Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вашевник, К определению обобщенных многочленов Чебышёва над конечными полями, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 3, 77–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa262>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:47:09

Теорему 1 можно рассматривать как обобщение на случай факторов известной теоремы из линейной алгебры о стандартном виде вещественной кососимметрической матрицы.

Пусть $s = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}$. Тогда

$$k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_2 \\ -s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -s_2 \\ 0 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Отсюда следует

ТЕОРЕМА 2. *Всякий кососимметрический элемент вещественного фактора является коммутатором двух кососимметрических элементов из оберывающей алгебры фон Неймана.*

СЛЕДСТВИЕ. *Всякий кососимметрический элемент вещественного фактора R можно представить в виде $[k_1, k_2] + [s_1, s_2]$, где $k_1, k_2 \in R_k$, $s_1, s_2 \in R_s$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fack Th., de la Harp P.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **30**, No. 3, 49–70 (1980).
2. *Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A., Usmanov Sh. M.* Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
3. *Stormer E.* Pacif. J. Math., **21**, No. 2, 349–370 (1967).
4. *Аюпов Ш. А.* Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Ташкент, Изд-во «ФАН», 1986.
5. *Садовский В. Ю.* Узб. матем. журн., No. 1, 55–63 (1994).
6. *Ayupov Sh. A., Azatov N. A.* Comm. Algebra, **24**, No. 4, 1501–1520 (1996).

Институт математики Академии Наук
республики Узбекистан

Поступило в редакцию
22 июня 2000 г.

УДК 512.62

К определению обобщенных многочленов Чебышёва над конечными полями

© 2001. А. М. ВАШЕВНИК

1. Введение. Теория так называемых детских рисунков Гротендика, ведущая начало от работы [3], в настоящее время развивается довольно интенсивно. Часть этой теории связывает комбинаторно-топологические объекты (графы на поверхностях, которые и называются детскими рисунками) с алгебраическими «функциями Белого», определенными над полем комплексных чисел; см. [4].

Однако функции Белого имеют смысл и над произвольным полем и допускают независимое изучение.

В настоящей работе делается шаг в направлении распространения частного случая теории (в котором функции Белого сводятся к обобщенным многочленам Чебышёва) на произвольные алгебраически замкнутые поля.

Оказывается, что определения, очевидным образом эквивалентные над $\mathbb{C}$, приводят к разным классам многочленов над конечными полями. В дальнейшем будут введены соответствующие определения, установлены связи между ними и приведены примеры, показывающие их неравносильность.

2. Обобщенные многочлены Чебышёва над $\mathbb{C}$. В теории графов на поверхностях и кривых над числовыми полями рассматриваются так называемые обобщенные многочлены Чебышёва (ОМЧ). По определению комплексный многочлен P является ОМЧ, если для некоторых c^+ и c^- прообраз отрезка $[c^+, c^-]$ является деревом (связным графом без циклов). Множество таких многочленов будем обозначать через $\text{ОМЧ}(\mathbb{C})$. Известно, что каждое из следующих 5 условий эквивалентно тому, что многочлен P степени n лежит в $\text{ОМЧ}(\mathbb{C})$.

УСЛОВИЕ 1. Множество критических значений многочлена P содержится в множестве $\{c^-, c^+\}$.

УСЛОВИЕ 2. Множество корней многочлена $\text{Discr}(P - c)$ содержится в множестве $\{c^-, c^+\}$.

УСЛОВИЕ 3. Уравнение $P = c$ имеет n различных корней при $c \neq c^+$ и $c \neq c^-$.

УСЛОВИЕ 4. $(P - c^-)(P - c^+): dP/dx$.

УСЛОВИЕ 5. $m^+ + m^- = n + 1$, где $m^\pm$ — число корней многочлена $P - c^\pm$ (без учета кратностей).

3. ОМЧ над произвольным алгебраически замкнутым полем. Пусть F — алгебраически замкнутое поле, а P — многочлен над этим полем. Пусть $n = \deg P$ и $p = \text{char } F$. Будем предполагать, что p не делит n (тогда $\deg(dP/dx) = n - 1$). Верны следующие соотношения между условиями 1–5:

ТЕОРЕМА 1. $1 \iff 2 \iff 3 \iff 4 \iff 5$.

Доказательство того, что $1 \implies 5$, в случае $F = \mathbb{C}$ основано на следующем утверждении:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть z — корень многочлена P кратности k . Тогда z — корень многочлена dP/dx кратности $k - 1$.

Оно верно лишь для $\text{char } F = 0$ (например, для $P = x^n + x^p$, где $p = \text{char } F$, $n > p$, утверждение неверно). Однако в общем случае можно утверждать следующее:

ЛЕММА 1. Пусть z — корень многочлена P кратности k . Тогда если k не делит p , то z — корень многочлена dP/dx кратности $k - 1$, а если k делит p , то z — корень этого многочлена кратности не менее чем k .

ОСНОВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многочлен P называется ОМЧ в слабом смысле, если он удовлетворяет условию 1, т. е. множество его критических значений содержится в множестве $\{c^-, c^+\}$; P называется ОМЧ в сильном смысле, если он удовлетворяет условию 5, т. е. $m^+ + m^- = n + 1$. Пусть P является ОМЧ в слабом смысле. Рассмотрим разложение $P - c^\pm = \prod_{j=1}^{m^\pm} (x - A_j^\pm)^{v_j^\pm}$, где $A_j^\pm \in F$, $v_j^\pm \in \mathbb{N}$ и все $A_j^\pm$ отличны друг от друга (такое представление существует и единственно, так как F алгебраически замкнуто). Будем говорить, что обобщенному многочлену P соответствует набор чисел $v_j^\pm$, и введем обозначение $\text{val}(P) = [v_1^+, v_2^+, \dots, v_{m^+}^+ \| v_1^-, v_2^-, \dots, v_{m^-}^-]$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть P является ОМЧ в слабом смысле. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) P есть ОМЧ в сильном смысле;
- (2) $v_j^+ \neq 0 \pmod{p}$, $v_j^- \neq 0 \pmod{p}$ для любого j .

4. Примеры ОМЧ в слабом, но не в сильном смысле.

1. $p = 3$, $P = x^4 + x$, $c^- = 0$, $c^+ = 1$. В данном случае

$$P = x(x+1)^3, \quad P-1 = (x+1)(x-A)(x-B)(x-C),$$

где все числа $A, B, C, -1$ различны, и $v^+ = (1, 3)$, $v^- = (1, 1, 1, 1)$. То есть многочлену P соответствует набор чисел $[1, 3 \parallel 1, 1, 1, 1]$. Кроме того, $\text{Discr}(P-c) = c^3$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $B \in \mathbb{Z}$, $0 < B < p$, $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$, и $\{A_i\}_{i=1}^m$ — произвольный набор элементов из F , такой, что не все A_i являются нулями. Тогда $P = x^B \sum_{i=1}^m A_i x^{pi}$ является ОМЧ в слабом смысле.

Для доказательства надо воспользоваться определением 2 и расписать дискриминант, учитывая, что $x(dP/dx) = BP$.

2. $P = x^{2p+1} + x$; $\text{val}(P) = [p, p, 1 \parallel 1 \dots 1]$.

3. $P = x^{2p+1} + 2x^{p+1} + x$; $\text{val}(P) = [2p, 1 \parallel 1 \dots 1]$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $B \in F$, $B \neq 0$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$, $n > mp$, и $\{A_i\}_{i=1}^m$ — произвольный набор элементов из F . Тогда $P = Bx^n + \sum_{i=1}^m A_i x^{pi}$ является ОМЧ в слабом смысле.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3 с использованием равенства $dP/dx = Bnx^{n-1}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ являются ОМЧ в слабом смысле. Запишем разложения

$$P(x) - c^\pm = \prod_{j=1}^{m^\pm} (x - A_j^\pm)^{v_j^\pm}, \quad Q(x) - c^\pm = \prod_{j=1}^{s^\pm} (x - C_j^\pm)^{u_j^\pm}.$$

Пусть наборы v_j^+ и u_j^+ совпадают и $m^+ = s^+ = 2$. Тогда совпадают наборы v_j^- и u_j^- .

Для доказательства нужно перевести A_j^+ в C_j^+ аффинным преобразованием; тогда P перейдет в Q .

Автор благодарит Г. Б. Шабата за постоянное внимание и множество полезных советов при подготовке этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- 1.** Shabat G., Zvonkin A. In: Jerusalem combinatorics'93, Contemp. Math., Vol. 178, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 233–275. **2.** Кострикин А. И. Введение в алгебру. Основы алгебры, Наука, М., 1994. **3.** Grothendieck A. Esquisse d'un programme, London Math. Soc., Cambridge Univ. Press, 1997. **4.** Shabat G. B., Voeyvodsky V. A. In: The Grothendieck Festschrift, Vol. III, Progr. Math., Vol. 88, Birkhauser, Boston, 1990, pp. 199–227.