596 (2000).
3. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Наука, М., 1986.
4. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Наука, М., 1970.
5. Sibuya Y. Math. Ann., **4**, 67–77 (1965).

Воронежский государственный университет
Воронежский высший авиационный инженерный институт
Воронежская государственная лесотехническая академия

Поступило в редакцию
29 августа 2000 г.
В переработанном виде
2 апреля 2001 г.

УДК 517.98

Представление косоэрмитовых элементов в алгебрах фон Неймана косыми коммутаторами

© 2001. Ш. А. Аюпов, Н. А. АЗАМОВ

Имеется целый ряд работ, посвященных представлению элементов алгебры фон Неймана (особенно факторов) в виде коммутаторов (т.е. в виде $[x, y] = xy - yx$) или суммы коммутаторов. Обзор результатов и более подробную библиографию можно найти в работе [1]. Эта проблематика имеет важное значение как для более глубокого изучения самих алгебр фон Неймана, так и для исследования лиевой структуры в этих алгебрах [1, 2].

В настоящей заметке мы рассмотрим проблему представления косоэрмитовых элементов коммутаторами косоэрмитовых элементов (называемых косыми коммутаторами) в вещественных факторах.

Пусть $B(H)$ есть $*$ -алгебра всех ограниченных линейных операторов в комплексном гильбертовом пространстве H . Напомним, что слабозамкнутая вещественная $*$ -подалгебра R в $B(H)$ называется вещественной алгеброй фон Неймана, если она содержит единичный оператор и $R \cap iR = \{0\}$ [2, 3]. Комплексная обертывающая алгебра фон Неймана для вещественной алгебры фон Неймана R совпадает с ее комплексификацией $N = R + iR$. При этом отображение $\alpha: a + ib \mapsto a^* + ib^*$ из N в N является инволютивным (т.е. периода 2) $*$ -антиавтоморфизмом алгебры N . Обратно, для любой алгебры фон Неймана M и ее инволютивного $*$ -антиавтоморфизма α множество $R = \{x \in M : \alpha(x) = x^*\}$ является вещественной алгеброй фон Неймана (подробнее см. [2–4]). Вещественная алгебра фон Неймана R называется вещественным фактором, если ее центр $Z_R = \{x \in R : xy = yx \text{ для любого } y \in R\}$ совпадает с $\{\lambda \mathbf{1} : \lambda \in \mathbb{R}\}$, где $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел.

Для вещественных факторов известны следующие результаты относительно представления косоэрмитовых элементов косыми коммутаторами.

1. Если R — вещественный фактор типа I_n ($3 \leq n \leq \infty$), то всякий кососимметрический элемент из R представим в виде одного косога коммутатора [2, 5].

2. Если R — собственно бесконечный вещественный фактор (т.е. фактор типа Π_∞ или III), то всякий кососимметрический элемент есть сумма трех косых коммутаторов [2, 6].

3. Если R — вещественный фактор типа Π_1 , то всякий кососимметрический элемент есть сумма конечного числа косых коммутаторов [2, 6], причем вопрос об оценке количества слагаемых здесь открыт.

Представляется правдоподобным, что и в случаях 2 и 3 можно ограничиться одним косым коммутатором. В настоящей работе сделан шаг для доказательства этой гипотезы, а именно доказано, что всякий кососимметрический элемент вещественного фактора R является косым коммутатором в обертывающей алгебре фон Неймана $N = R + iR$.

Рассмотрим комплексный или вещественный фактор M в $B(H)$.

ЛЕММА 1. Пусть s и t — самосопряженные элементы фактора M , а

$$s = \int \lambda de_\lambda \quad u \quad t = \int \lambda df_\lambda$$

— спектральные разложения этих элементов. Если проекторы $e_\lambda - e_\mu$ и $f_\lambda - f_\mu$ эквивалентны для любых λ и μ ($\lambda > \mu$), то существует унитарный элемент u из M , такой, что $u^*su = t$.

Пусть R — вещественный фактор, $N = R + iR$ — его комплексификация, R_k и N_k — кососимметрические части, а R_s и N_s — симметрические части факторов R и N соответственно. Пусть k — кососимметрический элемент из R , $k = is$, где $s \in N_s$, и $s = s_+ - s_-$ — разложение элемента s в разность двух симметрических положительных дизъюнктивных элементов.

ЛЕММА 2. Если R — вещественный фактор, то в факторе $N = R + iR$ существует унитарный элемент u , такой, что $us_+u^* = s_-$.

Носители e_+ и e_- элементов s_+ и s_- соответственно эквивалентны. Элемент $v = e_-ue_+$ является частичной изометрией с начальным проектором e_+ и конечным проектором e_- . Элементы e_+ , e_- и v образуют полный набор матричных элементов, так что всякий элемент из N можно представить в виде 2×2 -матрицы.

Элементу k в этом представлении соответствует матрица $\begin{pmatrix} is_+ & 0 \\ 0 & -is_+ \end{pmatrix}$. Авто-

морфизм $\beta(x) = xux^*$, где $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}$, приводит k к виду $\begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix}$, где s — положительный элемент фактора N . Таким образом, установлена следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть k — кососимметрический элемент вещественного фактора R . Существует изоморфизм фактора $R + iR$ на фактор вида $M_2(\mathbb{C}) \otimes M$, который переводит элемент k в элемент $\begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix}$, где s — положительный элемент фактора M .

Теорему 1 можно рассматривать как обобщение на случай факторов известной теоремы из линейной алгебры о стандартном виде вещественной кососимметрической матрицы.

Пусть $s = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}$. Тогда

$$k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_2 \\ -s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -s_2 \\ 0 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Отсюда следует

ТЕОРЕМА 2. *Всякий кососимметрический элемент вещественного фактора является коммутатором двух кососимметрических элементов из обертывающей алгебры фон Неймана.*

СЛЕДСТВИЕ. *Всякий кососимметрический элемент вещественного фактора R можно представить в виде $[k_1, k_2] + [s_1, s_2]$, где $k_1, k_2 \in R_k$, $s_1, s_2 \in R_s$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Fack Th., de la Harp P. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **30**, No. 3, 49–70 (1980).
2. Аюров Ш. А., Rakhimov A. A., Usmanov Sh. M. Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
3. Stormer E. Pacif. J. Math., **21**, No. 2, 349–370 (1967).
4. Аюнов Ш. А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Ташкент, Изд-во «ФАН», 1986.
5. Садовский В. Ю. Узб. матем. журн., No. 1, 55–63 (1994).
6. Аюров Ш. А., Azatov N. A. Comm. Algebra, **24**, No. 4, 1501–1520 (1996).

Институт математики Академии Наук
республики Узбекистан

Поступило в редакцию
22 июня 2000 г.

УДК 512.62

К определению обобщенных многочленов Чебышёва над конечными полями

© 2001. А. М. ВАШЕВНИК

1. Введение. Теория так называемых детских рисунков Гротендика, ведущая начало от работы [3], в настоящее время развивается довольно интенсивно. Часть этой теории связывает комбинаторно-топологические объекты (графы на поверхностях, которые и называются детскими рисунками) с алгебраическими «функциями Белого», определенными над полем комплексных чисел; см. [4].

Однако функции Белого имеют смысл и над произвольным полем и допускают независимое изучение.

В настоящей работе делается шаг в направлении распространения частного случая теории (в котором функции Белого сводятся к обобщенным многочленам Чебышёва) на произвольные алгебраически замкнутые поля.