Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Хабибуллин, К проблеме Рубеля–Тейлора о представлении мероморфных функций, *Функц. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 3, 91–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa266>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 17:48:34

Шаг 4. Композиция $\tilde{R}_\alpha = \Psi_\alpha \circ \Phi_\alpha$ переводит склейку $z \rightarrow z + 1$ в себя, а склейку $x \rightarrow G_\alpha(x)$ в $x \rightarrow x + \mu + i\alpha$ и потому опускается до отображения $R_\alpha: T_\alpha \rightarrow T_\alpha^0$. Показатель квазиконформности отображения R_α совпадает с показателем квазиконформности отображения $\tilde{R}_\alpha$, который по предложениям 4 и 5 ограничен на полуинтервале $(0; \alpha_0]$. Отображение R_α — искомое. Основная лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Наука, М., 1978. 2. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. Мир, М., 1969. 3. Herman M.-R. Inst. Hautes Études Publ. Math., **49**, 5–233 (1979).

Московский государственный университет

Поступило в редакцию
5 июня 2000 г.

УДК 517.55

К проблеме Рубеля–Тейлора о представлении мероморфных функций*

© 2001. Б. Н. ХАБИБУЛЛИН

Пусть f — мероморфная функция на $\mathbb{C}^n$ (мы используем изображение $f \in \text{Mer}$) и $f = g_f/h_f$ — ее каноническое представление как частного целых функций g_f и h_f , взаимно простых в каждом кольце ростков голоморфных в точке из $\mathbb{C}^n$ функций [1]. Характеристическую функцию функции $f \in \text{Mer}$ определим формулой

$$u_f = \max\{\ln |g_f|, \ln |h_f|\} \quad \text{или} \quad u_f = \ln(|g_f|^2 + |h_f|^2)^{1/2}. \quad (1)$$

Пусть $L = (L_1, \dots, L_k)$ — набор комплексных векторных подпространств в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^n = L_1 \oplus \dots \oplus L_k$ — их прямая сумма. Пусть

$$z = w_1 + \dots + w_k, \quad w_p \in L_p, \quad p = 1, \dots, k, \quad (2)$$

— единственное представление вектора $z \in \mathbb{C}^n$, $r_p = |w_p|$ — евклидова норма точки w_p и $\vec{r} = (r_1, \dots, r_k)$.

Обозначим через S_p единичную сферу в L_p , а через $ds^{(p)}$ элемент площади на S_p , $s^{(p)}(S_p) = 1$.

Пусть $f \in \text{Mer}$ и в (2) $w_p = r_p \zeta_p$, $\zeta_p \in S_p$. Функция

$$T_L(\vec{r}; f) = \int_{S_1} \dots \int_{S_k} u_f(r_1 \zeta_1, \dots, r_k \zeta_k) ds^{(1)}(\zeta_1) \dots ds^{(k)}(\zeta_k),$$

где $\vec{r} \in \mathbb{R}_+^k$, $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$, называется L -характеристикой Неванлинны функции f . При $k = 1$ (при $k = n$) это классическая характеристика Неванлинны через исчерпание по шарам [2–7] (соответственно по полидискам [5]). L -характеристика Неванлинны определена однозначно с точностью до постоянного

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 00-01-00770.

слагаемого вне зависимости от выбора функций u_f , g_f и h_f в (1), непрерывна и выпукла относительно $\ln r_1, \dots, \ln r_k$ всюду в $\mathbb{R}_+^k$ (ср. [4–7, 9]).

Следующие простые свойства L -характеристики Неванлинны нетрудно получить по аналогии с доказательствами соответствующих фактов для упомянутых выше классических характеристик Неванлинны (см. [4–6, 9]):

(а) для любых $f_1, f_2 \in \text{Mer}$

$$T_L(\vec{r}; f_1 + f_2) \leq T_L(\vec{r}; f_1) + T_L(\vec{r}; f_2) + O(1),$$

$$T_L(\vec{r}; f_1 f_2) \leq T_L(\vec{r}; f_1) + T_L(\vec{r}; f_2) + O(1), \quad T_L(\vec{r}; 1/f_1) \leq T_L(\vec{r}; f_1) + O(1);$$

(б) для любой точки $c \in \mathbb{C}^n$ при любом $\epsilon > 0$ существует постоянная $C(\epsilon, c)$, такая, что

$$T_L(\vec{r}; f_c) \leq C(\epsilon, c) T_L^+((1 + \epsilon)\vec{r} + \text{const} \cdot \vec{1}; f), \quad \vec{r} \in \mathbb{R}_+^k,$$

где $\vec{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}_+^k$, $f_c(z) = f(z - c)$ и $T_L^+(\vec{r}; f) = \max\{T_L(\vec{r}; f), 0\}$.

Пусть $\lambda(\vec{r}) > 0$ — функция роста, т.е. непрерывная на $\mathbb{R}_+^k$ и неубывающая по каждой переменной функция, и $b \in [0, +\infty]$. Класс $\Lambda(b)$, $b > 0$, состоит из функций $f \in \text{Mer}$, для которых найдутся постоянные $a_f < b$ и A_f и вектор $\vec{a}_f \in \mathbb{R}_+^k$, такие, что $T_L(\vec{r}; f) \leq A_f \lambda(a_f \vec{r} + \vec{a}_f)$, $\vec{r} \in \mathbb{R}_+^k$. При $0 \leq b < +\infty$ полагаем $\Lambda[b] = \bigcap \{\Lambda(b') : b < b'\}$. Класс $\Lambda^0(b)$, $b > 0$, состоит из функций $f \in \text{Mer}$, для которых $\limsup_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} T_L(\vec{r}; f) / \lambda(a_f \vec{r} + \vec{a}_f) = 0$, где $\lambda(\vec{r})$ предполагается стремящейся к $+\infty$ при $r_p \rightarrow +\infty$, постоянная a_f меньше b , $\vec{a}_f \in \mathbb{R}_+^k$ и $|\vec{r}| = \sqrt{r_1^2 + \dots + r_k^2}$. Очевидно, что в определении каждого из введенных классов характеристику $T_L(\vec{r}; f)$ можно заменить на $T_L^+(\vec{r}; f)$. Чтобы обозначить подкласс каждого из введенных классов, состоящий только из целых функций на $\mathbb{C}^n$, мы добавляем нижний индекс E к Λ . Когда речь идет о любом из введенных классов, мы пишем просто Λ и Λ_E ; через Λ_E / Λ_E обозначается множество отношений функций из Λ_E . Из сформулированного выше свойства (а) сразу следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (ср. [5, Proposition] и [6]). Λ является полем, а Λ_E — его подкольцом.

Один из основных вопросов, продиктованных этим предложением, сформулировали (для $k = 1$) в конце 60-х годов Рубель и Тейлор [2; 5, р. 470; 8, Problem 8]: когда Λ является полем частных кольца Λ_E ?¹⁾

Для $n = 1$ и $b = +\infty$ окончательный ответ «всегда» дал в начале 70-х годов Майлз [3]. В начале 90-х аналогичный ответ нам удалось получить (во многом методами функционального анализа) при $k = 1$ и любом n в [10, теорема 1.3] и [11, теорема 5] (история вопроса подробнее изложена в [9–11]). Для случая же $k = n$ известен только первоначальный результат Тейлора [5, Theorem] с медленно растущей по каждой переменной функцией роста $\lambda(\vec{r})$, $\vec{r} \in \mathbb{R}_+^n$.

Следующий результат решает проблему Рубеля–Тейлора при минимальном ограничении снизу на рост функции $\lambda(\vec{r})$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\vec{r} = (r_1, \dots, r_k) \in \mathbb{R}_+^k$. Если $b \in [0, +\infty]$ и

$$\ln |\vec{r}| \leq O(\lambda(\vec{r})) \quad (\text{соотв. } \ln |\vec{r}| = o(\lambda(\vec{r}))) \quad \text{при } |\vec{r}| \rightarrow \infty, \quad (3)$$

¹⁾ Важность таких результатов для теории распределения значений мероморфных функций была отмечена и классиком в этой области В. Штоллем [9, р. 85]: «К сожалению, теорема Майлза [3] не доказана для случая многих переменных».

то $\Lambda(b) = \Lambda_E(b)/\Lambda_E(b)$ и $\Lambda[b] = \Lambda_E[b]/\Lambda_E[b]$ (соотв. $\Lambda^0(b) = \Lambda_E^0(b)/\Lambda_E^0(b)$).

Для доказательства этой теоремы достаточно, чтобы была справедлива

ЛЕММА. Пусть $f \in \text{Mer}$. При любом $\varepsilon > 0$ найдутся целая функция $q_\varepsilon \not\equiv 0$, постоянные A, B, C и вектор $\vec{a} \in \mathbb{R}_+^k$, такие, что (в обозначениях, введенных после формулы (2))

$$u_f(z) + \ln |q_\varepsilon(z)| \leq AT_L^+((1 + \varepsilon)\vec{r} + \vec{a}; f) + B \ln(2 + |z|) + C, \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (4)$$

Действительно, по лемме для каждой функции $f \in \Lambda$ в теореме можно выбрать представление $f = g/h = g_f/h_f$, где $g = g_f q_\varepsilon$ и $h = h_f q_\varepsilon$ при достаточно малом ε . Тогда ввиду (4) и (1) $\ln |g|$ и $\ln |h|$ мажорируются правой частью неравенства (4). Отсюда по определению классов $\Lambda(b)$, $\Lambda[b]$ и $\Lambda^0(b)$, согласно условию (3), получаем требуемое заключение теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Отмеченное выше свойство (b) позволяет, не умаляя общности, за счет сдвига считать, что в точке 0 определено значение функции f , т.е. $u_f(0) \neq -\infty$. Рассмотрим средние функции u_f по окружностям $M_f(z) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} u_f(e^{i\theta} z) d\theta$. По определению L -характеристики Неванлинны и в силу ее инвариантности относительно домножения аргумента функции u_f на $e^{i\theta}$, интегрируя по θ , получаем

$$T_L(\vec{r}; f) = \int_{S_1} \cdots \int_{S_k} M_f(r_1 \zeta_1, \dots, r_k \zeta_k) ds^{(1)}(\zeta_1) \cdots ds^{(k)}(\zeta_k); \quad (5)$$

по поводу связи между $\vec{r} \in \mathbb{R}_+^k$ и $z \in \mathbb{C}^n$ см. формулу (2) и обозначения после нее.

Из известных свойств плюрисубгармонических функций [12] следует, что функция $M_f(z)$ субгармоническая на каждом L_p и ограничена снизу постоянной $C = u_f(0)$ при всех z . Из неотрицательности и субгармоничности функции $M_f(z) - C$ на каждом L_p при любом $\epsilon > 0$, применяя последовательно теорему 3.19 из [13] в каждом L_p к функции $M_f(z) - C$ с некоторыми постоянными $C_p(\epsilon)$, $p = 1, \dots, k$, зависящими только от p и ϵ , согласно равенству в (5), получаем

$$\begin{aligned} M_f(z) - C &= (M_f(z) - C)^+ \\ &\leq \prod_{p=1}^k C_p(\epsilon) \int_{S_1} \cdots \int_{S_k} (M_f((1 + \epsilon)r_1 \zeta_1, \dots, (1 + \epsilon)r_k \zeta_k) - C)^+ \\ &\quad ds^{(1)}(\zeta_1) \cdots ds^{(k)}(\zeta_k) \\ &\leq A(\epsilon) \int_{S_1} \cdots \int_{S_k} M_f((1 + \epsilon)(r_1 \zeta_1, \dots, r_k \zeta_k)) ds^{(1)}(\zeta_1) \cdots ds^{(k)}(\zeta_k) + \text{const} \\ &= A(\epsilon) T_L((1 + \epsilon)\vec{r}; f) + \text{const}, \quad A(\epsilon) - \text{постоянная}, \quad r_p \geq 1. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_f(e^{i\theta} z) d\theta \leq A(\epsilon) \bar{\lambda}(\vec{r} + \vec{1}) + \text{const}$$

для всех $z \in \mathbb{C}^n$, где $\bar{\lambda}(\vec{r}) = T_L((1 + \epsilon)\vec{r}; f)$ — функция роста. Следовательно [11, теорема 3.1], найдется целая функция $q_\epsilon \not\equiv 0$, такая, что для каждого $z \in \mathbb{C}^n$

при любом $\sigma > 0$ справедлива оценка

$$u_f(z) + \ln |q_\epsilon(z)| \leq \hat{A}(\epsilon) \sup_{|\vec{r}' - \vec{r}| \leq \sigma} \bar{\lambda}((1 + \epsilon)\vec{r}' + \vec{1}) + (n + 2) \ln(1 + |z| + \sigma) - n \ln \sigma + \text{const},$$

где $\hat{A}(\epsilon)$ — постоянная. Отсюда, выбирая $\sigma \equiv 1$, $(1 + \epsilon)^2 = 1 + \epsilon$ и при этом $q_\epsilon = q_\epsilon$, получаем требуемую оценку (4).

ГИПОТЕЗА. Условие (3) в теореме можно убрать.

На правдоподобие этой гипотезы указывает то, что она справедлива при $k = 1$ (см. [10, 11]), а также при $k = n$ для медленно растущих λ (см. [5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. Мир, М., 1968.
2. Rubel L. A., Taylor B. A. Bull. Soc. Math. France, **96**, 53–96 (1968).
3. Miles J. B. J. Analyse Math., **25**, 371–388 (1972).
4. Stoll W. In: Entire Functions and Related Parts of Analysis. Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 11, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968, pp. 392–430.
5. Taylor B. A. In: Entire Functions and Related Parts of Analysis. Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 11, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968, pp. 468–474.
6. Kujala R. O. Trans. Amer. Math. Soc., **161**, 327–358 (1971).
7. Skoda H. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **21**, 11–23 (1971).
8. Ehrenpreis L. In: Entire Functions and Related Parts of Analysis. Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 11, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968, pp. 533–546.
9. Stoll W. Value distribution theory for meromorphic maps. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig, 1985.
10. Хабибуллин Б. Н. Сиб. матем. ж., **33**, №3, 186–191 (1992).
11. Хабибуллин Б. Н. Изв. РАН, сер. матем., **57**, №1, 129–146 (1993).
12. Лелон П., Груман Л. Целые функции многих комплексных переменных. Мир, М., 1989.
13. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. Мир, М., 1980.

Башкирский государственный университет,
математический факультет
algeom@bsu.bashedu.ru

Поступило в редакцию
31 января 2000 г.