Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Э. Г. Рис, Конструктивное доказательство обобщенного изоморфизма Гельфанда, *Функц. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 4, 20–25

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa269>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:56:09

УДК 517.5

Конструктивное доказательство обобщенного изоморфизма Гельфанда

© 2001. В. М. БУХШТАБЕР, Э. Г. РИС

Пусть X — компактное хаусдорфово пространство. Обозначим через $\mathbb{C}(X)$ алгебру непрерывных комплекснозначных функций на X с $\sup$ -нормой.

В [1] в качестве следствия более общего результата мы получили, что образ вычисляющего отображения

$$\mathcal{E}: \text{Sym}^n(X) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}(X), \mathbb{C})$$

представляет собой множество непрерывных линейных отображений, которые являются фробениусовыми n -гомоморфизмами. В случае $n = 1$ это очень хорошо известная теорема, принадлежащая И. М. Гельфанду. Естественно возникает вопрос, как для данного непрерывного фробениусова n -гомоморфизма $f: \mathbb{C}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ построить такое множество $[x_1, \dots, x_n]$, что $\mathcal{E}[x_1, \dots, x_n] = f$. Цель настоящей статьи — ответить на этот вопрос и, таким образом, дать прямое доказательство теоремы (3.7) из [1].

1. Фробениусовы преобразования. Напомним некоторые основные определения из [1]. В тех случаях, когда встречаются утверждения, доказательства которых не приводятся здесь, мы отсылаем читателя к этой работе.

Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ — линейное отображение, где A — некоторая коммутативная алгебра. Определим индукцией по $n \in \mathbb{N}$ линейные отображения $\Phi_n(f): A^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{C}$, положив $\Phi_1(f) = f$, $\Phi_2(f)(a_1, a_2) = f(a_1)f(a_2) - f(a_1a_2)$ и для $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(f)(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \\ = f(a_1)\Phi_n(f)(a_2, a_3, \dots, a_{n+1}) - \Phi_n(f)(a_1a_2, \dots, a_{n+1}) \\ - \Phi_n(f)(a_2, a_1a_3, \dots, a_{n+1}) - \dots - \Phi_n(f)(a_2, a_3, \dots, a_1a_{n+1}). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Непосредственно из индуктивного определения следует, что если f удовлетворяет условию $\Phi_n(f) \equiv 0$, то $\Phi_{n+1}(f) \equiv 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Если $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет условию $\Phi_{n+1}(f) \equiv 0$, то $f(1) \in \{0, 1, \dots, n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Линейное отображение $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ называется фробениусовым n -гомоморфизмом, если $\Phi_{n+1}(f) \equiv 0$ и $f(1) = n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям $\Phi_{n+1}(f) \equiv 0$ и $f(1) = k$; тогда $\Phi_{k+1}(f) \equiv 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Если $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ является суммой n кольцевых гомоморфизмов $f_i: A \rightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$, то f — фробениусов n -гомоморфизм.

Для дальнейшего нам нужно знать, как ведут себя фробениусовы n -гомоморфизмы на идемпотентных элементах алгебры A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Пусть $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ — фробениусов n -гомоморфизм. Тогда

- 1) $f(e) \in \{0, 1, \dots, n\}$, где $e \in A$ — произвольный идемпотент;
- 2) $f(e_1) + \dots + f(e_r) \leq n$, где $\{e_1, \dots, e_r\}$ — произвольное множество ортогональных идемпотентов;
- 3) если $A = \mathbb{C}(X)$ и X — конечное множество, то f является суммой n кольцевых гомоморфизмов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e \in A$ — идемпотент, т.е. $e^2 = e$. Тогда

$$\Phi_{n+1}(f)(e, \dots, e) = (f(e) - n)\Phi_n(f)(e, \dots, e)$$

и по индукции $\Phi_{n+1}(f)(e, \dots, e) = [f(e)]_n$, где $[x]_n$ — убывающий факториал $x(x-1)\dots(x-n+1)$. Следовательно, если $\Phi_{n+1}(f) \equiv 0$, то $f(e) = k$ для некоторого целого k , такого, что $0 \leq k \leq n$.

Так как отображение f линейно и сумма ортогональных идемпотентов также является идемпотентом, то свойство 2) вытекает из уже доказанного свойства 1).

Пусть $e_x \in \mathbb{C}(X)$ — идемпотентная функция, такая, что $e_x(x) = 1$ и $e_x(y) = 0$, если $y \neq x$. Тогда $f(e_x) = k_x$ для некоторого неотрицательного целого числа k_x в силу свойства 1); так как $1 = \sum e_x$, мы имеем $\sum k_x = n$. Отображение $\tilde{e}_x: \mathbb{C}(X) \rightarrow \mathbb{C}$, двойственное к e_x (относительно этого базиса), является кольцевым гомоморфизмом, и $f = \sum k_x \tilde{e}_x$. Таким образом, f является суммой n кольцевых гомоморфизмов.

Нам также потребуются следующие более специальные результаты:

ЛЕММА 1.6. Пусть $a_1, a_2, \dots$ — некоторая последовательность элементов из A , такая, что $a_{r+1}a_r = a_{r+1}$ для всех r , и $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ — некоторое линейное отображение. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(f)(a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n}) \\ = (f(a_k) - n)(f(a_{k+1}) - n + 1) \dots (f(a_{k+n-1}) - 1)f(a_{k+n}), \end{aligned}$$

и если $ba_r = 0$ для всех r , то

$$\begin{aligned} \Phi_{n+2}(f)(b, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+n}) \\ = f(b)(f(a_k) - n)(f(a_{k+1}) - n + 1) \dots (f(a_{k+n-1}) - 1)f(a_{k+n}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем прямые вычисления. Имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(f)(a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n}) &= f(a_k)\Phi_n(f)(a_{k+1}, \dots, a_{k+n}) \\ &\quad - \Phi_n(f)(a_k a_{k+1}, \dots, a_{k+n}) - \dots - \Phi_n(f)(a_{k+1}, \dots, a_k a_{k+n}). \end{aligned}$$

Так как $a_r a_s = a_s$ для $r < s$, то правая часть этого равенства равна

$$(f(a_k) - n)\Phi_n(f)(a_{k+1}, \dots, a_{k+n})$$

и по индукции мы получаем первое утверждение леммы. Второе утверждение следует из первого, если заметить, что

$$\Phi_{n+2}(f)(b, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n}) = f(b)\Phi_{n+1}(f)(a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n}).$$

Ограничение отображения $\Phi_n(f)$ на алгебру симметрических тензоров $\mathcal{S}^n A \subset A^{\otimes n}$ обладает важным свойством мультипликативности, которое доказано в [1] (теорема (2.8)).

ТЕОРЕМА 1.7. Если $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ является фробениусовым n -гомоморфизмом, то отображение

$$\Phi_n(f)/n!: \mathcal{S}^n A \rightarrow \mathbb{C}$$

является кольцевым гомоморфизмом.

2. Симметрические произведения компактных пространств. В этом разделе мы свяжем нашу теорию с изучением симметрических произведений.

Обозначим через $\Phi_n(A)$ множество всех фробениусовых n -гомоморфизмов из A в $\mathbb{C}$.

Пусть, как и выше, X — некоторое компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\text{Sym}^n(X)$ — симметрическое произведение X^n/Σ_n и $\mathbb{C}(X)$ — алгебра непрерывных комплекснозначных функций на X с $\sup$ -нормой. Тогда вычисляющее отображение

$$\mathcal{E}: \text{Sym}^n(X) \rightarrow \Phi_n(\mathbb{C}(X)),$$

определяемое формулой

$$[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \left(g \rightarrow \sum g(x_k) \right),$$

является вложением. Ясно, что $\mathcal{E}$ функториально.

ТЕОРЕМА 2.1. Отображение

$$\mathcal{E}: \text{Sym}^n(X) \rightarrow \Phi_{n,c}(\mathbb{C}(X), \mathbb{C})$$

является гомеоморфизмом, если в пространстве непрерывных линейных функционалов на $\mathbb{C}(X)$ рассматривается слабая топология.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. В указанных выше условиях каждый непрерывный фробениусов n -гомоморфизм является суммой n кольцевых гомоморфизмов.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $n = 1$ это дает классический результат И. М. Гельфанда и $\mathcal{E}$ называется преобразованием Гельфанда. Тем не менее, по-видимому, «стандартные» доказательства того, что преобразование Гельфанда является гомеоморфизмом, нельзя приспособить к доказательству общего случая $n > 1$. Действительно, большинство доказательств классического случая $n = 1$ не «находит» точку $x \in X$, вычисление значений функций в которой задает кольцевой гомоморфизм $\mathbb{C}(X) \rightarrow \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Выберем для компактного подмножества $K \subset X$ последовательность непрерывных функций $\varphi_r: X \rightarrow [0, 1]$, такую, что

- $\varphi_r(K) = 1$,
- $\varphi_r(\text{supp}(\varphi_{r+1})) = 1$,
- $\bigcap_{r \geq 0} \text{supp}(\varphi_r) = K$.

Мы называем такую последовательность *огораживающей* последовательностью для K . Очевидно, что $\varphi_r \varphi_s = \varphi_s$, если $r < s$.

Простое вычисление, использующее лемму 1.6, дает следующий результат:

ЛЕММА 2.3. Пусть $f: \mathbb{C}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ — некоторый непрерывный фробениусов n -гомоморфизм, $\{\varphi_r\}$ — последовательность функций, описанная выше, и $b_r = f(\varphi_r)$. Тогда если $r_0 < r_1 < \dots < r_n$, то

$$(b_{r_0} - n)(b_{r_1} - (n-1)) \cdots (b_{r_{n-1}} - 1)b_{r_n} = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $\{b_r\}$ — последовательность комплексных чисел, такая, что

$$b_0 = n, \quad (b_{r_0} - n)(b_{r_1} - (n - 1)) \cdots (b_{r_{n-1}} - 1)b_{r_n} = 0$$

для любых r_i , таких, что $r_0 < r_1 < \cdots < r_n$. Тогда существуют целые числа k и N , такие, что $b_r = k$ для всех $r \geq N$, причем $0 \leq k \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем индукцию по n .

При $n = 1$ мы имеем $(b_r - 1)b_{r+1} = 0$ для всех r . Таким образом, либо $b_r = 1$ для всех r , либо существует такое r_0 , что $b_{r_0} \neq 1$. Но в этом случае, согласно приведенному выше тождеству, $b_{r_0+1} = 0$, и тогда, снова используя это тождество, мы получаем, что $b_r = 0$ для всех $r > r_0$, а это и требовалось.

В общем случае предположим, что существует такое r_0 , что $b_{r_0} \neq n$. Тогда, согласно тождеству, $(b_{r_1} - (n - 1)) \cdots (b_{r_{n-1}} - 1)b_{r_n} = 0$ для любых $r_1, \dots, r_n$, таких, что $r_0 < r_1 < \cdots < r_n$. Следовательно, по индуктивному предположению существует такое N , что для всех $r > N$ мы имеем $b_r = k$ для некоторого целого k в интервале $0 \leq k \leq n - 1$.

Следовательно, огораживающая последовательность для K определяет некоторое целое число k .

ЛЕММА 2.5. Для данного компактного подмножества $K \subset X$ целое число k не зависит от выбора огораживающей последовательности φ_r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим две такие последовательности $\{\varphi_r\}$ и $\{\psi_r\}$. Выбирая соответствующие подпоследовательности, мы можем предположить, что $f(\varphi_r) = k$ и $f(\psi_r) = \ell$ для всех r и что $\varphi_r \psi_s = \psi_s$ для $s \geq r$. Меняя местами, если необходимо, обозначения $\{\varphi_r\}$ и $\{\psi_r\}$, мы можем считать, что $k \leq \ell \leq n$. Тогда, поскольку f является фробениусовым n -кольцевым гомоморфизмом, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi_{n+1}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-k}, \psi_{n-k}, \psi_{n-k+1}, \dots, \psi_n) \\ &= (k - n)(k - (n - 1)) \cdots (k - (k + 1))(\ell - k)(\ell - (k - 1)) \cdots (\ell - 1)\ell. \end{aligned}$$

Из условия $k \leq \ell \leq n$ вытекает теперь, что $k = \ell$.

Комбинируя предыдущие результаты, мы можем определить вес $w_f(K)$ компактного множества $K \subset X$ относительно f как предельное значение k для любой из таких последовательностей $f(\varphi_n)$. Таким образом,

$$w_f(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\varphi_n).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть K и L — компактные подмножества в X . Тогда

- (a) $w_f(K \cup L) + w_f(K \cap L) = w_f(K) + w_f(L)$;
- (b) если $L \subset K$, то $w_f(L) \leq w_f(K)$;
- (c) если $K \cap L = \emptyset$, то $w_f(K) + w_f(L) \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ — огораживающие последовательности для K и L , соответственно.

(a) $\max(\varphi_n, \psi_n)$ и $\min(\varphi_n, \psi_n)$ являются огораживающими последовательностями для $K \cup L$ и $K \cap L$ соответственно. Доказываемый результат теперь следует из того, что $\max(\varphi_n, \psi_n) + \min(\varphi_n, \psi_n) = \varphi_n + \psi_n$.

(b) Предположим, что $f(\varphi_r) = k$ для всех $r \geq N$. Выберем M , такое, что $\varphi_N(\text{supp}(\psi_M)) = 1$, и рассмотрим последовательность $\{\varphi_N, \psi_M, \psi_{M+1}, \dots\}$.

Предел последовательности $f(\psi_n)$ есть $w_f(L)$, и так как $f(\psi_n) = w_f(K)$, то $w_f(L) \leq w_f(K)$.

(с) Это утверждение является прямым следствием двух предыдущих вместе с предложением 1.1 и того факта, что $w_f(X) = n$.

Наша конструкция позволяет сопоставить вес каждому одноточечному подмножеству в X . Обозначим через S_f множество, состоящее из всех точек ненулевого веса, в которое каждая точка входит с кратностью, равной ее весу.

ЛЕММА 2.7. Пусть $\psi: X \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функция, пересечение носителя которой с S_f является пустым множеством. Тогда $f(\psi) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\varphi_r\}$ — последовательность функций, такая, что пересечение носителя каждой функции φ_r с носителем функции ψ пусто, $\varphi_r = 1$ в окрестности множества S_f и $\varphi_{r+1}\varphi_r = \varphi_{r+1}$ для каждого r . Следовательно, $\psi\varphi_r = 0$ и, таким образом, $(1 - \psi)\varphi_r = \varphi_r$. Однако существует N , такое, что $f(\varphi_r) = n$ для всех $r \geq N$. Используя определение фробениусова n -гомоморфизма и лемму 1.6, получаем, что

$$0 = f(\psi)(f(\varphi_N) - (n - 1))(f(\varphi_{N+1}) - (n - 2)) \cdots f(\varphi_{N+n-1}).$$

Следовательно, $f(\psi) = 0$.

ЛЕММА 2.8. Пусть $x_0 \in S_f$ и $\psi: X \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функция, такая, что $S_f \cap \text{supp}(\psi) = \{x_0\}$. Тогда $f(\psi) = w_f(x_0)\psi(x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\varphi_r\}$ — огораживающая последовательность для $\{x_0\}$. Рассмотрим функцию $\theta_r = (\psi - \psi(x_0))\varphi_r$. Ее модуль не превосходит $|\psi - \psi(x_0)|$ и обращается в нуль вне некоторой окрестности точки x_0 ; ввиду непрерывности функции ψ функции θ_r стремятся к 0 в sup -норме при $r \rightarrow \infty$. Следовательно, $f(\theta_r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Но пересечение носителя функции $\psi(1 - \varphi_r)$ с S_f пусто; значит, согласно лемме 2.7, $f(\psi) = f(\psi\varphi_r)$. Используя теперь линейность функционала f , получаем $f(\psi) = f(\psi\varphi_r)f(\theta_r) + \psi(x_0)f(\varphi_r)$, и, таким образом, $f(\psi) = \psi(x_0)w_f(x_0)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Множество S_f является n -точечным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S_f = \{x_1, \dots, x_r\}$ (без учета кратностей). Возьмем разбиение единицы $1 = p_1 + \dots + p_r$, где пересечение носителя функции p_k с S_f равно $\{x_k\}$. Тогда если f — фробениусов n -гомоморфизм, то в силу его линейности и леммы 2.8

$$n = f(1) = f(p_1) + \dots + f(p_r) = \sum_{k=1}^r w_f(x_k)p_k(x_k) = \sum_{k=1}^r w_f(x_k).$$

Следовательно, S_f является n -точечным множеством.

Следующий результат завершает доказательство того, что отображение $\mathcal{E}$ из теоремы 2.1 является отображением на.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. Отображения f и $\mathcal{E}(S_f): \mathbb{C}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая функция $\psi \in \mathbb{C}(X)$ может быть записана в виде суммы двух функций, носитель одной из которых близок к S_f , а другая обращается в нуль в окрестности множества S_f . Применяя две предыдущие леммы, мы получаем, что

$$f(\psi) = \sum_{x \in S_f} w_f(x)\psi(x)$$

и, тем самым, требуемый результат. Действительно, правая часть равенства может быть записана также как $\sum_{x \in X} w_f(x)\psi(x)$, поскольку $w_f(x) = 0$ для $x \notin S_f$.

Благодарности. Настоящая статья опирается на исследования, которые были выполнены в ходе визитов первого автора в университет Эдинбурга, поддержанных Engineering and Physical Sciences Research Council и London Mathematical Society.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Buchstaber V. M., Rees E. G.* The Gelfand map and symmetric products. Preprint, 2001; e-print uk.arXiv.org: math.CO/0109122.

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
email: buchstab@mech.math.msu.su
Department of Mathematics and Mechanics,
Edinburgh University
email: elmer@maths.ed.ac.uk

Поступило в редакцию
10 сентября 2001 г.