Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ахметшин, Ю. С. Вольвовский, Динамика нулей конечнозонных решений уравнения Шрёдингера, *Функц. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 4, 8–19

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa268>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 10:24:56

УДК 517.9

Динамика нулей конечнозонных решений уравнения Шрёдингера*

© 2001. А. А. АХМЕТШИН, Ю. С. ВОЛЬВОВСКИЙ

§1. Введение

Недавно ван Дижен и Пушманн заметили, что динамика нулей n -солитонного решения уравнения Шрёдингера с безотражательным потенциалом удовлетворяет рациональной системе Рейсенаарса–Шнайдера с добавленным гармоническим членом ([1]; о системе РШ см. [2]). Упомянутая динамика была давно описана, хотя и в несколько ином виде; поэтому данный результат выглядит неожиданным.

В [3] было показано, что решение уравнения Шрёдингера

$$(\partial_x^2 - u(x))\psi(x, Q) = E\psi(x, Q)$$

с конечнозонным потенциалом $u(x)$ является корректно определенной функцией на гиперэллиптической кривой

$$y^2 = R_g(E) = \prod_{i=1}^{2g+1} (E - E_i), \quad Q = (y, E).$$

Проекция $\zeta_j = \zeta_j(x)$ нулей этой функции на плоскость переменной E удовлетворяют уравнениям Дубровина [4]:

$$\frac{\partial \zeta_s}{\partial x} = \frac{2\sqrt{R_g(\zeta_s)}}{\prod_{j \neq s} (\zeta_s - \zeta_j)}.$$

Заметим, что эти уравнения содержат параметры кривой. Аналоги уравнений Дубровина выполняются и для частично вырожденных гиперэллиптических кривых (последние описываются тем же уравнением, где некоторые E_i совпадают), и, в частности, для полностью вырожденных кривых (которые представляют собой сферу Римана с n парами отождествленных точек). В последнем случае, как было показано в [1], параметры кривой могут быть исключены из системы. Получающаяся таким образом система оказывается системой дифференциальных уравнений, записанных исключительно в терминах нулей соответствующей функции. Она совпадает с системой Рейсенаарса–Шнайдера и как следствие является гамильтоновой. Выражения для параметров кривой служат ее первыми интегралами.

В настоящей работе мы применяем эти идеи к случаю потенциалов, отвечающих кривым с произвольной степенью вырождения. Мы рассматриваем решения $\psi(x, Q)$ соответствующих уравнений Шрёдингера, используя при этом алгебро-геометрический подход, предложенный Кричевером (см. [5]). Говоря о динамике нулей решений $\psi(x, Q)$ на данных кривых, мы подразумеваем их зависимость

*Работа выполнена при поддержке CRDF, грант RP1-2102.

от переменной x . Мы показываем, что поведение нулей функции $\psi(x, Q)$ описывается динамической системой, которая является интегрируемой гамильтоновой системой n частиц на гиперэллиптической кривой с выколотой точкой. Переменными типа «угол» для нее служат аналоги компонент отображения Абеля.

Во втором параграфе мы изучаем простейший случай, когда гиперэллиптическая кривая является эллиптической кривой с самопересечениями. В третьем параграфе мы обобщаем полученные результаты на случай произвольной кривой. Наиболее громоздкие доказательства вынесены в приложения I и II.

Авторы глубоко признательны профессору И. М. Кричеверу за постоянное внимание к этой работе.

§ 2. Эллиптический случай

Мы начнем с изложения необходимых фактов из теории конечнозонного интегрирования. Рассмотрим эллиптическую кривую Γ , заданную уравнением

$$y^2 = E^3 - g_2 E - g_3. \quad (1)$$

Она компактифицируется на бесконечности одной точкой, которую мы будем обозначать ∞ . Единственный с точностью до умножения на константу голоморфный дифференциал на Γ имеет вид $\omega^h = (dE)/y$. Пусть на Γ выбран базис циклов $a \circ b = 1$, и пусть $2\omega_1$ и $2\omega_2$ являются соответственно a - и b -периодами дифференциала ω^h . Тогда отображение Абеля, заданное формулой

$$A: P \mapsto z = \int_{\infty}^P \omega^h,$$

позволяет идентифицировать кривую Γ с тором $\hat{\Gamma} = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[2\omega_1, 2\omega_2]$.

Решетке $\mathbb{Z}[2\omega_1, 2\omega_2]$ соответствуют стандартные функции Вейерштрасса (определения и свойства см. в [7])

$$\sigma(z|\omega_1, \omega_2), \quad \zeta(z|\omega_1, \omega_2) = \frac{\sigma'(z|\omega_1, \omega_2)}{\sigma(z|\omega_1, \omega_2)}, \quad \wp(z|\omega_1, \omega_2) = -\zeta'(z|\omega_1, \omega_2).$$

Функция $\sigma(z)$ в окрестности нуля имеет разложение $\sigma(z) = z + O(z^5)$ и при сдвиге аргумента на период удовлетворяет соотношениям $\sigma(z + 2\omega_j) = e^{2\eta_j(z + \omega_j)} \sigma(z)$, $j = 1, 2$, где $\eta_j = \zeta(\omega_j)$. Функция $\zeta(z)$ обладает следующей монодромией:

$$\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + 2\eta_1, \quad \zeta(z + 2\omega_2) = \zeta(z) + 2\eta_2,$$

а $\wp$ -функция Вейерштрасса двоякопериодична и не имеет полюсов за исключением двойного полюса в точке $z = 0$.

Отображение $z \mapsto (E = \wp(z), y = \wp'(z))$ является обратным к отображению Абеля.

Выберем $n - 1$ точек $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ на $\hat{\Gamma}$. Следующее утверждение является типичным в теории конечнозонного интегрирования (см. [6]).

Предложение 1. Для дивизора общего положения $D = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ на $\hat{\Gamma}$ существует и единственная функция $\psi(x, z|D)$ со следующими свойствами:

1) $\psi(x, z|D)$ мероморфна на $\hat{\Gamma}$ вне точки $z = 0$ и имеет не более чем простые полюсы в точках γ_i , $i = 1, \dots, n$;

2) в окрестности точки $z = 0$ функция $\psi(x, z|D)$ представляется в виде

$$\psi(x, z|D) = e^{xz^{-1}} \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(x) z^s \right);$$

3) $\psi(x, \kappa_i|D) = \psi(x, -\kappa_i|D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность функции с перечисленными свойствами следует непосредственно из теоремы Римана–Роха. Для доказательства существования положим

$$\psi(x, z|D) = e^{\zeta(z)x} \frac{\prod_{i=1}^n \sigma(z - z_i(x))}{\prod_{s=1}^n \sigma(z - \gamma_s) \prod_{i=1}^n \sigma(z_i(x))}, \quad (2)$$

где $z_i(x)$ — некоторые функции от x . Определенная таким образом функция будет двоякопериодичной, если и только если выполняется равенство $\sum_{i=1}^n z_i(x) = x + \sum_{s=1}^n \gamma_s$. Данное условие и равенства $\psi(x, \kappa_i|D) = \psi(x, -\kappa_i|D)$ образуют систему n уравнений на функции $z_i(x)$. Для дивизора D общего положения эта система невырождена. Решение в этом случае единственно с точностью до перестановок и однозначно определяет функцию $\psi(x, z|D)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функцию $\psi(x, z|D)$ принято называть функцией Бейкера–Ахиезера. В общем случае она определена на самой кривой Γ . В эллиптическом случае удобно использовать изоморфизм между Γ и ее якобианом $\hat{\Gamma}$, что позволяет написать явное выражение для $\psi(x, z|D)$ с помощью функций Вейерштрасса.

СЛЕДСТВИЕ 1. Функция Бейкера–Ахиезера $\psi(x, z|D)$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$(\partial_x^2 + u(x))\psi(x, z) = \wp(z)\psi(x, z) \quad (3)$$

с потенциалом $u(x) = -2 \sum_{i=1}^n \wp(z_i(x)) z_i'(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $\psi_0(x, z|D) = (\partial_x^2 + u(x) - \wp(z))\psi(x, z|D)$. Легко проверить явно, что функция $\psi(x, z|D) + \psi_0(x, z|D)$ обладает всеми свойствами, определяющими $\psi(x, z|D)$. Единственность функции Бейкера–Ахиезера влечет за собой равенство $\psi_0(x, z|D) = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Нули $z_i = z_i(x)$ функции $\psi(x, z|D)$ подчиняются системе дифференциальных уравнений

$$z_i'' = \sum_{k \neq i} z_i' z_k' \frac{\wp'(z_i) + \wp'(z_k)}{\wp(z_i) - \wp(z_k)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения (4) возникают, если поделить (3) на $\psi(x, z|D)$ и сравнить вычеты левой и правой частей полученного равенства в точках $z = z_i$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 1 предоставляет широкий класс решений системы (4), приходящих из алгебро-геометрических данных. Соображения размерности показывают, что таким образом получаются все решения. Другими словами, мы могли бы начать с произвольного решения системы (4) и показать, что соответствующая ему эллиптическая функция (2) удовлетворяет уравнению Шрёдингера.

Начиная с этого момента, основным объектом нашего внимания будет система (4). Эта система описывает движение n частиц на кривой Γ вне точки ∞

или, с другой точки зрения, на $\widehat{\Gamma}$ вне точки $z = 0$. Введем новые переменные $\xi_i = \ln z'_i$, $i = 1, \dots, n$; тогда в переменных z_i , ξ_i система (4) переписывается в виде

$$\begin{aligned} z'_i &= e^{\xi_i}, \\ \xi'_i &= \sum_{k \neq i} e^{\xi_k} \frac{\wp'(z_i) + \wp'(z_k)}{\wp(z_i) - \wp(z_k)}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Динамическая система (5) является гамильтоновой по отношению к гамильтониану $H = \sum_{i=1}^n e^{\xi_i}$ и 2-форме

$$\omega = \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\xi_i - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{\wp'(z_i) + \wp'(z_j)}{\wp(z_i) - \wp(z_j)} dz_i \wedge dz_j. \quad (6)$$

Доказательство заключается в непосредственной выкладке, которую мы опускаем.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\xi_i - \sum_{j \neq i} \frac{\wp'(z_i)}{\wp(z_i) - \wp(z_j)} dz_i \wedge dz_j \\ &= \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\xi_i + \sum_{j \neq i} dz_i \wedge \frac{\wp'(z_j) dz_j - \wp'(z_i) dz_i}{\wp(z_j) - \wp(z_i)} \\ &= \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\xi_i + \sum_{i \neq j} dz_i \wedge d(\ln(\wp(z_j) - \wp(z_i))) = \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\rho_i, \end{aligned}$$

где

$$\rho_i = \xi_i + \sum_{j \neq i} \ln(\wp(z_j) - \wp(z_i)).$$

Вид первых интегралов системы (4) подсказывает алгебро-геометрическая конструкция. Из условий $\psi(x, \kappa_s | D) = \psi(x, -\kappa_s | D)$ (свойство 3 предложения 1) вытекают равенства

$$\sum_{j=1}^n \frac{z'_j}{\wp(\kappa_s) - \wp(z_j)} = 0, \quad s = 1, \dots, n-1.$$

Будучи переписаны в виде

$$\sum_{i=1}^n z'_i \prod_{j \neq i} (\wp(z_j) - \wp(\kappa_s)) = 0, \quad s = 1, \dots, n-1,$$

эти равенства означают, что $\widehat{\kappa}_s = \wp(\kappa_s)$, $s = 1, \dots, n-1$, являются нулями полинома

$$L(\lambda) = L(\lambda | z, z') = \sum_{k=0}^{n-1} H_k(z, z') \lambda^k = \sum_{i=1}^n z'_i \prod_{j \neq i} (\wp(z_j) - \lambda). \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 2. Коэффициенты H_k полинома (7) являются интегралами движения системы (4).

ЗАМЕЧАНИЕ. Старший коэффициент $H_{n-1}(z, z')$ в (7) с точностью до знака совпадает с гамильтонианом $H(z, z')$ системы (4).

Можно показать, что утверждение теоремы следует из того факта, что все решения системы (4) являются алгебро-геометрическими (коэффициенты H_k являются симметрическими функциями нулей $\hat{\kappa}_s$ полинома $L(\lambda)$). Мы предлагаем независимое прямое доказательство, которое приведено в приложении I.

Заметим, что $L(\wp(z_j)) = e^{\rho_j}$. Используя это равенство, можно переписать форму ω в следующем виде:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\rho_i = \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d \ln L(\wp(z_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{L(\wp(z_i))} dz_i \wedge d \left(\sum_{s=0}^{n-1} H_s \wp^s(z_i) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\wp^s(z_i)}{L(\wp(z_i))} dz_i \wedge dH_s \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} d \left(\sum_{i=1}^n \int_{E_0}^{\wp(z_i)} \frac{E^s dE}{L(E)y(E)} \right) \wedge dH_s + \sum_{s,k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \int_{E_0}^{\wp(z_i)} \frac{E^{s+k} dE}{L(E)^2 y(E)} \right) dH_k \wedge dH_s \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} d \left(\sum_{i=1}^n \int_{E_0}^{\wp(z_i)} \frac{E^s dE}{L(E)y(E)} \right) \wedge dH_s, \end{aligned}$$

где E_0 — некоторая зафиксированная точка на комплексной плоскости переменной E , а функция $y(E)$ определяется уравнением (1).

Таким образом, нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 3. Переменные

$$\varphi_s = \sum_{i=1}^n \int_{E_0}^{\wp(z_i)} \frac{E^s dE}{L(E)y(E)}, \quad s = 0, \dots, n-1,$$

и коэффициенты H_s полинома $L(\lambda|z, z')$ являются переменными типа «действие-угол» для системы (4).

Дополнительно мы хотим переписать форму ω в терминах нулей $\hat{\kappa}_s$, $s = 1, \dots, n-1$, полинома $L(\lambda)$. Для этого введем новые переменные

$$\chi_j = \sum_{i=1}^n \int_{E_0}^{\wp(z_i)} \frac{dE}{(E - \hat{\kappa}_j)y(E)}, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Определим также переменную

$$\chi = \sum_{i=1}^n \int_{E_0}^{\wp(z_i)} \frac{dE}{y(E)}.$$

ТЕОРЕМА 4. Определенная выше симплектическая форма ω может быть записана в следующем виде:

$$\omega = d\chi \wedge d(\ln H) + \sum_{j=1}^{n-1} d\chi_j \wedge d\hat{\kappa}_j. \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим особо то обстоятельство, что переменные $\{\chi, \chi_j, j = 1, \dots, n-1\}$ являются аналогами компонент отображения Абеля для вырожденной кривой. Таким образом, рассматриваемая нами гамильтонова структура вкладывается в общую схему, предложенную в [8] и развитую в [9].

Доказательство теоремы 4 ввиду громоздкости формул помещено в приложение II.

§3. Общий случай

Рассмотрим гиперэллиптическую кривую Γ рода g , $g \geq 1$, заданную уравнением

$$\Gamma = \left\{ Q = (y, E) \mid y^2 = R_g(E) = \prod_{i=1}^{2g+1} (E - E_i) \right\}.$$

Как и в эллиптическом случае, эта кривая компактифицируется в бесконечности одной точкой, которую мы обозначаем ∞ . Кривая Γ двулистно накрывает комплексную плоскость переменной E .

Мы будем исследовать следующую систему дифференциальных уравнений на кривой Γ :

$$\zeta_j'' = \frac{R_g'(\zeta_j)}{2R_g(\zeta_j)} (\zeta_j')^2 + \sum_{k \neq j} \frac{\zeta_j' \zeta_k'}{\zeta_j - \zeta_k} \left(1 + \sqrt{\frac{R_g(\zeta_j)}{R_g(\zeta_k)}} \right). \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 5. Система (9) является гамильтоновой по отношению к 2-форме

$$\omega = \sum_{j=1}^n \frac{d\zeta_j}{\sqrt{R_g(\zeta_j)}} \wedge d\rho_j,$$

где $\rho_j = \zeta_j' + \sum_{k \neq j} \ln(\zeta_k - \zeta_j)$, и гамильтониану

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\zeta_i'}{2\sqrt{R_g(\zeta_i)}}.$$

Коэффициенты $H_s(\zeta, \zeta')$, $s = 0, \dots, n-1$, полинома

$$L(\lambda) = L(\lambda | \zeta, \zeta') = \sum_{k=0}^{n-1} H_s(\zeta, \zeta') \lambda^s = \sum_{j=1}^n \frac{\zeta_j'}{\sqrt{R_g(\zeta_j)}} \prod_{k \neq j} (\zeta_k - \lambda)$$

являются первыми интегралами системы (9). Вместе с величинами

$$\varphi_s = \sum_{j=1}^n \int_{E_0}^{\zeta_j} \frac{E^s dE}{L(E)y(E)}, \quad s = 0, \dots, n-1,$$

они образуют набор переменных типа «действие–угол» для системы (9).

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку линии уровня первых интегралов не компактны, для системы (9) не существует канонического выбора переменных типа «действие–угол».

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $\wp_g(z)$ является решением дифференциального уравнения

$$\wp_g' = 2\sqrt{R_g(\wp_g)}.$$

Определим новые переменные z_j , $j = 1, \dots, n$, из условий $\zeta_j = \wp_g(z_j)$. В новых переменных система (9) переписывается в виде

$$z_i'' = \sum_{k \neq i} z_i' z_k' \frac{\wp_g'(z_i) + \wp_g'(z_k)}{\wp_g(z_i) - \wp_g(z_k)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Дальнейший ход доказательства повторяет эллиптический случай (с заменой $\wp(z)$ на $\wp_g(z)$ и т. п.), и потому мы его опускаем.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция $\wp_g(z)$ является корректно определенным локальным параметром в конечной части кривой Γ . Следовательно, система (9) описывает движение n частиц на Γ вне точки ∞ .

Наша следующая цель — показать, что система (9) описывает динамику нулей решения уравнения Шрёдингера, построенного по кривой Γ . Мы предполагаем, что число нулей n превосходит род g кривой Γ . Такие решения строятся стандартным для теории конечнозонного интегрирования способом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть в плоскости переменной E зафиксирован дивизор $R = \kappa_1 + \dots + \kappa_{n-g}$. Тогда для дивизора общего положения $D = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ на кривой Γ существует единственная функция $\psi(x, Q | D, R)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) она мероморфна на кривой Γ вне точки ∞ и имеет не более чем простые полюсы в точках γ_i , $i = 1, \dots, n$;

2) в окрестности точки ∞ она допускает разложение вида

$$\psi(x, Q | D, R) = e^{xE^{1/2}} \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(x) E^{-s/2} \right);$$

3) $\psi(x, \kappa_i^+ | D, R) = \psi(x, \kappa_i^- | D, R)$, где $\kappa_i^\pm$ являются прообразами точек κ_i при проекции на E -плоскость.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность такой функции (при условии, что она существует) следует непосредственно из теоремы Римана–Роха. Чтобы показать, что она существует, мы предъявим явное выражение для $\psi(x, Q | D, R)$ в терминах θ -функций Римана.

Напомним, что θ -функция Римана, отвечающая алгебраической кривой Γ рода g , — это целая функция g комплексных аргументов $z = (z_1, \dots, z_g)$, которая определяется своим разложением Фурье

$$\theta(z_1, \dots, z_g) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{2\pi i(m, z) + \pi i(Bm, m)},$$

где $B = (B_{ij})$, $B_{ij} = \oint_{b_i} \omega_j$, — матрица b -периодов нормированных голоморфных дифференциалов $\omega_j(P)$ на Γ : $\oint_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}$. Здесь a_i , b_i — базис циклов на Γ с канонической матрицей пересечений: $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0$, $a_i \circ b_j = \delta_{ij}$.

θ -функция обладает следующими свойствами монодромии по отношению к решетке $\mathcal{B}$, образованной базисными векторами $e_i \in \mathbb{C}^g$ и столбцами B_j матрицы b -периодов:

$$\theta(z + l) = \theta(z), \quad \theta(z + Bl) = \exp[-i\pi(Bl, l) - 2i\pi(l, z)] \theta(z),$$

где l — целочисленный вектор, $l \in \mathbb{Z}^g$. Многообразием Якоби или якобианом алгебраической кривой Γ называют комплексный тор $J(\Gamma) = \mathbb{C}^g/\mathcal{B}$. Отображение Абеля $\Gamma \mapsto J(\Gamma)$ переводит точку Q в вектор $A(Q)$ с координатами

$$A_k(Q) = \int_{Q_0}^Q \omega_k,$$

где Q_0 — некоторая фиксированная точка кривой Γ .

Согласно теореме Римана–Роха, для дивизоров общего положения $D = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ и $\mathcal{R} = \kappa_1^+ + \dots + \kappa_{n-g+1}^+$, где $\kappa_{n-g+1}^+ = \infty$, существуют и единственны такие мероморфные функции $r_\alpha(Q)$, $\alpha = 1, \dots, n+g-1$, что D является дивизором полюсов для каждой из них и выполнены условия $r_\alpha(\kappa_\beta^+) = \delta_{\alpha\beta}$. Имеют место следующие выражения для этих функций:

$$r_\alpha(Q) = \frac{f_\alpha(Q)}{f_\alpha(\kappa_\alpha^+)}, \quad f_\alpha(Q) = \theta(A(Q) + Z_\alpha) \frac{\prod_{\beta \neq \alpha} \theta(A(Q) + F_\beta)}{\prod_{m=1}^{n-g+1} \theta(A(Q) + S_m)},$$

где

$$F_\beta = -\mathcal{K} - A(\kappa_\beta^+) - \sum_{s=1}^{g-1} A(\gamma_s), \quad S_m = -\mathcal{K} - A(\gamma_{g-1+m}) - \sum_{s=1}^{g-1} A(\gamma_s),$$

$$Z_\alpha = Z_0 - A(R_\alpha), \quad Z_0 = -\mathcal{K} - \sum_{s=1}^n A(\gamma_s) + \sum_{\alpha=1}^{n-g+1} A(R_\alpha),$$

а $\mathcal{K}$ является вектором римановых констант.

Пусть $d\Omega$ обозначает единственный мероморфный дифференциал на Γ , имеющий двойной полюс в точке ∞ , голоморфный всюду вне нее и нормированный g условиями

$$\oint_{a_k} d\Omega = 0.$$

Рассмотрим вектор b -периодов $V = (V_1, \dots, V_g)$ этого дифференциала:

$$V_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_k} d\Omega.$$

Определим функции $\psi_\alpha(x, Q|D, R)$ следующими формулами:

$$\psi_\alpha(x, Q|D, R) = r_\alpha(Q) \frac{\theta(A(Q) + xV + Z_\alpha) \theta(Z_0)}{\theta(A(Q) + Z_\alpha) \theta((xV + Z_0))} \exp \left(x \int_{R_\alpha}^Q d\Omega \right).$$

Нетрудно показать, что эти функции корректно определены на кривой Γ . Пусть вектор c_α , $\alpha = 1, \dots, n-g$, дает решение линейной системы

$$\sum_{\alpha=1}^{n-g} c_\alpha \psi_\alpha(x, \kappa_\beta^- | D, R) + \psi_{n-g+1}(x, \kappa_\beta^- | D, R) = c_\beta, \quad \beta = 1, \dots, n-g.$$

Тогда функция

$$\psi(x, Q|D, R) = \psi_{n-g+1}(x, Q|D, R) + \sum_{\alpha=1}^{n-g} c_\alpha \psi_\alpha(x, Q|D, R)$$

удовлетворяет требуемым трем условиям. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. Построенная выше функция $\psi(x, Q|D, R)$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$(\partial_x^2 + u(x))\psi(x, Q) = E\psi(x, Q)$$

с потенциалом $u(x) = -2\partial_x \xi_1(x)$.

Функция $\psi(x, Q|D, R)$ имеет n нулей на Γ , проекции $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ которых на плоскость аргумента E удовлетворяют уравнениям Дубровина, имеющим в данном случае следующий вид:

$$\frac{\partial \zeta_s}{\partial x} = \frac{2\sqrt{R_g(\zeta_s)} \prod_{\alpha=1}^{n-g} (\zeta_s - \kappa_\alpha)}{\prod_{j \neq s} (\zeta_s - \zeta_j)}.$$

Можно переписать эти уравнения в матричной форме

$$Mv = e, \tag{10}$$

где $v = (v_1, \dots, v_n)$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ и

$$v_i = \frac{\partial_x \zeta_i}{2\sqrt{R_g(\zeta_i)}}, \quad e_j = \delta_{jg},$$

а элементы матрицы $M = (M_{ji})$ имеют вид

$$M_{ji} = \begin{cases} \zeta_i^{j-1}, & j \leq g, \\ 1/(\zeta_i - \kappa_{j-g}), & j > g. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 6. Проекции $\zeta_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, нулей функции $\psi(x, Q|R, D)$ удовлетворяют уравнениям, которые получаются ограничением системы (9) на совместные линии уровня g первых интегралов этой системы:

$$H_{n-k} = \delta_{kg}, \quad k = 1, \dots, g. \tag{11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проекции ζ_j нулей функции $\psi(x, Q|R, D)$ на E -плоскость удовлетворяют n уравнениям, в совокупности составляющим матричное уравнение (10). Первые g из них означают, что выполнены ограничения (11). Следовательно, полином $L(\lambda|\zeta, \zeta')$ имеет степень $n - g$, и оставшиеся $n - g$ уравнений системы (10) говорят, что точки $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-g}$ являются его нулями. Коэффициенты $L(\lambda)$, таким образом, не зависят от времени, т.е. $H'_j(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Последний набор уравнений эквивалентен системе (9). Теорема доказана.

В заключение заметим, что для общего решения ζ_j , $j = 1, \dots, n$, системы (9), удовлетворяющего условиям (11), мы можем определить алгебро-геометрические данные, полагая R дивизором нулей полинома $L(\lambda)$ и полагая дивизор D равным

$$(\sqrt{R_g(\zeta_1(0))}, \zeta_1(0)) + \dots + (\sqrt{R_g(\zeta_n(0))}, \zeta_n(0)).$$

Иными словами, почти все решения ограниченной системы можно получить, используя конструкцию из предложения 3.

Приложение I

В этом приложении мы даем доказательство теоремы 2. Утверждение данной теоремы состоит в том, что коэффициенты полинома

$$L(\lambda) = L(\lambda|z, z') = \sum_{j=1}^n z'_j \prod_{i \neq j} (\wp(z_i) - \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} H_k(z, z') \lambda^k$$

являются интегралами движения системы (4).

Явные формулы для коэффициентов H_k таковы:

$$H_k = \sum_{|J|=n-k-1} (-1)^k \prod_{j \in J} \wp(z_j) \left(\sum_{k \notin J} z'_k \right),$$

где суммирование ведется по всем подмножествам $J \subset \{1, \dots, n\}$ мощности $n - k - 1$.

Мы собираемся показать, что функции H_k не зависят от времени, т.е. $dH_k/dx = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d(-1)^k H_k(z, z')}{dx} &= \sum_J \prod_{j \in J} \wp(z_j) \sum_{k \notin J} z''_k + \sum_J \left(\sum_{s \in J} \frac{\wp'(z_s)}{\wp(z_s)} z'_s \right) \prod_{j \in J} \wp(z_j) \sum_{k \notin J} z''_k \\ &= \sum_J \prod_{j \in J} \wp(z_j) \left(\sum_{k \notin J} \sum_{i \neq k} \frac{\wp'(z_k) + \wp'(z_i)}{\wp(z_k) - \wp(z_i)} z'_i z'_k \right) \\ &\quad + \sum_J \prod_{j \in J} \wp(z_j) \left(\sum_{k \notin J} \sum_{s \in J} \frac{\wp'(z_s)}{\wp(z_s)} z'_k z'_s \right) \\ &= \sum_J \prod_{j \in J} \wp(z_j) \left(\sum_{k \notin J} \sum_{s \in J} \left[\frac{\wp'(z_s)}{\wp(z_s)} + \frac{\wp'(z_k) + \wp'(z_s)}{\wp(z_k) - \wp(z_s)} \right] z'_k z'_s \right) \\ &= \sum_{J, k \notin J, s \in J} \alpha(J, k, s), \end{aligned}$$

где

$$\alpha(J, k, s) = \prod_{j \in J} \wp(z_j) \left[\frac{\wp'(z_s)}{\wp(z_s)} + \frac{\wp'(z_k) + \wp'(z_s)}{\wp(z_k) - \wp(z_s)} \right] z'_k z'_s.$$

Рассмотрим на множестве троек $\{J, k \notin J, s \in J\}$ инволюцию, отображающую $\{J, k, s\}$ в $\{J', s, k\}$, где $J' = J \cup \{k\} \setminus \{s\}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \alpha(J, k, s) + \alpha(J', s, k) &= \prod_{j \in J \cap J'} \wp(z_j) z'_k z'_s \left[\wp'(z_s) + \wp'(z_k) \right. \\ &\quad \left. + \wp(z_s) \frac{\wp'(z_k) + \wp'(z_s)}{\wp(z_k) - \wp(z_s)} + \wp(z_k) \frac{\wp'(z_s) + \wp'(z_k)}{\wp(z_s) - \wp(z_k)} \right] = 0 \end{aligned}$$

и, следовательно, вся сумма $\sum_{J, k \notin J, s \in J} \alpha(J, k, s)$ равна нулю. Теорема доказана.

Приложение II

Здесь представлено доказательство теоремы 4.

Рассмотрим 2-форму $\omega = \sum_{s=0}^{n-1} d\varphi_s \wedge dH_s$. Напомним, что $H_s = (-1)^s H \sigma_{n-s-1}(\hat{\kappa})$ для $s = 0, \dots, n-1$, где $\sigma_{n-s-1}(\hat{\kappa})$ обозначает коэффициент при λ^s в полиноме $\prod_{i=1}^{n-1} (\lambda + \hat{\kappa}_i)$. Через $\sigma_{n-s-2}^j(\hat{\kappa})$ мы обозначим коэффициент при λ^s в полиноме $\prod_{i \neq j} (\lambda + \hat{\kappa}_i)$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{s=0}^{n-1} d\varphi_s \wedge dH_s = \sum_{s=0}^{n-2} d\varphi_s \wedge (-1)^s d(H \sigma_{n-s-1}(\hat{\kappa})) + (-1)^{n-1} d\varphi_{n-1} \wedge dH \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \sigma_{n-s-1}(\hat{\kappa}) d\varphi_s \wedge dH + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{n-2} (-1)^s H \sigma_{n-s-2}^j(\hat{\kappa}) d\varphi_s \wedge d\hat{\kappa}_j. \quad (12) \end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{n-2} (-1)^s H \sigma_{n-s-2}^j(\hat{\kappa}) d\varphi_s \\ &= \sum_{s=0}^{n-2} \sum_{l=1}^n (-1)^s H \sigma_{n-s-2}^j(\hat{\kappa}) d \int_{E_0}^{\wp(z_l)} \frac{E^s dE}{L(E)y(E)} \\ &= \sum_{l=1}^n d \int_{E_0}^{\wp(z_l)} \frac{\sum_{s=0}^{n-2} (-1)^s H \sigma_{n-s-2}^j(\hat{\kappa}) E^s}{L(E)y(E)} dE \\ &\quad - \sum_{l=1}^n \int_{E_0}^{\wp(z_l)} d \left(\frac{\sum_{s=0}^{n-2} (-1)^s H \sigma_{n-s-2}^j(\hat{\kappa}) E^s}{L(E)y(E)} \right) dE \\ &= \sum_{l=1}^n d \int_{E_0}^{\wp(z_l)} \frac{dE}{(E - \hat{\kappa}_j)y(E)} + \sum_{l=1}^n \int_{E_0}^{\wp(z_l)} \frac{dE}{(E - \hat{\kappa}_j)^2 y(E)} d\hat{\kappa}_j. \end{aligned}$$

Точно так же показывается, что

$$\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \sigma_{n-s-1}(\hat{\kappa}) d\varphi_s = \sum_{l=1}^n d \int_{E_0}^{\wp(z_l)} \frac{dE}{Hy(E)} + \sum_{l=1}^n \int_{E_0}^{\wp(z_l)} \frac{dE}{H^2 y(E)} dH.$$

Подставляя две эти формулы в (12), получаем

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{j=1}^{n-1} d \left(\sum_{l=1}^n \int_{E_0}^{\wp(z_l)} \frac{dE}{(E - \hat{\kappa}_j)y(E)} \right) \wedge d\hat{\kappa}_j + d \left(\sum_{l=1}^n \int_{E_0}^{\wp(z_l)} \frac{dE}{Hy(E)} \right) \wedge dH \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} d\chi_j \wedge d\hat{\kappa}_j + d\chi \wedge d(\ln H). \end{aligned}$$

Именно возможность записать форму ω в таком виде составляет утверждение теоремы 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Van Diejen J. F., Puschmann H.* Reflectionless Schrödinger operators, the dynamics of zeros, and the solitonic Sato formula. *Duke Math. J.*, **104**, No. 2, 269–318 (2000).
2. *Ruijsenaars S. N. M., Schneider H.* A new class of integrable systems and its relation to solitons. *Ann. Physics*, **170**, No. 2, 370–405 (1986).
3. *Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия. *УМН*, **31**, вып. 1 (187), 55–136 (1976).
4. *Дубровин Б. А.* Периодические задачи для уравнения Кортевега–де Фриза в классе конечнозонных потенциалов. *Функц. анализ и его прил.*, **9**, вып. 3, 41–52 (1975).
5. *Кричевер И. М.* Потенциалы с нулевым коэффициентом отражения на фоне конечнозонных потенциалов. *Функц. анализ и его прил.*, **9**, вып. 2, 77–79 (1975).
6. *Кричевер И. М.* Спектральная теория «конечнозонных» нестационарных операторов Шрёдингера. Нестационарная модель Пайерлса. *Функц. анализ и его прил.*, **20**, вып. 3, 42–54 (1986).
7. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions, Vol. II. McGraw-Hill, 1953.
8. *Веселов А. П., Новиков С. П.* О скобках Пуассона, совместимых с алгебраической геометрией и динамикой Кортевега–де Фриза на множестве конечнозонных потенциалов. *ДАН СССР*, **266**, №3, 533–537 (1982).
9. *Krichever I. M., Phong D.* Symplectic forms in the theory of solitons. In: *Surv. Differ. Geom. IV, Suppl. J. Differ. Geom.*, 239–313 (1998).

Институт теоретической физики РАН им. Л. Д. Ландау,
Columbia University
e-mail: alakhm@math.columbia.edu

Поступило в редакцию
5 октября 2000 г.

Институт теоретической физики РАН им. Л. Д. Ландау,
Columbia University
e-mail: yurik@math.columbia.edu