Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Алимов, Геометрическое строение чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)$, *Функци. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 1, 1–10

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa27>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:46:06

Геометрическое строение чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)^*$

© 2005. А. Р. АЛИМОВ

Подмножество $M \neq \emptyset$ линейного нормированного пространства $(X, \|\cdot\|)$ называется *чебышёвским множеством*, если для каждой точки $x \in X$ множество $P_M x = \{y \in M : \|x - y\| = \rho(x, M) = \inf_{z \in M} \|x - z\|\}$ ближайших к ней точек из M состоит из одной точки. Например, чебышёвскими множествами являются подпространство многочленов степени не выше m в $C[0, 1]$ и прямая на евклидовой плоскости.

В работе два основных результата: теорема 1 описывает аппроксимативные свойства сечений чебышёвских множеств, солнц и строгих солнц в $\ell^\infty(n)$ координатными подпространствами. В теореме 2 в геометрических терминах характеризуются чебышёвские множества в пространстве $\ell^\infty(n)$.

Коротко о структуре работы: в §1 даются необходимые определения и формулируются вспомогательные утверждения, в §2 формулируется теорема 1, в §3 — теорема 2, а §4 посвящен доказательствам теорем 1 и 2.

§1. Определения и вспомогательные утверждения

Введем определения, необходимые для формулировки основных результатов.

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$. Через $\text{sAff}_k(\mathbb{R}^n)$ обозначим множество всех аффинных подпространств из $\mathbb{R}^n$ размерности k , каждое из которых параллельно некоторой k -мерной грани единичного шара¹⁾ B пространства $\ell^\infty(n)$. Иными словами, $\text{sAff}_k(\mathbb{R}^n)$ состоит из аффинных подпространств вида $\text{lin}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\} + x$, $x \in \mathbb{R}^n$; здесь $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Элементы из $\text{sAff}_k(\mathbb{R}^n)$ мы будем называть аффинными *координатными подпространствами* (при этом для краткости иногда опуская слово «аффинное»). Если $m < k \leq n$ и $P \in \text{sAff}_k(\mathbb{R}^n)$, то $Q \in \text{sAff}_m(P)$ означает, что $Q \in \text{sAff}_m(\mathbb{R}^n)$ и $Q \subset P$.

Далее, пусть $M \subset \mathbb{R}^n$, $2 \leq k \leq n$, $P \in \text{sAff}_k(\mathbb{R}^n)$, $Q \in \text{sAff}_{k-1}(P)$. Мы говорим, что Q — *локально опорная гиперплоскость* к множеству M в подпространстве P ($Q \in \text{locTan}_P(M)$), если найдется точка $x \in P \cap M$ и ее окрестность $\mathcal{O}(x)$ в P , такие, что Q является опорной гиперплоскостью к $M \cap \mathcal{O}(x)$ в P . Утверждение, что Q — *опорная гиперплоскость* к множеству $M \cap P$ в подпространстве P понимается обычным образом и записывается так: $Q \in \text{Tan}_P(M)$.

Всюду ниже X — действительное линейное нормированное пространство.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 02-01-00248).

¹⁾Напомним, что гранью выпуклого множества C называется такое его выпуклое подмножество $F \subset C$, что концы каждого отрезка в C , имеющего относительную внутреннюю точку в F , принадлежат множеству F .

Помимо чебышёвских множеств в работе важную роль будут играть понятия солнца и строгого солнца. Напомним, что множество $M \subset X$ называется *солнцем*, если для каждой точки $x \in X \setminus M$ существует точка $y \in P_M x$ (называемая *солнечной*), такая, что

$$y \in P_M((1 - \lambda)y + \lambda x) \text{ для всех } \lambda \geq 0. \quad (1)$$

Подмножество $M \subset X$ называется *строгим солнцем*, если для каждой точки $x \in X \setminus M$ множество $P_M x$ ближайших к ней точек из M непусто и утверждение (1) выполнено для каждой точки $y \in P_M x$. Ясно, что каждое строгое солнце является солнцем (обратное, вообще говоря, неверно). В конечномерном пространстве каждое чебышёвское множество является солнцем [1, теорема 4.13]. Солнце всегда непусто и замкнуто. О чебышёвских множествах, солнцах и строгих солнцах см. [1–11].

Если $x \in X$ и $r > 0$, то $B(x, r)$, $\mathring{B}(x, r)$ и $S(x, r)$ — соответственно замкнутый шар, открытый шар и сфера с центром x и радиусом r ; для краткости мы будем использовать обозначения $B = B(0, 1)$, $\mathring{B} = \mathring{B}(0, 1)$.

Для $x, y, x \neq y$, опорный конус $\mathring{K}(y, x)$ к шару $B(x, \|x - y\|)$ в точке y определяется формулой (см. [1, гл. 3])

$$\mathring{K}(y, x) = \bigcup_{r>0} \mathring{B}(-ry + (r+1)x, (r+1)\|x - y\|). \quad (2)$$

Важное свойство солнц — отделимость точки от солнца выпуклым конусом — содержится в следующем утверждении.

ЛЕММА А (Ошман [12]). 1. *Множество $M \subset X$ является солнцем в X тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \notin M$ найдется точка $y \in P_M x$, такая, что $\mathring{K}(y, x) \cap M = \emptyset$.*

2. *Множество $M \subset X$ является строгим солнцем в X тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \notin M$ множество $P_M x$ непусто и для любой точки $y \in P_M x$ выполнено равенство $\mathring{K}(y, x) \cap M = \emptyset$.*

Ниже, как и обычно, $\text{ri } A$, $\text{rb } A$, $\text{bd } A$ обозначают соответственно внутреннюю, относительную границу и границу множества A .

Следуя [5], для $x, y \in \mathbb{R}^n$ положим

$$Z[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^n : \|x - y\|_1 = \|x - z\|_1 + \|z - y\|_1\}, \quad \mathring{Z}[x, y] = \text{ri } Z[x, y],$$

где $\|\cdot\|_1$ есть ℓ^1 -норма на $\mathbb{R}^n$. Геометрически $Z[x, y]$ — наименьший прямоугольный параллелепипед, натянутый на x и y , грани которого параллельны граням шара B в $\ell^\infty(n)$ соответствующей размерности. Эквивалентное представление для $Z[x, y]$ установлено в [4]:

$$Z[x, y] = \bigcap \{B(\xi, r) : x, y \in B(\xi, r)\}, \quad \mathring{Z}[x, y] = \bigcap \{\mathring{B}(\xi, r) : x, y \in B(\xi, r)\}.$$

Подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется ℓ^1 -*выпуклым* [4, 5], если для всех $x, y \in M$, $x \neq y$, найдется точка $z \in M$, $z \neq x, y$, такая, что $\|x - y\|_1 = \|x - z\|_1 + \|z - y\|_1$, т. е. если $(Z[x, y] \setminus \{x, y\}) \cap M \neq \emptyset$. Так как ℓ^1 -норма не строго выпукла, то векторы $x - y$ и $x - z$ не обязаны быть параллельными. Под ℓ^1 -*геодезическим сегментом*, соединяющим x и y , мы подразумеваем дугу длины $\|x - y\|_1$, начинающуюся в x и заканчивающуюся в y . В этих терминах ℓ^1 -выпуклость замкнутого множества M означает [5], что любые две точки $x, y \in M$ могут быть

соединены ℓ^1 -геодезическим сегментом $k(t) \subset M$, $0 \leq t \leq 1$, координатные функции $k_i(t)$ которого монотонны по t , $1 \leq i \leq n$.

Отметим следующее важное легко проверяемое свойство ℓ^∞ -нормы $\|\cdot\|_\infty$ на $\mathbb{R}^n$: если $u, v \in \mathring{B}(x, r)$, то $\mathring{Z}[u, v] \subset \mathring{B}(x, r)$.

ℓ^1 -выпуклость будет играть большую роль в наших дальнейших рассуждениях. Сразу отметим следующий элегантный и полезный результат (см. также [4]).

ТЕОРЕМА В (Беренс, Хетцельт [5]). *Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является солнцем в $\ell^\infty(n)$, если и только если оно замкнуто и ℓ^1 -выпукло.*

Далее, если H — координатное аффинное подпространство в $\mathbb{R}^n$ и $z \in \mathbb{R}^n$, то обозначим через $\text{pr}_H z$ координатную проекцию точки z на H .

Следующая лемма играет важную роль в доказательстве теоремы 1.

ЛЕММА 1. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — солнце в $\ell^\infty(n)$ и $H \in \text{cAff}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Через H^+ , H^- обозначим два непересекающихся открытых полупространства с границей H . Пусть $Z = Z[x, y]$ или $Z = \mathring{Z}[x, y]$ для $x, y \in H$, $x \neq y$, и положим $Z^\pm = \{z \in H^\pm : \text{pr}_H z \in Z\}$. Тогда если $Z \cap M = \emptyset$, то $Z^+ \cap M = \emptyset$ или $Z^- \cap M = \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $0 \in H$. Пусть f — линейный функционал на $\mathbb{R}^n$, такой, что $\text{Ker } f = H$. Тогда $H^\pm = \{z \in \mathbb{R}^n : f(z) \gtrless 0\}$.

Предположим противное: пусть $x, y \in H$ таковы, что $Z \cap M = \emptyset$, но $Z^+ \cap M \neq \emptyset$ и $Z^- \cap M \neq \emptyset$. Выберем $z^\pm \in Z^\pm \cap M$. Поскольку M — солнце, то по теореме В оно замкнуто и ℓ^1 -выпукло; поэтому найдется ℓ^1 -геодезический сегмент $k(t) \subset M$, $t \in [0, 1]$, соединяющий z^+ и z^- . Поскольку $\text{pr}_H z^\pm \in Z$, то $Z[\text{pr}_H z^+, \text{pr}_H z^-] \subset Z$. Из этого в силу монотонности по t координатных функций $k_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, кривой $k(t)$ следует, что $\text{pr}_H k(t) \subset Z[\text{pr}_H z^+, \text{pr}_H z^-] \subset Z$. Окончательно, поскольку $f(z^+)f(z^-) < 0$, из непрерывности $k(t)$ следует, что найдется $t_0 \in (0, 1)$, для которого $f(k(t_0)) = 0$, т.е. $k(t_0) \in Z$. Но поскольку $k(t) \subset M$, мы получили противоречие с тем, что $Z \cap M = \emptyset$. Лемма 1 доказана. $\square$

Для $F \subset \mathbb{R}^n$ и $y \in \text{bd } F$ положим

$$\text{cone}(F, y) = \{\alpha f + (1 - \alpha)y : f \in F, \alpha \geq 0\}.$$

Если $X = \ell^\infty(n)$, $y \in X$ и $\|y\|_\infty = 1$, то пусть

$E(y)$ — наименьшая грань шара B , содержащая y (тогда $y \in \text{ri } E(y)$),

$\mathcal{F}(y)$ — множество всех собственных граней шара B , содержащих y .

Следующее утверждение является техническим и наглядно ясным.

ЛЕММА 2. *Пусть $X = \ell^\infty(n)$ и $\|y\|_\infty = 1$. Тогда*

$$\text{bd } \mathring{K}(y, 0) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(y)} \text{cone}(\text{ri } F, y). \quad (3)$$

Утверждение леммы 2 непосредственно следует из определения (2) конуса $\mathring{K}(y, 0)$ и утверждения, что для выпуклого тела $C \subset \mathbb{R}^n$ выполняется равенство $\text{bd } C = \bigcup \text{ri } F$, где объединение берется по всем собственным граням тела C [13, теорема 18.2].

§2. Аппроксимативные свойства сечений чебышёвских множеств, солнц и строгих солнц координатными подпространствами

В этом параграфе мы рассматриваем следующий вопрос. Дано множество $M \subset \mathbb{R}^n$, обладающее определенными аппроксимативными свойствами в $\ell^\infty(n)$. Пусть $H \subset \mathbb{R}^n$ — подпространство. Какими будут аппроксимативные свойства множества $M \cap H$ в подпространстве H с нормой, индуцированной¹⁾ нормой пространства $\ell^\infty(n)$? Ответы на этот вопрос принципиально разные в зависимости от того, является ли подпространство H координатным или нет.

Следующий простой пример на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(\xi_1, \xi_2)\}$ чебышёвского множества $M = \{\xi_2 = 1/\xi_1 : \xi_1 > 0\}$ в $\ell^\infty(2)$ и некоординатной прямой $H = \{\xi_1 + \xi_2 = 4\}$ показывает, что пересечение $M \cap H$ несвязно и, следовательно, не может являться чебышёвским множеством в H ни в какой норме на H .

Оказывается, что если выбрать подпространство H координатным, то ситуация в корне меняется: чебышёвские множества и солнца в $\ell^\infty(n)$ сохраняют свои аппроксимативные свойства при пересечении с координатными подпространствами H , а пересечение строгого солнца с координатным подпространством H всегда является солнцем в H и «почти всегда» является строгим солнцем (см. теорему 1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n-1$ и $H \in \text{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$ — координатное аффинное подпространство, причем норма на H индуцирована нормой $\|\cdot\|_\infty$ в $\mathbb{R}^n$. Пусть $M \cap H \neq \emptyset$. Тогда

(а) если M — чебышёвское множество в $\ell^\infty(n)$, то $M \cap H$ — чебышёвское множество в H ;

(б) если M — солнце в $\ell^\infty(n)$, то $M \cap H$ — солнце в H ;

(с) если M — строгое солнце в $\ell^\infty(n)$, то возможны два варианта: или $M \cap H$ — строгое солнце в H , или $M \cap H$ — солнце, но не строгое солнце в H ; в последнем случае найдется опорный конус $K = \dot{K}(\xi, \zeta) \subset \mathbb{R}^n$ линейной размерности²⁾ $\geq k$, такой, что $H \subset \text{bd } K$ и $\text{int } K \cap M = \emptyset$, и, кроме того, $M \not\subset H$.

В теореме 1 утверждение (б) известно и следует из теоремы В; утверждения (а) и (с) являются новыми. Пункт (с) указывает на возможность существования строгого солнца M , сечение которого координатным подпространством H может не быть строгим солнцем в H (и в [9] построен пример такого строгого солнца M и такой гиперплоскости H в $\ell^\infty(3)$). Однако такая ситуация не является типичной, так как в таком случае по п. (с) гиперплоскость H является опорной к M и, кроме того, $M \not\subset H$ и, значит, таких «неправильных» гиперплоскостей H не более 2^n .

¹⁾Более конкретно: для определения нормы на H за нулевой элемент θ можно принять любой элемент из H ; тогда норму на H определим как функционал Минковского множества $B(\theta, 1) \cap H$ относительно точки θ . Если H — координатное подпространство, то ясно, что при $\dot{B}(x, 1) \cap H \neq \emptyset$ пересечение $B(x, 1) \cap H$ изометрически изоморфно множеству $B(\theta, 1) \cap H$. Тогда H снабжено определенной таким образом нормой и для обозначения шара, сферы, конуса и т. п. мы будем использовать те же обозначения, что и для соответствующих объектов во всем пространстве, но с индексом H внизу: $B_H(x, r)$, $S_H(x, r)$, $\dot{K}_H(x, y)$ и т. п.

²⁾Напомним, что под линейной размерностью выпуклого множества $C \subset \mathbb{R}^n$ понимается размерность максимального аффинного подпространства, содержащегося в C . Понятно, что для опорного конуса $\dot{K}(x, y)$ в $\ell^\infty(n)$ такое максимальное подпространство всегда можно выбрать координатным.

Мы докажем теорему 1 в §5.

ЗАМЕЧАНИЕ (о сечениях некоординатными подпространствами). Отметим без доказательства, что если G — гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, не являющаяся координатной, то найдется чебышёвское множество $\widehat{M}$ в $\ell^\infty(n)$, такое, что сечение $\widehat{M} \cap G$ не будет стягиваемым в G и, следовательно, чебышёвским множеством ни в какой норме на G .

§3. Характеризация чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)$

В этом параграфе мы представляем второй основной результат работы — теорему 2 о характеристизации чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)$. У этого результата оказалась интересная предыстория: в марте 1989 г. Андрей Борисович Ходулёв (1953–1999) представил утверждение теоремы 2 на семинаре В. М. Тихомирова на механико-математическом факультете МГУ. С. В. Конягин обратил внимание автора на существование этой характеристизации чебышёвских множеств, а А. С. Кочуров предоставил ему свой конспект выступления Ходулёва; по этим записям оказалось возможным понять суть этого результата и некоторые детали его возможного доказательства. Формулировка и доказательство этой характеристизации самим Ходулёвым нигде не были опубликованы и, насколько известно автору, утеряны. Приведенное в этой работе доказательство теоремы 2 принадлежит автору работы. Пользуясь случаем, я выражаю глубокую благодарность указанным выше лицам, а также участникам семинара И. Г. Царькова в МГУ за помощь в поиске и обсуждении результата Ходулёва. О жизни и работах А. Б. Ходулёва см. [16, 17].

ТЕОРЕМА 2. *Множество M является чебышёвским в $\ell^\infty(n)$ тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:*

- (а) *множество M замкнуто;*
- (б) *множество $M \cap P$ связано для любых $k = 1, \dots, n$ и $P \in \text{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$;*
- (с) *для любых $k = 2, \dots, n$, $P \in \text{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$ и $Q \in \text{cAff}_{k-1}(P)$ из условия $Q \in \text{locTan}_P(M)$ вытекает, что $Q \in \text{Tan}_P(M)$ и пересечение $Q \cap M$ одноточечно.*

Отметим, что чебышёвские множества в $\ell^\infty(n)$ были охарактеризованы (в других терминах) Данхемом ([14], см. также [15]).

§4. Доказательство теорем 1 и 2

Следующий результат позволяет доказать утверждение (а) теоремы 1. Несмотря на его вспомогательный характер в работе, он имеет самостоятельный интерес и вопрос о его справедливости долгое время был открыт.

ЛЕММА 3. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — чебышёвское множество в $\ell^\infty(n)$, и пусть $H \in \text{cAff}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ — координатная аффинная гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$. Тогда если $M \cap H \neq \emptyset$, то $M \cap H$ — чебышёвское множество в $(H, \|\cdot\|)$, где норма $\|\cdot\|$ на H индуцирована ℓ^∞ -нормой на $\mathbb{R}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности мы можем считать, что $0 \in H$, и отождествим H с $\mathbb{R}^{n-1}$. Тогда норма $\|\cdot\|$ на H совпадает с $\|\cdot\|_\infty$ -нормой на $\mathbb{R}^{n-1}$. Пусть $M \cap H \neq \emptyset$.

Чебышёвское множество M в $\ell^\infty(n)$ является солнцем [1], и потому по теореме В оно ℓ^1 -выпукло. Так как $H \in \text{cAff}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$, то отсюда следует, что $M \cap H$ также ℓ^1 -выпукло. Снова применяя теорему В, получаем, что $M \cap H$ — солнце

в H . Предположим, что $M \cap H$ не является чебышёвским множеством в H . Тогда найдется точка $x \in H$, имеющая по крайней мере две ближайшие точки из $M \cap H$. Поскольку $M \cap H$ — солнце в H , у точки x среди ближайших к ней в $M \cap H$ есть солнечная точка; обозначим ее через $\hat{y}$. Пусть $y \in M \cap H$ — еще одна ближайшая точка к x из $M \cap H$, отличная от $\hat{y}$. Для простоты обозначений считаем, что $\|x - y\| = 1$. Итак, $\mathring{B}_H(x, 1) \cap M = \emptyset$, $y, \hat{y} \in S_H(x, 1)$.

Выберем линейный функционал f на $\mathbb{R}^n$, такой, что $\text{Ker } f = H$. Положим

$$\mathring{B}^+(x, 1) = \{z \in \mathbb{R}^n : f(z) \geq 0 \text{ и } \text{pr}_H z \in \mathring{B}_H(x, 1)\}.$$

Ясно, что $\mathring{B}_H(x, 1) = \mathring{Z}[u, v]$ для $u = x + (1, \dots, 1, 0)$, $v = x - (1, \dots, 1, 0) \in H$. Применяя лемму 1 к $\mathring{B}_H(x, 1)$, получаем, что $\mathring{B}^+(x, 1) \cap M = \emptyset$ или $\mathring{B}^-(x, 1) \cap M = \emptyset$. Не ограничивая общности, считаем, что $\mathring{B}^+(x, 1) \cap M = \emptyset$. Имеем ясную картину: «над» шаром $\mathring{B}_H(x, 1)$ нет точек из M : $\mathring{B}^+(x, 1) \cap M = \emptyset$. Поэтому в $\mathring{B}^+(x, 1)$ можно поместить шар $\mathring{B}(\hat{x}, 1)$ таким образом, что $y, \hat{y} \in S(\hat{x}, 1)$, получив противоречие с чебышёвостью множества M — точка $\hat{x}$ имеет две ближайшие точки $y, \hat{y}$ в $\ell^\infty(n)$. Аккуратно запишем эту идею.

Положим $\hat{x} = x + (0, \dots, 0, 1) \in \mathring{B}^+(x, 1)$. Для удобства считаем, что $f(\hat{x}) = 1$. Тогда $\mathring{B}(\hat{x}, 1) \subset \mathring{B}^+(x, 1)$: действительно, если $z \in \mathring{B}(\hat{x}, 1)$, то $z = \hat{x} + \zeta$, $\zeta \in \mathring{B}(0, 1)$. Отсюда ясно, что $|f(\zeta)| < 1$; поэтому $f(z) > 0$. Далее, $\text{pr}_H z = \text{pr}_H \hat{x} + \text{pr}_H \zeta = x + \text{pr}_H \zeta \in \mathring{B}_H(x, 1)$. Следовательно, $\mathring{B}(\hat{x}, 1) \subset \mathring{B}^+(x, 1)$. Поэтому $\mathring{B}(\hat{x}, 1) \cap M = \emptyset$ и, как несложно видеть, $B(\hat{x}, 1) \cap H = B_H(x, 1)$. Значит, $y, \hat{y} \in P_M \hat{x}$ — противоречие с чебышёвостью множества M в $\ell^\infty(n)$.

Исходное предположение, что x имеет по крайней мере две ближайшие точки из $M \cap H$, неверно, т. е. $M \cap H$ — чебышёвское множество в H . $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Применяя нужное число раз лемму 3, получаем п. (а).

(b) следует из теоремы В. Действительно, если M — солнце в $\ell^\infty(n)$, то по теореме В оно ℓ^1 -выпукло и замкнуто, а следовательно, для любого координатного подпространства H множество $M \cap H$ ℓ^1 -выпукло. Индуцированная норма на H совпадает с ℓ^∞ -нормой. Снова применяя теорему В, получаем, что M — солнце в H .

Докажем (с). Нам требуется доказать следующее вспомогательное утверждение для $\nu = k, \dots, n - 1$:

Пусть M — строгое солнце в $\ell^\infty(n)$. Тогда если $H \in \text{cAff}_\nu(\mathbb{R}^n)$ таково, что $M \cap H \neq \emptyset$ и $M \cap H$ не является строгим солнцем в H , то $M \not\subset H$ и существует опорный конус $K \subset \mathbb{R}^n$ линейной размерности $\geq \nu$, такой, что $H \subset \text{bd } K$ и $\text{int } K \cap M = \emptyset$. (4 _{ν})

Докажем (4 _{ν}) по индукции. *Базис индукции.* Установим (4 _{$n-1$}). Пусть $H \in \text{cAff}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$. По п. (b) теоремы 1 $M \cap H$ — солнце в H . Предположим, что $M \cap H$ не является строгим солнцем в H . Тогда по лемме А найдутся $x \in H \setminus M$ и точка $y \in M \cap H$, ближайшая к x в H , такие, что $\mathring{K}_H(y, x) \cap M \ni \xi \neq \emptyset$. Без ограничения общности можем считать, что $x = 0$, $\|y\| = 1$ и отождествим H с $\mathbb{R}^{n-1}$. Положим $\mathring{B}_H = \mathring{B} \cap H$. Тогда $\mathring{B}_H \cap M = \emptyset$. Пусть ψ — линейный функционал на $\mathbb{R}^n$, $\text{Ker } \psi = H$, $\psi(0, \dots, 0, 1) = 1$. Положим $\mathring{B}_H^\pm = \{z \in \mathbb{R}^n : \psi(z) \geq 0 \text{ и } \text{pr}_H z \in \mathring{B}_H\}$.

По лемме 1 $\mathring{B}_H^+ \cap M = \emptyset$ или $\mathring{B}_H^- \cap M = \emptyset$. Заменяя, если необходимо, ψ на $-\psi$, считаем, что $\mathring{B}_H^+ \cap M = \emptyset$. Тогда если положить $\hat{x} = (0, \dots, 0, 1)$, то шар $\mathring{B}(\hat{x}, 1)$ лежит в $\mathring{B}_H^+$ и, следовательно, не пересекается с M . Ясно, что $y \in P_M \hat{x}$. Поскольку M — строгое солнце в $\ell^\infty(n)$, то по лемме А $\mathring{K}(y, \hat{x}) \cap M = \emptyset$. Из построения ясно, что $\text{rg}_H \mathring{K}(y, \hat{x}) = \mathring{K}_H(y, 0)$. Поэтому

$$\{z \in \mathbb{R}^n : \psi(z) > 0 \text{ и } \text{rg}_H z \in \mathring{K}_H(y, 0)\} \cap M = \emptyset. \quad (5)$$

Вспомним, что $\xi \in \mathring{K}_H(y, 0) \cap M$. Положим $\hat{\xi} = \xi + \hat{x}$. Из (5) следует, что $\mathring{B}(\hat{\xi}, 1) \cap M = \emptyset$. Поэтому $\xi \in P_M \hat{\xi}$. Кроме того, поскольку $B_H(\xi, 1)$ — гипергрань шара $B(\hat{\xi}, 1)$ и $\text{rg}_H \hat{\xi} = \xi$, то ξ — точка гладкости шара $B(\hat{\xi}, 1)$. Поэтому $\mathring{K}(\xi, \hat{\xi})$ — открытое полупространство с границей H . Далее, M — строгое солнце в $\ell^\infty(n)$, а значит, $\mathring{K}(\xi, \hat{\xi}) \cap M = \emptyset$. Итак, H — опорная гиперплоскость к M : $\{z : \psi(z) > 0\} \cap M = \emptyset$.

По условию M — строгое солнце в $\ell^\infty(n)$, а по предположению $M \cap H$ не является строгим солнцем в H . Поэтому $M \not\subset H$ и (4_{n-1}) доказано.

Шаг индукции. Предположим теперь, что (4_j) верно для всех $j \geq \nu + 1$. Докажем (4_ν) . Пусть $H \in \text{sAff}_\nu(\mathbb{R}^n)$. Не ограничивая общности, отождествим H с $\mathbb{R}^\nu$ и считаем, что $0 \notin M$. Пусть $y \in M$ — ближайшая точка из M для 0 в H , не являющаяся солнечной для 0 , т. е. $\mathring{K}_H(y, 0) \cap M \ni \xi \neq \emptyset$.

Пусть подпространство $H^1 \in \text{sAff}_{\nu+1}(\mathbb{R}^n)$ таково, что $H \subset H^1$. Отождествим H^1 с $H \oplus \mathbb{R}$. Исходя из этого, элементы из H^1 будем обозначать (u, α) , где $u \in H$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Заметим, что из предположения, что M не является строгим солнцем в H^1 , сразу следует (4_ν) . Действительно, первая часть утверждения (4_ν) следует из $(4_{\nu+1})$, а утверждение, что $M \not\subset H$, доказывается, как и выше: если предположить, что $M \subset H$, то, применяя $n - \nu$ раз лемму 1, получаем, что $\mathring{B} \cap M = \emptyset$, $y \in P_M 0$, $\xi \in \mathring{K}(y, 0)$ — по лемме А имеем противоречие со строгой солнечностью M в $\ell^\infty(n)$. Поэтому ниже всегда считаем, что

$$M \text{ — строгое солнце в } H^1. \quad (6)$$

Отметим, что из (6) сразу следует, что $M \not\subset H$.

Пусть 0_H — нулевой элемент в H . По лемме 1 $(\mathring{B}_H + (0_H, \alpha)) \cap M = \emptyset$ для всех $\alpha > 0$ или всех $\alpha < 0$ (далее считаем выбранным знак $>$ в последнем утверждении). Отсюда, положив $\theta^1 = (0_H, 1) \in H^1$, получаем $\mathring{B}_{H^1}(\theta^1, 1) \cap M = \emptyset$. Следовательно, согласно (6), $\mathring{K}_{H^1}(y, \theta^1) \cap M = \emptyset$. Как и при доказательстве утверждения (4_{n-1}) , имеем $\xi \in \text{bd}_{H^1} \mathring{K}_{H^1}(y, \theta^1)$, откуда следует, что $\mathring{B}_{H^1}(\theta^1 + \xi, 1) \cap M = \emptyset$ и ξ — точка гладкости этого шара. Отсюда вытекает, что конус $\mathring{K}^1 = \mathring{K}_H^1(\xi, \theta^1 + \xi)$ является открытым полупространством в H^1 , не пересекающимся с M в силу предположения (6) и леммы А.

Теперь пусть $H^2 \in \text{sAff}_{\nu+2}(\mathbb{R}^n)$ таково, что $H^1 \subset H^2$. Не ограничивая общности, считаем, что $H^2 = H^1 \oplus \mathbb{R}$. Как и выше для H^1 , имеются две возможности: если $M \cap H^2$ — не строгое солнце в H^2 , то, действуя, как и выше, из $(4_{\nu+2})$ получаем (4_ν) ; если же $M \cap H^2$ — строгое солнце в H^2 , то, аналогично предыдущему, получаем точку $\theta^2 = (\theta^1, 1) \in H^2$. Тогда $\mathring{B}_{H^2}(\theta^2 + \xi, 1) \cap M = \emptyset$, y — солнечная точка из M в H^2 для θ^2 и, как и выше, открытый опорный конус $\mathring{K}^2 := \mathring{K}_{H^2}(\xi, \theta^2 + \xi)$ не пересекается с M .

Аналогично продолжаем этот процесс до n , получая подпространства H^j , конусы $\mathring{K}^j$ и точки θ^j , $j \geq 3$. Как и выше, имеем две возможности: если $M \cap H^{j_0}$ — не строгое солнце в H^{j_0} для некоторого $j_0 \geq 3$, то из $(4_{\nu+j_0})$ получаем (4_ν) ; если же $M \cap H^j$ — строгое солнце в H^j для всех j , то, аналогично предыдущему, приходим к тому, что $\mathring{K}^n := \mathring{K}(\xi, \theta^n + \xi)$ не пересекается с M . Поскольку $H \subset \mathring{K}^n$, то линейная размерность конуса $\mathring{K}^n$ равна ν . Теорема 1 доказана. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть M — чебышёвское множество в $\ell^\infty(n)$. Установим (а)–(с).

Ясно, что M замкнуто. Докажем (b). Пусть $k \in \{1, \dots, n\}$ и $P \in \text{сAff}_k(\mathbb{R}^n)$ произвольны. Предположим, что $M \cap P \neq \emptyset$. По теореме 1 $M \cap P$ — чебышёвское множество в P . Поскольку в конечномерных пространствах чебышёвские множества связны ([1, теорема 4.1] и [8, с. 975]), то $M \cap P$ связно.

(с) Пусть $k \in \{2, \dots, n\}$, $P \in \text{сAff}_k(\mathbb{R}^n)$ и $Q \in \text{сAff}_{k-1}(P)$ произвольны. Без ограничения общности считаем, что $0 \in Q$. Пусть $x \in Q \cap M$ и $\mathcal{O}(x)$ — выпуклая окрестность точки x в P , такая, что Q является опорной гиперплоскостью в точке x к множеству $M \cap \mathcal{O}(x)$ в подпространстве P . Тогда $\mathring{B}(x, r) \subset \mathcal{O}(x)$ для некоторого $r > 0$. Пусть φ — линейный функционал на P , $\text{Кег } \varphi = Q$. Положим $Q^- = \{z \in P : \varphi(z) < 0\}$. Не ограничивая общности, можем считать, что $Q^- \cap (M \cap \mathcal{O}(x)) = \emptyset$.

Выберем точку $\xi \in Q^-$ таким образом, что $\text{pr}_Q \xi = x$ и $\|x - \xi\| < r/2$. Тогда $\mathring{B}_P(\xi, \|\xi - x\|) \subset Q^- \cap \mathcal{O}(x)$. Согласно лемме 3, $M \cap P$ — чебышёвское множество в P . Поэтому по лемме А имеем $\mathring{K}_P(x, \xi) \cap M = \emptyset$. Поскольку $\text{pr}_P \xi = x$, то x — точка гладкости шара $B_P(\xi, \|\xi - x\|)$; поэтому $\mathring{K}_P(x, \xi)$ — открытое полупространство, совпадающее с Q^- . Итак, $\mathring{K}_P(x, \xi) \cap M = \emptyset$, и мы доказали, что гиперплоскость Q является опорной к множеству $M \cap P$.

Утверждение, что пересечение $M \cap Q$ состоит только из одной точки, следует из представления конуса $\mathring{K}(x, \xi)$ в виде (2):

$$\mathring{K}_P(x, \xi) = \bigcup_{\alpha > 0} \mathring{B}_P(\alpha \xi + (1 - \alpha)x, \alpha \|x - \xi\|),$$

откуда следует, что x — единственная ближайшая точка из $M \cap P$ для любой точки вида $\alpha \xi + (1 - \alpha)x$, а поскольку $\text{bd } \mathring{K}_P(x, \xi) = Q$, в силу чебышёвности $M \cap P$ окончательно имеем $M \cap Q = \{x\}$. Свойство (с) доказано.

Пусть для $M \subset \mathbb{R}^n$ выполнены условия (а)–(с). Докажем, что M — чебышёвское множество.

Пусть $x \notin M$. Установим, что x имеет в точности одну ближайшую точку из M . Без ограничения общности считаем $x = 0$, $\rho(x, M) = 1$.

По условию (а) M замкнуто; поэтому $P_M 0 \neq \emptyset$ для любого $z \in \mathbb{R}^n$. Пусть $y \in P_M 0$ такова, что величина

$$\max\{\dim E(z) : z \in P_M 0\} = d$$

достигается в точке y . Понятно, что если F — грань шара B и $\dim F > d$, то $\text{ri } F \cap M = \emptyset$.

Установим, что

$$P_M 0 = \{y\}. \quad (7)$$

1. Пусть $d = n - 1$. Положим $P = \mathbb{R}^n$, $Q = \text{aff } E(y)$. Поскольку $\mathring{B} \cap M = \emptyset$, то Q — локально опорная гиперплоскость к множеству M в точке y . По свойству (с) Q — опорная гиперплоскость к множеству M в точке x и $Q \cap M = \{x\}$. Ясно, что тогда $P_M 0 = \{y\}$.

2. Пусть теперь $1 \leq d < n - 1$. Не ограничивая общности, считаем, что $y = (1, 1, \dots, 1, \xi_{n-d+1}, \dots, \xi_n)$, $|\xi_i| < 1$, $i = n - d + 1, \dots, n$. Тогда $\mathring{K}(y, 0) = \{z : z_1 < 1, \dots, z_{n-d} < 1\}$, и по лемме 2 $\text{bd } \mathring{K}(y, 0) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(y)} \text{cone}(\text{ri } F, y)$.

Покажем, что

$$\text{aff } E(y) \cap M = \{y\}. \quad (8)$$

Действительно, пусть $\Phi \in \mathcal{F}(y)$, $\dim \Phi = d + 1$ (ясно, что такая грань Φ существует). Применим условие (с) к паре $P = \text{aff } \Phi$, $Q = \text{aff } E(y)$ в точке y . По определению d имеем $\text{ri } \Phi \cap M = \emptyset$. Далее, $y \in \text{ri } E(y) \subset \text{rb } \Phi$, откуда по условию (с)

$$\text{cone}(\text{ri } \Phi, y) \cap M = \emptyset, \quad \text{aff } E(y) \cap M = \{y\}, \quad (9)$$

что доказывает (8).

Индукцией по размерности j грани $F \in \mathcal{F}(y) \setminus \{E(y)\}$ докажем, что утверждение

$$\text{cone}(\text{ri } F, y) \cap M = \emptyset, \quad \text{cone}(F, y) \cap M = \{y\} \quad (10_j)$$

выполнено для любого $j = d + 1, \dots, n - 1$. Утверждение (10_{d+1}) установлено в (9). Предположим, что (10_j) доказано для всех $j = d + 2, \dots, \nu - 1$. Требуется установить (10_ν) . Пусть $F \in \mathcal{F}(y)$, $\dim F = \nu$.

Не ограничивая общности, считаем, что

$$F = \{(1, \dots, 1, \eta_{n-\nu+1}, \dots, \eta_n)\}, \quad |\eta_\mu| \leq 1, \quad \mu = n - \nu + 1, \dots, n$$

(имеет место произвол в выборе $n - \nu$ единиц среди первых d координат точек из F). Пусть теперь $G_1, \dots, G_N$ — все $(\nu - 1)$ -мерные грани из $\mathcal{F}(y)$. Ясно, что $G_\mu \subset \text{rb } F$ и $E(y) \subset G_\mu \cap F$, $\mu = 1, \dots, N$. Из определения F и $G_1, \dots, G_N$ вытекает, что

$$\text{rb } \text{cone}(\text{ri } F, y) = \bigcup_{\mu=1, \dots, N} \text{cone}(G_\mu, y) \quad (11)$$

и, следовательно, согласно (11) и $(10_{\nu-1})$,

$$\text{rb } \text{cone}(\text{ri } F, y) \cap M = \{y\}. \quad (12)$$

Так как $\nu \geq d + 1$, то $\text{ri } F \cap M = \emptyset$. В силу равенства (12), используя связность пересечения $M \cap \text{aff } F$ (условие (b)) и тот факт, что $\text{ri } F \cap M = \emptyset$, получаем, что

$$\text{cone}(\text{ri } F, y) \cap M = \emptyset. \quad (13)$$

Теперь из (12) и (13) получаем (10_ν) .

Итак, (10_j) выполнено для любого $j = d + 1, \dots, n - 1$.

Далее, из (3), (8) и $(10_{d+1}), \dots, (10_{n-1})$ следует, что

$$\text{bd } \mathring{K}(y, 0) \cap M = \{y\}. \quad (14)$$

Применяя условие (b) к $P = \mathbb{R}^n$ и пользуясь тем, что $\mathring{B} \cap M = \emptyset$, из (14) окончательно получаем, что

$$\mathring{K}(y, 0) \cap M = \emptyset \quad \text{и} \quad \text{bd } \mathring{K}(y, 0) \cap M = \{y\}.$$

Это показывает, что $P_M 0 = \{y\}$.

3. Нам осталось рассмотреть случай $d = 0$. Если $y \in P_M 0$ и $E(y) = \{y\}$, то по определению d имеем $F \cap M = \{y\}$ для любого $F \in \mathcal{F}(y) \setminus \{E(y)\}$. Поэтому, согласно (3), $\text{bd } \overset{\circ}{K}(y, 0) \cap M = \{y\}$. Далее, пользуясь связностью M в $\mathbb{R}^n$ и тем, что $\overset{\circ}{B} \cap M = \emptyset$, получаем, что $P_M 0 = \{y\}$.

Итак, из пп. 1–3 следует (7), т.е. $P_M 0 = \{y\}$, и мы установили, что M — чебышёвское множество, доказав этим теорему 2. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов Л. П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах. УМН, **28**, вып. 6, 3–66 (1973).
2. Кошечев В. А. Связность и аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах. Матем. заметки, **17**, №2, 193–204 (1975).
3. Кошечев В. А. Связность и солнечные свойства множеств в линейных нормированных пространствах. Матем. заметки, **19**, №2, 267–278 (1976).
4. Brown A. L. Suns in normed linear spaces which are finite dimensional. Math. Ann., **279**, 81–101 (1987).
5. Гаркави А. Л. Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах. В кн.: Итоги науки и техники, 1967, Математический анализ, ВИНТИ, Москва, 1969, с. 83–150.
6. Тихомиров В. М. Теория приближений. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 14, 1986, с. 105–260.
7. Berens H., Hetzelt L. Die Metrische Struktur der Sonnen in $\ell^\infty(n)$. Aequat. Math., **27**, 274–287 (1984).
8. Карлов М. И., Царьков И. Г. Выпуклость и связность чебышёвских множеств и солнц. Фундам. прикл. матем., **3**, №4, 967–978 (1997).
9. Алимов А. Р. Геометрическая характеристика строгих солнц в $\ell^\infty(n)$. Матем. заметки, **70**, №1, 3–11 (2001).
10. Алимов А. Р. О структуре дополнения к чебышёвским множествам. Функци. анализ и его прил., **35**, вып. 3, 19–27 (2001).
11. Балаганский В. С., Власов Л. П. Проблема выпуклости чебышёвских множеств. УМН, **51**, вып. 6, 125–188 (1996).
12. Ошман Е. В. Чебышёвские множества и непрерывность метрической проекции. Изв. ВУЗов, Математика, **9**, 78–82 (1970).
13. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Мир, М., 1973.
14. Dunham Ch. B. Characterizability and uniqueness in real Chebyshev approximation. J. Approx. Theory, **2**, 374–383 (1969).
15. Braess D. Geometrical characterizations for nonlinear uniform approximation. J. Approx. Theory, **11**, 260–274 (1974).
16. Тихомиров В. М. А. Б. Ходулёв (1953–1999). Матем. просвещение, сер. 3, **4**, 5–7, МЦНМО, 2000.
17. Гальперин Г. А. Мой друг Андрей Ходулёв. Матем. просвещение, сер. 3, **4**, 8–32, МЦНМО, 2000.

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
e-mail: alimov@shade.msu.ru

Поступило в редакцию
27 февраля 2003 г.