Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Арнольд, Комплексификация тетраэдра и псевдопроективные преобразования, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 4, 1–7

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa267>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 18:28:20

УДК 514.144

Комплексификация тетраэдра и псевдопроективные преобразования*

© 2001. В. И. Арнольд

§1. Псевдопроективная геометрия

Давно уже высказанное утверждение, что комплексификацией тетраэдра является октаэдр, а комплексификацией октаэдра (или кватернионизацией тетраэдра) — икосаэдр (см. [1, 2]), до сих пор не было превращено в точное математическое высказывание (исключая, разве, нумерологические наблюдения о числе ребер $(n+1)(n+2)$ ($6 = 2 \cdot 3$ для тетраэдра, $12 = 3 \cdot 4$ для октаэдра, $30 = 5 \cdot 6$ для икосаэдра), где n — размерность прямой (вещественной, комплексной, кватернионной)).

Целью настоящей статьи является формулировка и доказательство утверждения, комплексифицирующего группу симметрий тетраэдра, A_3 , превращая ее в группу симметрий октаэдра, B_3 . Эта комплексификация состоит в том, что сначала тетраэдр заменяется четырьмя точками на проективной плоскости (соответствующими прямым, соединяющим его центр с вершинами). Затем плоскость комплексифицируется до комплексной проективной плоскости, по-прежнему снабженной четырьмя точками. И, наконец, рассматривается группа псевдопроективных преобразований комплексной проективной плоскости (условие псевдопроективности состоит в том, что комплексные проективные подпространства — в данном случае прямые — должны переходить в комплексные проективные подпространства, хотя это отображение и не обязано сохранять комплексную структуру).

Теперь комплексификация группы A_3 всех вещественных проективных преобразований плоскости, сохраняющих выделенное выше подмножество из четырех точек, определяется как группа всех псевдопроективных преобразований комплексной проективной плоскости, сохраняющих это четырехточечное множество.

Основные результаты работы состоят в том, что

1) всякое псевдопроективное преобразование является либо комплексным проективным (сохраняющим комплексную структуру), либо комплексным антипроективным (заменяющим ее на сопряженную, или, иначе, такое преобразование является произведением комплексно-проективного преобразования на комплексное сопряжение);

2) комплексификацией группы A_3 симметрий тетраэдра является группа B_3 симметрий октаэдра (или, если угодно, куба).

Ниже все преобразования предполагаются вещественно гладкими, но, вероятно, результаты справедливы и в более общей ситуации (например, для непрерывных преобразований).

*Частично поддержано РФФИ, грант 99-01-01109.

§ 2. Классификация псевдопроективных преобразований комплексной проективной плоскости

Вспользуемся аффинной системой комплексных координат z, w (в окрестности точки $0: z = w = 0$). Комплексные прямые, проходящие через эту точку, имеют вид $w = pz$, где p — комплексные числа (либо же речь идет о прямой $z = 0$, вблизи которой можно пользоваться аналогичными уравнениями $z = qw$).

Рассмотрим производную псевдопроективного преобразования в точке, которую это преобразование переводит в нашу точку 0 . Это — вещественное невырожденное $\mathbb{R}$ -линейное преобразование, переводящее $\mathbb{C}$ -прямые в $\mathbb{C}$ -прямые. Мы будем называть такие преобразования *псевдокомплексными*.

ЛЕММА 1. *Псевдокомплексное $\mathbb{R}$ -линейное преобразование комплексной плоскости либо $\mathbb{C}$ -линейно, либо является произведением $\mathbb{C}$ -линейного преобразования на комплексное сопряжение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на исходной комплексной прямой, переходящей в комплексную прямую $w = 0$, ненулевой вектор x_1 . Эта исходная прямая как $\mathbb{R}$ -плоскость порождается векторами x_1 и $y_1 = ix_1$. Обозначим через X_1 и Y_1 образы этих векторов при нашем вещественном линейном псевдокомплексном преобразовании. Они порождают комплексную прямую $w = 0$ как $\mathbb{R}$ -плоскость. Они задают на этой прямой новую комплексную структуру I_1 , для которой $I_1 X_1 = Y_1$, $I_1 Y_1 = -X_1$. Эта принесенная псевдокомплексным отображением комплексная структура, вообще говоря, отличается от комплексной структуры i на комплексной прямой $w = 0$ комплексной проективной плоскости. Это отличие мы будем измерять следующим образом. Выберем ненулевой вектор e_1 на комплексной прямой. Он порождает эту вещественную плоскость над $\mathbb{R}$ вместе с вектором $f_1 = ie_1$ (причем $if_1 = -e_1$). Следовательно, векторы X_1 и Y_1 выражаются через e_1 и f_1 как линейные комбинации с вещественными коэффициентами:

$$X_1 = a_1 e_1 + b_1 f_1, \quad Y_1 = c_1 e_1 + d_1 f_1. \quad (1)$$

Точно таким же образом мы вводим векторы $(e_2, f_2 = ie_2)$ на прямой $z = 0$ и записываем там перенесенную нашим вещественным псевдокомплексным преобразованием комплексную структуру I_2 при помощи векторов X_2 и $Y_2 = I_2 X_2$, $I_2 Y_2 = -X_2$, полученных псевдокомплексным преобразованием из x_2 и из $y_2 = ix_2$.

Теперь рассмотрим комплексную прямую, порожденную комплексной линейной комбинацией векторов, исходных для базисных прямых: $x = x_1 + rx_2$, $r = s + it$, так что $x = x_1 + sx_2 + ty_2$. Обозначим образы этого вектора x и вектора $y = ix = y_1 + sy_2 - tx_2$ при нашем вещественном псевдокомплексном преобразовании через

$$X = X_1 + sX_2 + tY_2, \quad Y = Y_1 + sY_2 - tX_2 \quad (2)$$

(коэффициенты s и t вещественны).

Из условия, что псевдокомплексное преобразование переводит комплексные прямые в комплексные, следует, что три вектора X, Y и iX должны быть $\mathbb{R}$ -линейно зависимы в $\mathbb{R}^4$, каковы бы ни были коэффициенты s и t .

Формула (1) и аналогичные формулы для X_2 и Y_2 позволяют переписать векторы (2) как комбинации четырех базисных векторов e_k, f_k . Эти комбинации

имеют вид

$$\begin{aligned} X &= a_1 e_1 + b_1 f_1 + s a_2 e_2 + s b_2 f_2 + t c_2 e_2 + t d_2 f_2, \\ iX &= -b_1 e_1 + a_1 f_1 - s b_2 e_2 + s a_2 f_2 - t d_2 e_2 + t c_2 f_2, \\ Y &= c_1 e_1 + d_1 f_1 + s c_2 e_2 + s d_2 f_2 - t a_2 e_2 - t b_2 f_2. \end{aligned}$$

Условие $\mathbb{R}$ -зависимости этих трех векторов при любых s и t приводит к равенству нулю большого числа определителей 3-го порядка, которые мы теперь и выпишем. Эти определители являются минорами матрицы коэффициентов трех выписанных комбинаций

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ -b_1 & a_1 & -b_2 & a_2 & -d_2 & c_2 \\ c_1 & d_1 & c_2 & d_2 & -a_2 & -b_2 \end{pmatrix}.$$

Проекции трех векторов на плоскости, порожденные тремя из четырех базисных векторов e_i, f_j , должны быть линейно зависимыми. При $s = 1, t = 0$ для базисных векторов (e_1, f_1, e_2) заключаем, что равен нулю минор столбцов $(1, 2, 3)$; для базисных векторов (e_1, f_1, f_2) — минор столбцов $(1, 2, 4)$. Точно так же при $s = 0, t = 1$ убеждаемся в равенстве нулю миноров столбцов $(1, 2, 5)$ и $(1, 2, 6)$. Поэтому каждый из столбцов 3, 4, 5 и 6 ортогонален векторному произведению столбцов 1 и 2. Это произведение — не 0, так как его третья компонента $a_1^2 + b_1^2$ отлична от нуля, поскольку $X_1 \neq 0$. Значит, все эти 4 столбца лежат в одной плоскости. Таким образом, миноры столбцов $(2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (3, 4, 5), (3, 4, 6)$ и $(4, 5, 6)$ также равны нулю, т. е. все 20 миноров третьего порядка выписанной матрицы равны нулю.

Минор столбцов $(3, 4, 5)$ равен

$$M_{3,4,5} = a_2(d_2^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2) - 2b_2 c_2 d_2. \quad (3)$$

Минор столбцов $(3, 4, 6)$ равен

$$M_{3,4,6} = b_2(c_2^2 - a_2^2 - b_2^2 - d_2^2) - 2a_2 c_2 d_2. \quad (4)$$

Из условий $M_{3,4,5} = M_{3,4,6} = 0$, ввиду формул (3) и (4), мы заключаем, что

$$a_2^2(d_2^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2) = b_2^2(c_2^2 - a_2^2 - b_2^2 - d_2^2). \quad (5)$$

Из формулы (5) мы последовательно находим

$$\begin{aligned} a_2^2(d_2^2 - c_2^2 - a_2^2) &= b_2^2(c_2^2 - d_2^2 - b_2^2), \\ a_2^2(d_2^2 - c_2^2) - a_2^4 &= b_2^2(c_2^2 - d_2^2) - b_2^4, \\ (a_2^2 + b_2^2)(d_2^2 - c_2^2) &= a_2^4 - b_2^4. \end{aligned}$$

Заметим, что $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$, так как вектор X_2 — не нуль. Следовательно, имеет место равенство

$$d_2^2 - c_2^2 = a_2^2 - b_2^2. \quad (6)$$

Теперь равенство $M_{3,4,6} = 0$ принимает, ввиду соотношений (4), (6), вид

$$-2a_2^2 b_2 - 2a_2 c_2 d_2 = 0, \quad (7)$$

и, аналогично, из равенства $M_{3,4,5} = 0$, ввиду (3), (6), следует соотношение

$$-2a_2 b_2^2 - 2b_2 c_2 d_2 = 0. \quad (8)$$

Из соотношений (7) и (8) следует равенство

$$a_2 b_2 + c_2 d_2 = 0 \quad (9)$$

(ввиду того, что хотя бы один из коэффициентов a_2 и b_2 отличен от нуля).

Соотношение (9) означает пропорциональность вектора (c_2, a_2) вектору $(b_2, -d_2)$:

$$c_2 = k b_2, \quad a_2 = -k d_2. \quad (10)$$

Здесь $k \neq 0$, иначе $a_2 = c_2 = 0$ и из (6) $b_2 = d_2 = 0$, тогда как a_2 и b_2 вместе в нуль не обращаются. Вообще, b_2 и d_2 вместе в нуль обратиться не могут, так как тогда нулями были бы и a_2 , и b_2 , согласно (10).

Подставляя найденные значения (10) элементов (c_2, a_2) нашей матрицы коэффициентов, мы приводим ее столбцы (3, 4, 5, 6) к виду

$$\begin{pmatrix} -k d_2 & b_2 & k b_2 & d_2 \\ -b_2 & -k d_2 & -d_2 & k b_2 \\ k b_2 & d_2 & k d_2 & -b_2 \end{pmatrix}.$$

Умножая последний столбец на k и прибавляя произведение к первому столбцу, мы приведем его к виду $(0, (k^2 - 1)b_2, 0)$. Теперь равенство нулю определителя первого, второго и последнего столбцов приняло вид $(d_2^2 + b_2^2)(k^2 - 1)b_2 = 0$, откуда $(k^2 - 1)b_2 = 0$, так как $b_2^2 + d_2^2$ в нуль не обращается.

Умножая на k второй столбец и вычитая произведение из третьего, мы приведем третий столбец к виду $(0, (k^2 - 1)d_2, 0)$. Равенство нулю определителя первых трех столбцов приняло теперь вид $k(b_2^2 + d_2^2)(k^2 - 1)d_2 = 0$.

Поскольку хотя бы один из коэффициентов d_2 и b_2 отличен от нуля, из доказанных равенств $((k^2 - 1)b_2 = 0, (k^2 - 1)d_2 = 0)$ следует, что $k^2 = 1$. Итак, мы доказали, что $k = \pm 1$, т. е. что либо $(c_2 = b_2, d_2 = -a_2)$, либо $(c_2 = -b_2, d_2 = a_2)$.

Возвращаясь к полной матрице коэффициентов, мы заключаем, что она имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & \pm b_2 & \mp a_2 \\ -b_1 & a_1 & -b_2 & a_2 & \pm a_2 & \pm b_2 \\ c_1 & d_1 & \pm b_2 & \mp a_2 & -a_2 & -b_2 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к последней строке вторую строку при верхних знаках (или отнимем при нижних). Тогда в последней строке останутся только элементы $(c_1 \mp b_1, d_1 \pm a_1)$ первых двух столбцов, а все остальные элементы станут нулями.

Из равенства нулю минора столбцов (2, 3, 4) так преобразованной матрицы мы получаем условие $(d_1 \pm a_1)(a_2^2 + b_2^2) = 0$, откуда $d_1 = \mp a_1$, поскольку коэффициенты a_2 и b_2 вместе в 0 не обращаются.

Точно так же рассмотрение минора столбцов (1, 3, 4) дает условие $(c_1 \pm b_1)(a_2^2 + b_2^2) = 0$, откуда $c_1 = \pm b_1$.

Но выше уже было доказано, что $c_2 = \pm b_2, d_2 = \mp a_2$. В случае нижних знаков комплексные структуры i, I_1 и I_2 на самом деле совпадают, они просто записаны в разных базисах. В этом случае наш псевдокомплексный вещественный линейный оператор переводит комплексную структуру i в себя. В случае верхних знаков операторы i и I_k поворачивают комплексную прямую в разные стороны. В этом случае $I_k = \text{conj} \cdot i$. Поэтому произведение нашего вещественного линейного псевдокомплексного оператора на комплексное сопряжение (с любой стороны) является комплексным линейным оператором.

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Любое псевдопроективное преобразование комплексной проективной плоскости либо само является комплексно-проективным, либо становится комплексно-проективным после умножения (с любой стороны) на комплексное сопряжение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для производной преобразования в каждой точке аналогичное свойство уже доказано (в приведенной выше лемме). Заметим при этом, что либо в каждой точке имеет место первый (комплексный) случай, либо в каждой точке второй (антикомплексный). Это следует из связности комплексной проективной плоскости: разница между двумя случаями состоит в разнице ориентаций комплексных прямых, заданных исходной и принесенной комплексными структурами. Эта разница ориентаций — локально постоянная, а следовательно, ввиду связности, всюду постоянная функция.

Теперь, если имеет место первый случай, то наше преобразование комплексно-проективно, так как оно комплексно гладко и переводит комплексные прямые в комплексные прямые.

Во втором же случае умножим наше псевдопроективное преобразование на комплексное сопряжение. Произведение по-прежнему переводит комплексные прямые в комплексные прямые и вдобавок сохраняет комплексную структуру, а следовательно, является комплексным проективным преобразованием, что и доказывает следствие.

§3. Комплексификация группы симметрий тетраэдра

Рассмотрим четыре точки общего положения на комплексной проективной плоскости (годятся, например, четыре точки, заданные уравнениями $x_i = x_j = x_k$ в однородных координатах $[x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ на проективной плоскости $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$ для четырех троек различных координат из четырех).

ТЕОРЕМА. *Группа псевдопроективных преобразований комплексной проективной плоскости, переводящих в себя это множество из четырех точек, естественно изоморфна группе B_3 симметрий октаэдра (или куба) трехмерного евклидова пространства.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа симметрий куба состоит из 48 элементов и включает центральную симметрию (коммутирующее со всеми остальными преобразование, переставляющее каждую вершину с противоположной). Факторгруппа по этой подгруппе из 2 элементов переставляет произвольно четыре большие диагонали куба, причем все эти 24 перестановки реализуются уже подгруппой из 24 вращений куба.

Отсюда видно, что каждая симметрия куба либо является вращением куба, либо получается из вращения центральной симметрией. При этом группа вращений куба — это группа симметрий тетраэдра. А именно, каждому вращению куба соответствует вращение вписанного в него тетраэдра, переводящее его либо в себя, либо в центрально симметричный ему тетраэдр. В последнем случае после вращения куба произведем еще и центральную симметрию. Тогда тетраэдр перейдет в себя, но полученная его изометрия не будет вращением, а будет менять ориентацию. Итак, мы получили в обоих случаях симметрию тетраэдра, только в первом случае она сохраняет его ориентацию, а во втором нет.

Построенное отображение, сопоставляющее вращениям куба симметрии тетраэдра — изоморфизм групп. Это видно, например, из того, что в каждой из

этих групп 24 элемента, а ядро построенного изоморфизма групп тривиально. Действительно, если получившаяся симметрия тетраэдра — тождественное преобразование, то исходное вращение куба сохраняло каждую из четырех вершин тетраэдра (так как ориентация не менялась) и, следовательно, само было тождественным преобразованием куба.

Наши рассуждения показывают, что группа B_3 симметрий куба является прямым произведением группы его вращений A_3 и группы $\mathbb{Z}_2$.

Проверим теперь, что группа псевдопроективных преобразований, сохраняющих наше множество из четырех точек проективной плоскости, также есть группа B_3 .

ЛЕММА 2. Группа комплексных проективных преобразований комплексной проективной плоскости, сохраняющих наше множество из четырех точек, естественно изоморфна группе A_3 из 24 перестановок этих точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гомоморфизм группы преобразований в группу перестановок задается самим действием. Чтобы проверить, что образ есть вся группа перестановок, нужно продолжить перестановку до проективного преобразования. Воспользуемся для этого системой аффинных координат, в которых одна из 6 прямых, соединяющих попарно наши 4 точки — бесконечно удаленная, а две лежащие на ней точки удалены в направлении аффинных координатных осей x и y , причем начало координат ($x = y = 0$) является также одной из наших точек. Последняя точка имеет тогда некоторые (конечные и ненулевые) координаты x' и y' . Растяжением координат можно добиться $x' = y' = 1$. Поскольку порядок точек в этой конструкции произволен, она доставляет, в частности, проективное преобразование, переставляющее 4 точки любым образом.

Если же порядок фиксирован, то проективное преобразование тоже фиксировано. Это следует из того, что проективное преобразование, оставляющее на месте каждую из 4 точек $(0:0:1)$, $(1:1:1)$, $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, тривиально. Действительно, оно обязано сохранять «бесконечно удаленную» прямую, содержащую две последние точки, и, следовательно, является аффинным и записывается в виде $(x, y) \mapsto (ax + by + c, dx + ey + f)$. Из сохранения первой точки следует его линейность ($c = f = 0$). Из сохранения направлений координатных осей (т.е. точек третьей и четвертой) следует, что $d = 0$, $b = 0$, так что наше преобразование записывается в виде $(x, y) \mapsto (ax, ey)$. Теперь сохранение второй точки ($x = y = 1$) доставляет условия $a = 1$ и $e = 1$, так что наше преобразование — тождественное.

Лемма доказана.

Исследуем теперь псевдопроективные преобразования, сохраняющие нашу четверку точек. Здесь мы используем вещественность этих точек, т.е. их инвариантность относительно операции комплексного сопряжения conj (без этого можно было бы обойтись, но это предположение сокращает запись доказательства).

Итак, мы располагаем 48 псевдопроективными преобразованиями, сохраняющими нашу четверку: это 24 комплексно-проективных преобразования A и 24 их произведения на conj (скажем, вида $\text{conj} \cdot A$). Проверим, что этим исчерпываются все псевдопроективные преобразования, сохраняющие четверку.

Действительно, такое преобразование B осуществляет некоторую перестановку четырех точек. Эту перестановку осуществляет также некоторое комплексно-проективное преобразование A . Псевдопроективное преобразование BA^{-1} вовсе не переставляет точки.

Если это преобразование комплексно-проективное, то оно обязано быть тождественным, как мы убедились выше (при доказательстве леммы 2). В этом случае $B = A$ — комплексно-проективное преобразование.

Если же преобразование BA^{-1} антикомплексное, то преобразование $BA^{-1} \cdot \text{conj}$ комплексно-проективное (по лемме 1 §2). А так как оно не переставляет наши четыре точки, то оно тождественно (как в лемме 2).

В этом случае $B = \text{conj} \cdot A$.

Значит, кроме 24 комплексно-проективных преобразований A и 24 антикомплексных псевдопроективных преобразований $\text{conj} \cdot A$ нет других псевдопроективных преобразований, сохраняющих нашу четверку.

Заметим еще, что псевдопроективное преобразование conj коммутирует со всеми 48 псевдопроективными преобразованиями, которые мы нашли.

Это следует из того, что оно коммутирует с 24 комплексно-проективными преобразованиями A , сохраняющими нашу четверку. Последнее же вытекает из вещественности этих преобразований A , которая вытекает из вещественности четверки (см. описание построения преобразований A в доказательстве леммы 2 выше):

$$\text{conj} \cdot A = A \cdot \text{conj}.$$

Теперь теорема, утверждающая изоморфность группы симметрий октаэдра или куба группе псевдопроективных симметрий четверки вершин тетраэдра на комплексной проективной плоскости доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Другой вариант комплексификации группы A_3 симметрий тетраэдра в $\mathbb{R}^3$ доставляет двулистное накрытие $\mathbb{R}P^2 \leftarrow \mathbb{C}P^1$. Множество вершин тетраэдра с центром 0 в $\mathbb{R}^3$ состоит из 4 точек в $\mathbb{R}P^2$ и накрывается восемью точками сферы Римана $\mathbb{C}P^1$ (которые можно считать вершинами куба в $\mathbb{R}^3 \supset S^2$). Теперь в качестве группы комплексных симметрий можно взять подгруппу группы $SU(2)$, действующей в $\mathbb{C}^2$, сохраняющую эту восьмерку точек в $\mathbb{C}P^1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Таинственные математические троичности. Лекция 21 мая 1997 г. В сб.: Студенческие чтения МКНМУ, вып. 1, МЦНМО, М., 2000, с. 4–16.
2. Arnold V. I. Polymathematics: is mathematics a single science or a set of arts? In: Mathematics: Frontiers and Perspectives (Arnold V. I., Atiyah M. F., Lax P., Mazur B., eds.), IMU, Amer. Math. Soc., 2000, pp. 403–416.

Математический институт им. В. А. Стеклова,
CEREMADE, Université Paris-Dauphine

Поступило в редакцию
5 июля 2001 г.