Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Курлин, Трехстраничные диаграммы Дынникова заузленных 3-валентных графов, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 3, 84–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa264>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 04:12:24

(1997). **7.** Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М., ИЛ, 1960. **8.** Ott C. Pacific J. Math., **173**, No. 1, 173–179 (1996). **9.** Туровский Ю. В. Спектральная теория операторов и ее прил., вып. 6, 144–181 (1985). **10.** Frunza St. Banach Center Publ., **8**, PWN, 281–287 (1982). **11.** Wojtynski W. J. Func. Anal., **153**, 405–413 (1998). **12.** Бурбаки Н. Спектральная теория. М., Мир (1972). **13.** Досиев А. А. Функц. анализ и его прил., **34**, вып. 4, 82–84 (2000). **14.** Туровский Ю. В. Функц. анализ и его прил., **18**, вып. 2, 77–78 (1984). **15.** Beltita D. Stud. Math., **135**, 163–178 (1999).

Институт математики и механики
Академии наук Азербайджана
e-mail: info@sinam.net

Поступило в редакцию
26 октября 2000 г.

УДК 515.162.8

Трехстраничные диаграммы Дынникова заузленных 3-валентных графов

© 2001. В. А. Курлин

Недавно И. А. Дынников предложил новый способ кодирования неориентированных зацеплений с помощью трехстраничных диаграмм (см. [1]). С его помощью была получена алгебраическая классификация всех изотопических классов неориентированных зацеплений (см. [2]). Мы обобщаем этот подход на 3-валентные графы. Конечный граф называется *3-валентным*, если из каждой его вершины выходят ровно три ребра. Мы рассматриваем только 3-валентные неориентированные графы, в том числе несвязные, с петлями и мультиребрами. Под *заузленным графом* мы будем понимать вложение графа в $\mathbb{R}^3$, при котором ребра переходят в конечные ломаные. Будем исследовать заузленные графы с точностью до объемлемой изотопии. *Объемлемая изотопия двух графов* — это непрерывное семейство гомеоморфизмов $\phi_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \in [0, 1]$, такое, что $\phi_0 = \text{id}$, а ϕ_1 переводит один из этих графов в другой. Изотопические инварианты заузленных графов изучались в [3, 4]. Другие отношения эквивалентности, например конкордантность, гомотопность и гомологичность, см. в [5].

Понятие заузленного графа мотивировано с теоретической и практической точек зрения. Во-первых, задача изотопической классификации заузленных графов является частным случаем общей топологической проблемы классификации вложений в евклидово пространство. К тому же мы получаем естественное расширение классической теории узлов на более сложные одномерные объекты. Многие инварианты обычных зацеплений обобщаются на графы, например, полиномы Александера и инварианты Васильева (см. [6, 7]). Как и обычные зацепления, заузленные графы легко изображать с помощью плоских диаграмм, которые определяются с точностью до следующих движений Райдемайстера:

Во-вторых, заузленные графы являются математической моделью для длинных белковых соединений в органической химии и молекулярной биологии. Известно, что одной из устойчивых первичных структур молекулы ДНК, состоящей из нескольких сотен атомов, является скрученная α -спираль (см. [8]). Устойчивость обусловлена действием водородных связей. Добавляя эти связи к молекуле в качестве виртуальных ребер, мы получим некоторый 3-валентный граф в $\mathbb{R}^3$. Одна из главных проблем современной биологии — это предсказание реальной формы молекулы в зависимости от ее атомного состава (см. [9]). В частности, интересно, какие пространственные графы могут получиться для данной молекулы. Именно пространственная структура молекулы отвечает за ее разнообразные химические свойства. Например, большое значение имеет, может ли молекула принять форму, зеркально симметричную исходной [10]. Основная трудность — это абсолютная открытость любой биологической системы для действия внешних сил. Некоторые ферменты могут изменять топологический тип молекулы. Однако этим процессом можно управлять, что помогает при синтезе соединений определенного типа (см. [11]).

Далее наши рассуждения будут следовать работе [12]. Рассмотрим полугруппу Stg с множеством образующих $A = \{a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i, h_i; i \in \mathbb{Z}_3\}$ и следующими 90 соотношениями ($i = 1, 2, 3$; в силу соотношения (3) одно из соотношений (4) можно выбросить):

- (1) $a_i = a_{i+1}d_{i-1}$, $b_i = a_{i-1}c_{i+1}$, $c_i = b_{i-1}c_{i+1}$, $d_i = a_{i+1}c_{i-1}$,
- (2) $e_i = d_i g_i = g_{i-1}b_{i+1} = a_{i+1}h_{i-1}$, $f_i = h_i b_i = d_{i+1}h_{i-1} = g_{i-1}c_{i+1}$,
- (3) $d_1 d_2 d_3 = 1$,
- (4) $b_i d_i = d_i b_i = 1$,
- (5) $(d_{i-1}c_{i-1})x = x(d_{i-1}c_{i-1})$, где $x \in \{c_i, e_i, b_{i-1}d_i d_{i-1}\}$,
- (6) $uv = vu$, где $u \in \{a_{i-1}b_{i-1}, e_{i-1}b_{i-1}, b_{i+1}d_{i-1}d_{i+1}b_{i-1}\}$, $v \in \{a_i, b_i, c_i, e_i, b_{i-1}d_i d_{i-1}\}$.

ТЕОРЕМА 1. *Любой заузленный граф кодируется некоторым элементом полугруппы Stg .*

ТЕОРЕМА 2. *Зазуленные графы изотопны тогда и только тогда, когда представляющие их элементы совпадают в Stg .*

ТЕОРЕМА 3. *Элемент полугруппы Stg кодирует некоторый заузленный граф тогда и только тогда, когда он центральный, т.е. коммутирует с любым элементом этой полугруппы.*

Теорема 3 доказывается аналогично лемме 3 из [2]. Пусть P_1, P_2, P_3 — три полуплоскости в $\mathbb{R}^3$, границы которых совпадают: $\partial P_1 = \partial P_2 = \partial P_3 = \alpha$ (см. правую часть приведенного ниже рисунка). Положим $\mathbb{Y} = P_1 \cup P_2 \cup P_3$. На оси α выберем ориентацию. *Трехстраничная диаграмма (3-диаграмма)* заузленного графа Γ — это такое вложение графа Γ в $\mathbb{Y}$, что

- (а) все основные вершины из Γ лежат на оси α ;
- (б) (трансервальность к α) пересечение $\Gamma \cap \alpha = A_1 \cup \dots \cup A_m$ конечно;
- (с) две дуги, примыкающие к вершине степени 2, лежат в разных полуплоскостях;
- (д) из трех дуг, примыкающих к 3-валентной вершине, две лежат в одной полуплоскости, третья лежит в другой;
- (е) (монотонность) ограничение ортогональной проекции $\mathbb{R}^3 \rightarrow \alpha \approx \mathbb{R}$ на каждую из связных компонент пересечения $\Gamma \cap P_i$ (арку) является монотонной функцией для любого $i = 1, 2, 3$.

Доказательство теоремы 1. 3-диаграмма называется *специальной*, если каждая арка в полуплоскости P_2 имеет длину 2, т. е. соединяет некоторую вершину A_i с вершиной A_{i+2} , или длину 1 и тогда содержит 3-валентную вершину. По плоской диаграмме графа построим специальную трехстраничную, определяющую тот же заузленный граф. Для каждого перекрестка плоской диаграммы D отметим маленький отрезок верхней дуги (*промежуточный мост*), а для 3-валентной вершины — две выходящие из нее дуги (*основной мост*).

Выберем такой несамопересекающийся ориентируемый путь в плоскости диаграммы D с концами вне D , чтобы он проходил по каждому мосту ровно один раз и пересекал оставшуюся часть диаграммы трансверсально. Деформируем плоскость диаграммы так, чтобы этот путь стал отрезком некоторой прямой α . Затем приклеим вдоль этой прямой полуплоскость P_2 . Вытолкнем в P_2 каждый промежуточный мост в виде одной тривиальной арки, а каждый основной — в виде двух арок с 3-валентной вершиной на стыке:

Очевидно, что всю 3-диаграмму заузленного графа можно однозначно восстановить по части диаграммы в малой окрестности оси α . Для этого достаточно в каждой полуплоскости соединять звенья, направленные друг к другу, начиная с самых внутренних. 3-диаграмма в окрестности α может состоять из элементов 24 типов:

Пусть W — множество всех слов в таком алфавите $\mathbb{A}$, включая пустое слово $\emptyset$. Для данной 3-диаграммы Γ выпишем последовательно типы всех вершин на оси α . Получим слово $w_\Gamma \in W$ (для изображенной выше диаграммы $w_\Gamma = a_3 e_1 b_3 d_3 a_2 b_3 b_1 c_2 b_3 d_3 h_3 c_3$). Заметим, что таким образом получаются не все

слова из W , а только *сбалансированные*. Есть простой геометрический критерий сбалансированности слова: все звенья, выходящие из точек на оси, должны состыковываться друг с другом. Это легко записать и алгебраически через алфавит A . Для несбалансированных слов звенья соответствующей 3-диаграммы могут выходить на ее край, не соединяясь с другими. $\square$

Набросок доказательства теоремы 2. Все соотношения (1)–(6) легко реализуются изотопией в $\mathbb{R}^3$. Эту изотопию можно провести в двумерном комплексе $\mathbb{T}$, полученном из $\mathbb{Y}$ приклейкой полуплоскости P_4 к $P_1 \cup P_2$ по прямой, перпендикулярной α . Любая 3-диаграмма редуцируется к специальной, согласно следующему утверждению, которое доказывается аналогично предложению 2 в [1].

ЛЕММА 1. *Любое сбалансированное слово для любого $i = 1, 2, 3$ разлагается с помощью соотношений (1)–(6) на следующие подслова: $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, b_{i-1}b_id_{i-1}, b_{i-1}d_id_{i-1}$.* $\square$

Осталось показать, что соотношений (1)–(6) достаточно для реализации изотопии графов. Введем полугруппу Sit бесконечных плетений. Расположим две положительные оси $\mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}^3$ горизонтально друг над другом и обозначим через V трехмерный слой между горизонтальными плоскостями, в которых лежат эти оси. Рассмотрим 3-валентный граф T , содержащий конечное число 3-валентных вершин и счетное число изолированных отрезков. Назовем *бесконечным плетением* вложение графа T в указанный слой V , такое, что концевые вершины графа T совпадают с натуральными точками на осях $\mathbb{R}_+$. Мы предполагаем, что достаточно далеко от нулевого края все отрезки плетения параллельны друг другу, но могут не быть вертикальными. Отношение эквивалентности на таких графах — объемлемая изотопия в V , неподвижная на границе слоя. *Произведение* плетений $T_1 T_2$ получается приклейкой верхней оси $\mathbb{R}_+$ плетения T_2 к нижней оси $\mathbb{R}_+$ плетения T_1 . Так мы получаем структуру полугруппы Sit с единицей 1, состоящей из вертикальных отрезков. Следующая лемма доказывается аналогично теореме Райдемайстера. Фактически соотношения (7)–(15) геометрически отвечают переходу через особенности коразмерности 1 в пространстве всех бесконечных плетений с самопересечениями.

ЛЕММА 2. *Полугруппа Sit порождена образующими $u_k, v_k, \sigma_k^{\pm 1}, \lambda_k, y_k$,*

и соотношениями $(k + 1 < l)$

$$(7) \begin{cases} u_k u_l = u_{l+2} u_k, & u_k v_l = v_{l+2} u_k, & u_k \sigma_l = \sigma_{l+2} u_k, & u_k \lambda_l = \lambda_{l+2} u_k, & u_k y_l = y_{l+2} u_k, \\ v_k v_l = v_{l-2} v_k, & v_k \sigma_l = \sigma_{l-2} v_k, & v_k \lambda_l = \lambda_{l-2} v_k, & v_k y_l = y_{l-2} v_k, & \lambda_k \sigma_l = \sigma_{l-1} \lambda_k, \\ \lambda_k \lambda_l = \lambda_{l-1} \lambda_k, & \lambda_k y_l = y_{l-1} \lambda_k, & y_k \sigma_l = \sigma_{l+1} y_k, & y_k y_l = y_{l+1} y_k, & \sigma_k \sigma_l = \sigma_l \sigma_k, \end{cases}$$

$$(8) \quad v_{k+1} u_k = 1 = v_k u_{k+1},$$

$$(11) \quad v_k \sigma_k = v_k, \quad \sigma_k u_k = u_k,$$

$$(9) \quad \lambda_k = v_{k+1} y_k, \quad y_k = \lambda_k u_{k+1},$$

$$(12) \quad \sigma_k \sigma_k^{-1} = 1 = \sigma_k^{-1} \sigma_k,$$

$$(10) \quad v_{k+2} \sigma_{k+1} u_k = \sigma_k^{-1} = v_k \sigma_{k+1} u_{k+2},$$

$$(13) \quad \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1},$$

$$(14) \quad \lambda_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_k \lambda_{k+1}, \quad \sigma_k \sigma_{k+1} y_k = y_{k+1} \sigma_k, \quad \sigma_k \lambda_k = \lambda_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, \quad y_k \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k y_{k+1},$$

$$(15) \quad \lambda_k \sigma_k = \lambda_k, \quad \sigma_k y_k = y_k. \quad \square$$

Любое бесконечное плетение можно преобразовать в 3-диаграмму, поставив его оси $\mathbb{R}_+$ вертикально, приклеив к полученному нижнему краю $\mathbb{R} \times 0$ две полуплоскости и стянув все перекрестки и 3-валентные вершины на ось $\mathbb{R} \times 0$. Это задает вложение полугруппы бесконечных плетений Sit в полугруппу Stg . В частности, образующим соответствуют *элементарные* слова: $u_k = d_3^k c_3 b_3^{k-1}$, $v_k = d_3^{k-1} a_3 b_3^k$, $\sigma_k = d_3^{k-1} b_2 d_3 d_2 b_3^k$, $\lambda_k = d_3^{k-1} e_3 b_3^k$, $y_k = d_3^k f_3 b_3^{k-1}$. Любое сбалансированное слово разлагается на элементарные аналогично тому, как это делается в [12], т. е. такое слово определяет некоторое бесконечное плетение. Поскольку каждый заузленный граф представляется сбалансированным словом, ему можно поставить в соответствие бесконечное плетение. При этом изотопным заузленным графам отвечают изотопные бесконечные плетения. Чтобы закончить доказательство теоремы 2, осталось вывести соотношения (7)–(15) полугруппы Sit из соотношений (1)–(6) полугруппы Stg . Разложение на элементарные слова и вывод соотношений аналогичны соответствующим разложениям в [12]. $\square$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору В. М. Бухштаберу за поддержку и доценту И. А. Дынникову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дынников И. А. Функц. анализ и его прил., **33**, вып. 4, 25–37 (1999).
2. Дынников И. А. Функц. анализ и его прил., **34**, вып. 1, 29–40 (2000).
3. Kauffman L. Trans. Amer. Math. Soc., **311**, No. 2, 697–710 (1989).
4. Jonish, D., Millett, K. C. Trans. Amer. Math. Soc., **327**, No. 2, 655–702 (1991).
5. Taniyama K. Topology, **33**, No. 3, 509–523 (1994).
6. Litherland R. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **106**, No. 1, 95–106 (1989).
7. Stenford T. Topology, **35**, No. 4, 1027–1050 (1996).
8. Франк-Каменецкий Самая главная молекула (Библиотечка «Квант»).
9. Альбертс и др. Молекулярная биология клетки, т. 1.
10. Шилл Г. Катенаны, ротоксаны и узлы. Мир, М., 1973.
11. Simon J. Topology, **25**, 229–235 (1986).
12. Дынников И. А. Конечно-определенные полугруппы и группы в теории узлов. Труды МИАН, т. 231.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию
22 июня 2000 г.

УДК 517.535.2

Модули эллиптических кривых и числа вращения диффеоморфизмов окружности

© 2001. В. С. Молдавский

Комплексное возмущение аналитического диффеоморфизма окружности — это биголоморфное отображение, фундаментальная область которого — эллиптическая кривая. В. И. Арнольд предположил, что модуль этой кривой стремится к числу вращения исходного диффеоморфизма при стремлении к нулю параметра