Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Молдавский, Модули эллиптических кривых и числа вращения диффеоморфизмов окружности, *Функц. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 3, 88–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa265>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 16:34:24

$$(14) \quad \lambda_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_k \lambda_{k+1}, \quad \sigma_k \sigma_{k+1} y_k = y_{k+1} \sigma_k, \quad \sigma_k \lambda_k = \lambda_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, \quad y_k \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k y_{k+1},$$

$$(15) \quad \lambda_k \sigma_k = \lambda_k, \quad \sigma_k y_k = y_k. \quad \square$$

Любое бесконечное плетение можно преобразовать в 3-диаграмму, поставив его оси $\mathbb{R}_+$ вертикально, приклеив к полученному нижнему краю $\mathbb{R} \times 0$ две полуплоскости и стянув все перекрестки и 3-валентные вершины на ось $\mathbb{R} \times 0$. Это задает вложение полугруппы бесконечных плетений Sit в полугруппу Stg . В частности, образующим соответствуют *элементарные* слова: $u_k = d_3^k c_3 b_3^{k-1}$, $v_k = d_3^{k-1} a_3 b_3^k$, $\sigma_k = d_3^{k-1} b_2 d_3 d_2 b_3^k$, $\lambda_k = d_3^{k-1} e_3 b_3^k$, $y_k = d_3^k f_3 b_3^{k-1}$. Любое сбалансированное слово разлагается на элементарные аналогично тому, как это делается в [12], т. е. такое слово определяет некоторое бесконечное плетение. Поскольку каждый заузленный граф представляется сбалансированным словом, ему можно поставить в соответствие бесконечное плетение. При этом изотопным заузленным графам отвечают изотопные бесконечные плетения. Чтобы закончить доказательство теоремы 2, осталось вывести соотношения (7)–(15) полугруппы Sit из соотношений (1)–(6) полугруппы Stg . Разложение на элементарные слова и вывод соотношений аналогичны соответствующим разложениям в [12]. $\square$

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору В. М. Бухштаберу за поддержку и доценту И. А. Дынникову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дынников И. А. Функц. анализ и его прил., **33**, вып. 4, 25–37 (1999).
2. Дынников И. А. Функц. анализ и его прил., **34**, вып. 1, 29–40 (2000).
3. Kauffman L. Trans. Amer. Math. Soc., **311**, No. 2, 697–710 (1989).
4. Jonish, D., Millett, K. C. Trans. Amer. Math. Soc., **327**, No. 2, 655–702 (1991).
5. Taniyama K. Topology, **33**, No. 3, 509–523 (1994).
6. Litherland R. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **106**, No. 1, 95–106 (1989).
7. Stenford T. Topology, **35**, No. 4, 1027–1050 (1996).
8. Франк-Каменецкий Самая главная молекула (Библиотечка «Квант»).
9. Альбертс и др. Молекулярная биология клетки, т. 1.
10. Шилл Г. Катенаны, ротоксаны и узлы. Мир, М., 1973.
11. Simon J. Topology, **25**, 229–235 (1986).
12. Дынников И. А. Конечно-определенные полугруппы и группы в теории узлов. Труды МИАН, т. 231.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию
22 июня 2000 г.

УДК 517.535.2

Модули эллиптических кривых и числа вращения диффеоморфизмов окружности

© 2001. В. С. Молдавский

Комплексное возмущение аналитического диффеоморфизма окружности — это биголоморфное отображение, фундаментальная область которого — эллиптическая кривая. В. И. Арнольд предположил, что модуль этой кривой стремится к числу вращения исходного диффеоморфизма при стремлении к нулю параметра

возмущения. В работе доказывается гипотеза Арнольда для аналитически эквивалентных повороту диффеоморфизмов окружности. Доказательство проводится с помощью теории квазиконформных отображений (см. [2]).

Пусть $F: S^1 \rightarrow S^1$ — аналитический диффеоморфизм окружности. Поднимем F до диффеоморфизма прямой $\tilde{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Обозначим через F_α отображение $\tilde{F} + i\alpha$ нижней границы полосы $\Pi_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im } z \leq \alpha\}$ на верхнюю. отождествим точки из Π_α , различающиеся на целое действительное число; у полученного цилиндра склеим основания по отображению F_α . Получится эллиптическая кривая T_α с комплексной структурой, унаследованной от накрывающей полосы. Она биголоморфно эквивалентна $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + b_\alpha \mathbb{Z})$, где $\text{Im } b_\alpha > 0$ и b_α определено с точностью до прибавления целого числа. Положим $\mu_\alpha := b_\alpha \bmod \mathbb{Z}$ и будем называть μ_α модулем эллиптической кривой T_α . Оказывается, что в достаточно общем случае модули кривых T_α стремятся к числу вращения диффеоморфизма F . Точнее, верен следующий результат:

ТЕОРЕМА 1. *Пусть F — аналитически эквивалентный повороту на $2\pi\mu$ аналитический диффеоморфизм окружности. Тогда модули μ_α эллиптических кривых T_α , построенных по отображению F , стремятся к μ при $\alpha \rightarrow 0$.*

Из теоремы Эрмана [3] вытекает

СЛЕДСТВИЕ. *Если F — аналитический диффеоморфизм окружности с числом вращения μ , принадлежащим некоторому множеству полной меры, то $\mu_\alpha \rightarrow \mu$ при $\alpha \rightarrow 0$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [2]. *Среди отображений плоскости с выколотыми точками $0, 1, \tau_1, 1 + \tau_1$ на плоскость с выколотыми точками $0, 1, \tau_2, 1 + \tau_2$, $\text{Im } \tau_i > 0$, аффинное отображение имеет наименьшее квазиконформное отклонение, равное $e^{d[\tau_1, \tau_2]}$, где $d[\cdot, \cdot]$ — расстояние в метрике Лобачевского на верхней полуплоскости.*

ЛЕММА 1. *Рассмотрим эллиптические кривые T_1 и T_2 , $T_i = \mathbb{C}/\Gamma_i$, $\Gamma_i = \mathbb{Z} + \tau_i \mathbb{Z}$, $\text{Im } \tau_i > 0$. Если существует K -квазиконформный гомеоморфизм $f: T_1 \rightarrow T_2$, то $d[\tau_1, \tau_2 + m] < \ln K$ для некоторого целого m .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поднимем отображение f до отображения $\tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ универсальных накрывающих. Линейными заменами в образе и прообразе добьемся того, чтобы $\tilde{f}(\Gamma_1) = \Gamma_2$, $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{f}(1) = 1$. Тогда $\tilde{f}(\tau_1) \equiv \tau_2 \pmod{\mathbb{Z}}$. Пользуясь предложением 1 и учитывая, что квазиконформное отклонение отображения $\tilde{f}$ совпадает с квазиконформным отклонением отображения f , получим утверждение леммы.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Пусть T_α — эллиптическая кривая из теоремы 1. Тогда существует квазиконформное отображение $T_\alpha \rightarrow T_\alpha^0 = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + (\mu + i\alpha)\mathbb{Z}$, показатель квазиконформности которого оценивается сверху величиной, не зависящей от α , при всех $\alpha > 0$ из некоторого полуинтервала $(0, \varepsilon]$.*

Покажем, что из основной леммы следует теорема 1. По лемме 1 при α , стремящемся к 0, расстояние между μ_α и $\mu + t + i\alpha$ остается меньше константы C в метрике Лобачевского для некоторого целого t , зависящего от α , а значит, в евклидовой метрике расстояние между μ_α и $\mu + t + i\alpha$ стремится к 0; отсюда следует, что $t = 0$ для малых α . Тогда $|\mu + i\alpha - \mu_\alpha| \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$, что и доказывает лемму.

Доказательство основной леммы проводится в несколько шагов.

Шаг 1. Пусть $H(x) = x + h(x)$ — аналитическая замена, сопрягающая диффеоморфизм $\tilde{F}$ с поворотом: $H \circ \tilde{F} \circ H^{-1} = x + \mu$. Эта замена продолжается голоморфно в полосу $|\operatorname{Im} z| \leq \alpha_0$ для некоторого $\alpha_0 > 0$. Пусть $\alpha < \alpha_0$; тогда кривая T_α биголоморфно эквивалентна эллиптической кривой, полученной из криволинейной полосы $H(\Pi_\alpha)$ следующими отождествлениями: $z \equiv z + 1$ для всех точек полосы и $H(x) \equiv H(F_\alpha(x))$ для $x \in \mathbb{R}$. Последнюю склейку можно записать как $x \equiv G_\alpha(x)$, где

$$G_\alpha(x) = H(\tilde{F} \circ H^{-1}(x) + i\alpha). \quad (1)$$

Разлагая правую часть формулы (1) в ряд Тейлора по α , получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Отображение (1) имеет вид*

$$G_\alpha(x) = x + \mu + i\alpha H'(\tilde{F} \circ H^{-1}(x)) + \alpha^2 g(x, \alpha), \quad (2)$$

где $g(x, \alpha)$ — аналитическая функция на $\mathbb{R} \times [0; \alpha_0]$, 1-периодическая по x .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Верхняя граница криволинейной полосы $H(\Pi_\alpha)$ является графиком функции $y = L_\alpha(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $X_\alpha(x) = \operatorname{Re} G_\alpha(x)$ и $Y_\alpha(x) = \operatorname{Im} G_\alpha(x)$. Из предложения 2 следует, что

$$X_\alpha(x) = x + \mu + \alpha^2 \operatorname{Re} g(x, \alpha).$$

Значит, $X'_\alpha > 0$ при малых α , X_α монотонна и, следовательно, обратима. Тогда $y = L_\alpha(x) = Y_\alpha \circ X_\alpha^{-1}(x)$. Нам понадобится явное выражение для L_α :

$$L_\alpha = \alpha H'(\tilde{F} \circ H^{-1}(x - \mu)) + O(\alpha^2). \quad (3)$$

Следующие два шага переводят с помощью квазиконформного отображения криволинейную полосу $H(\Pi_\alpha)$ в прямолинейную полосу Π_α , а склейку $x \rightarrow G_\alpha(x)$ в стандартную склейку $x \rightarrow x + \mu + i\alpha$.

Шаг 2. Положим $\Phi_\alpha: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\Phi_\alpha(x + iy) = x + (\alpha/L_\alpha(x))iy$. Согласно определению функции L_α , $\Phi_\alpha(H(\Pi_\alpha)) = \Pi_\alpha$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Показатель квазиконформности отображения Φ_α равномерно ограничен по α на отрезке $[0; \alpha_0]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что показатель квазиконформности остается ограниченным при стремлении α к 0. Из (3) следует, что

$$\Phi_\alpha(x + iy) = x + \frac{iy}{H'(\tilde{F} \circ H^{-1}(x - \mu))} + i\alpha\varphi(x, \alpha)y, \quad (4)$$

где $\varphi(x, \alpha)$ аналитична в $\mathbb{R} \times (0; \alpha_0]$. Семейство отображений плоскости Φ_α стремится равномерно вместе с производными к отображению Φ_0 , $\Phi_0(x + iy) = x + iy/H'(\tilde{F} \circ H^{-1}(x - \mu))$, и, значит, квазиконформное отклонение отображения Φ_α стремится к отклонению отображения Φ_0 , которое конечно в силу того, что $0 < h_1 \leq H'(x) \leq h_2$ на $\mathbb{R}$. Предложение доказано.

Шаг 3. Рассмотрим отображение $S_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $S_\alpha = X_\alpha^{-1}(x) + \mu$. Имеем $S_\alpha(x) = x + \alpha^2 s(x, \alpha)$. Положим $\Psi_\alpha: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\Psi_\alpha(x + iy) = x + \alpha y s(x, \alpha) + iy$. В любой полосе конечной высоты, например Π_1 , Ψ_α сходится вместе с производными к тождественному отображению при $\alpha \rightarrow 0$. Это доказывает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Показатель квазиконформности отображения Ψ_α стремится к 1 при $\alpha \rightarrow 0$.*

Шаг 4. Композиция $\tilde{R}_\alpha = \Psi_\alpha \circ \Phi_\alpha$ переводит склейку $z \rightarrow z + 1$ в себя, а склейку $x \rightarrow G_\alpha(x)$ в $x \rightarrow x + \mu + i\alpha$ и потому опускается до отображения $R_\alpha: T_\alpha \rightarrow T_\alpha^0$. Показатель квазиконформности отображения R_α совпадает с показателем квазиконформности отображения $\tilde{R}_\alpha$, который по предложениям 4 и 5 ограничен на полуинтервале $(0; \alpha_0]$. Отображение R_α — искомое. Основная лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Наука, М., 1978. 2. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. Мир, М., 1969. 3. Herman M.-R. Inst. Hautes Études Publ. Math., **49**, 5–233 (1979).

Московский государственный университет

Поступило в редакцию
5 июня 2000 г.

УДК 517.55

К проблеме Рубеля–Тейлора о представлении мероморфных функций*

© 2001. Б. Н. ХАБИБУЛЛИН

Пусть f — мероморфная функция на $\mathbb{C}^n$ (мы используем изображение $f \in \text{Mer}$) и $f = g_f/h_f$ — ее каноническое представление как частного целых функций g_f и h_f , взаимно простых в каждом кольце ростков голоморфных в точке из $\mathbb{C}^n$ функций [1]. Характеристическую функцию функции $f \in \text{Mer}$ определим формулой

$$u_f = \max\{\ln |g_f|, \ln |h_f|\} \quad \text{или} \quad u_f = \ln(|g_f|^2 + |h_f|^2)^{1/2}. \quad (1)$$

Пусть $L = (L_1, \dots, L_k)$ — набор комплексных векторных подпространств в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^n = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$ — их прямая сумма. Пусть

$$z = w_1 + \dots + w_k, \quad w_p \in L_p, \quad p = 1, \dots, k, \quad (2)$$

— единственное представление вектора $z \in \mathbb{C}^n$, $r_p = |w_p|$ — евклидова норма точки w_p и $\vec{r} = (r_1, \dots, r_k)$.

Обозначим через S_p единичную сферу в L_p , а через $ds^{(p)}$ элемент площади на S_p , $s^{(p)}(S_p) = 1$.

Пусть $f \in \text{Mer}$ и в (2) $w_p = r_p \zeta_p$, $\zeta_p \in S_p$. Функция

$$T_L(\vec{r}; f) = \int_{S_1} \dots \int_{S_k} u_f(r_1 \zeta_1, \dots, r_k \zeta_k) ds^{(1)}(\zeta_1) \dots ds^{(k)}(\zeta_k),$$

где $\vec{r} \in \mathbb{R}_+^k$, $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$, называется L -характеристикой Неванлинны функции f . При $k = 1$ (при $k = n$) это классическая характеристика Неванлинны через исчерпание по шарам [2–7] (соответственно по полидискам [5]). L -характеристика Неванлинны определена однозначно с точностью до постоянного

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 00-01-00770.