Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Дектярев, Аналогии существенно особых точек для последовательностей полиномиальных отображений, *Функц. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 4, 26–31

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa270>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:51:23

Аналоги существенно особых точек для последовательностей полиномиальных отображений*

© 2001. И. М. ДЕКТЯРЕВ

Рассмотрим последовательность отображений $F_k: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$, задаваемых формулами $F_k(z_1, z_2) = (1: z_1^k: z_2^k)$, где $(w_0: w_1: w_2)$ — однородные координаты в пространстве $\mathbb{CP}^2$. Очевидно, что для любого положительного ε и любой точки $w^{(0)}$ пространства $\mathbb{CP}^2$ (включая расположенные на «бесконечно удаленной» прямой $\{w_0 = 0\}$) в шаре радиуса $\sqrt{2} + \varepsilon$ пространства $\mathbb{C}^2$ найдется такая последовательность точек $z^{(1)}, \dots, z^{(k)}, \dots$, что последовательность $F_1(z^{(1)}), \dots, F_k(z^{(k)}), \dots$ при $k \rightarrow \infty$ сходится к $w^{(0)}$. С другой стороны, если все точки $z^{(1)}, \dots, z^{(k)}, \dots$ принадлежат шару радиуса $\sqrt{2} - 2\varepsilon$, то хотя бы одна координата любой из этих точек не превосходит $1 - \varepsilon$, и поэтому предельными для последовательности $\{F_k(z^{(k)})\}$ могут быть только те точки $w^{(0)}$, у которых хотя бы одна из координат равна нулю. Более того, для любой точки $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)})$, удовлетворяющей условиям $|z_1^{(0)}| = |z_2^{(0)}| = 1$ (и только для таких точек), последовательность $\{z^{(k)}\}$ можно выбрать так, чтобы она сходилась к $z^{(0)}$.

В настоящей статье мы покажем, что эти наблюдения отражают некоторые общие закономерности поведения последовательностей полиномиальных отображений.

Пусть $F: X \rightarrow Y$ — голоморфное отображение n -мерных комплексных многообразий, и пусть на многообразии Y задана форма объема ω . Будем предполагать, что интеграл $\int_X F^* \omega$, определяющий индуцированный объем многообразия X , конечен. Обозначим его через $\text{vol}(X, F)$. Для области $U \subset X$ определим относительный объем $\text{relvol}(U, F)$ как отношение $\text{vol}(U, F)/\text{vol}(X, F)$.

Если отображение $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \subset \mathbb{CP}^n$ задается формулой $F(z_1, \dots, z_n) = (1: f_1: \dots: f_n)$, где $f_1, \dots, f_n$ — полиномы, у которых однородные компоненты старших степеней не имеют общих нулей, за исключением тривиального, то будем называть его полиномиальным отображением общего вида. Если F — полиномиальное отображение общего вида, а форма ω — нормированный элемент объема метрики Фубини–Штуди на пространстве $\mathbb{CP}^n$, то величина $\text{vol}(\mathbb{C}^n, F)$ равна топологической степени $\deg(F)$ отображения F , которая в данном случае совпадает с произведением степеней полиномов $f_1, \dots, f_n$.

Целью работы является доказательство следующих теорем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F_1, \dots, F_k, \dots$ — последовательность полиномиальных отображений общего вида. Обозначим через d_k наименьшую из степеней полиномов $f_1^{(k)}, \dots, f_n^{(k)}$, задающих отображение F_k . Если для некоторого шара $B(r, a)$ пространства $\mathbb{C}^n$ радиуса r с центром в точке a последовательность

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 99-01-00115.

произведений $\{d_k \operatorname{relvol}(B(r, a), F_k)\}$ стремится к бесконечности, то для любой точки $w^{(0)} \in \mathbb{CP}^n$ и любого положительного ε найдется такая последовательность точек $z^{(1)}, \dots, z^{(k)}, \dots$, принадлежащих шару $B(r + \varepsilon, a)$, что последовательность $F_1(z^{(1)}), \dots, F_k(z^{(k)}), \dots$ при $k \rightarrow \infty$ стремится к $w^{(0)}$.

Следующая теорема утверждает, что при выполнении определенных условий точка пространства $\mathbb{C}^n$ как бы является существенно особой относительно последовательности отображений.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F_1, \dots, F_k, \dots$ — последовательность таких же отображений, как в теореме 1. Если для некоторой точки a пространства $\mathbb{C}^n$ найдется такая последовательность шаров $\{B(r_k, a)\}$, радиусы которых стремятся к нулю, что последовательность произведений $\{d_k \operatorname{relvol}(B(r_k, a), F_k)\}$ ограничена снизу положительной константой, то для любой точки $w^{(0)} \in \mathbb{CP}^n$ найдется такая последовательность точек $z^{(1)}, \dots, z^{(k)}, \dots$, сходящаяся к точке a , что последовательность $F_1(z^{(1)}), \dots, F_k(z^{(k)}), \dots$ при $k \rightarrow \infty$ стремится к $w^{(0)}$.

Доказательство будет опираться на следующую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть F — полиномиальное отображение общего вида, и пусть d_F — наименьшая из степеней полиномов $f_1, \dots, f_n$, задающих отображение F . Пусть образ некоторого шара $B(R, a)$ пространства $\mathbb{C}^n$ не пересекается с каким-нибудь геодезическим шаром радиуса ρ пространства $\mathbb{CP}^n$. Тогда для каждого r , $0 < r < R$, выполнено следующее соотношение:

$$\operatorname{relvol}(B(r, a), F) d_F \rho^{2n-2} \left(\frac{R^2}{1+R^2} \ln \frac{R^2}{r^2} - \ln \frac{1+R^2}{1+r^2} \right) \leq c,$$

где константа c зависит только от размерности.

Следующая лемма нами использоваться не будет, но она представляет самостоятельный интерес, а по доказательству и по сути тесно примыкает к предыдущей лемме.

ЛЕММА 2. Пусть F — полиномиальное отображение общего вида, и пусть d_F — наименьшая из степеней полиномов $f_1, \dots, f_n$, задающих отображение F . Пусть образ некоторого шара $B(R, a)$ пространства $\mathbb{C}^n$ полностью содержится в каком-нибудь шаре радиуса ρ_1 (здесь радиус измеряется в метрике пространства $\mathbb{C}^n$). Тогда для каждого r , $0 < r < R$, величины r , R , ρ_1 и $\operatorname{relvol}(B(r, a), F)$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\operatorname{relvol}(B(r, a), F) d_F \left(\frac{R^2}{1+R^2} \ln \frac{R^2}{r^2} - \ln \frac{1+R^2}{1+r^2} \right) \leq c \ln(1 + \rho_1^2),$$

где константа c зависит только от размерности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Нормируем метрику Фубини–Штуди на пространстве $\mathbb{CP}^n$ так, чтобы объем всего $\mathbb{CP}^n$ равнялся единице, и обозначим через ω форму, задающую элемент объема в этой метрике. Пусть φ — положительная дважды непрерывно дифференцируемая функция на пространстве $\mathbb{C}^n$, носитель которой содержится в шаре $B(R, a)$. Тогда для величины $\operatorname{relvol}(B(r, a), F)$ получаем соотношение $m \operatorname{relvol}(B(r, a), F) \deg(F) \leq \int_{\mathbb{C}^n} \varphi F^* \omega$, где m — нижняя грань значений функции φ на шаре $B(r, a)$. С другой стороны, в работе [1] доказано существование на $\mathbb{CP}^n$ такого семейства функций $\gamma_w(y)$, что при $y \neq w$ эти

функции являются гладкими и выполнено соотношение $dd^c(\gamma_w(y)\mu) = \omega$. Через μ здесь обозначена $(n-1)$ -я внешняя степень кэлеровой формы, ассоциированной с нормированной метрикой Фубини–Штуди. Если $w^{(0)}$ — центр того геодезического шара, с которым не пересекается $F(B(R, a))$, то, учитывая, что носитель функции φ содержится в шаре $B(R, a)$, имеем

$$\int_{\mathbb{C}^n} \varphi F^* \omega = \int_{B(R, a)} \varphi F^* dd^c(\gamma_{w^{(0)}}(y)\mu) = \int_{B(R, a)} \gamma_{w^{(0)}}(F(z)) dd^c \varphi \wedge F^* \mu.$$

Возьмем в качестве φ функцию $\Theta(\|z-a\|^2)$, где $\Theta(s) = (4\pi)^{-1} \int_s^{R^2} \theta(x) \ln(x/s) dx$, а функция $\theta(x)$ на отрезке $[0, r^2]$ определяется как $\alpha x + \beta$, а на отрезке $[r^2, R^2 - \varepsilon]$ — как $1/(1+x)^2$. При $x \geq R^2$ функция $\theta(x)$ полагается равной нулю, а на отрезке $[R^2 - \varepsilon, R^2]$ она определяется как линейная функция с тем, чтобы оказаться непрерывной в концах этого отрезка. Малой величиной ε мы распорядимся позднее. Коэффициенты α и β определяются из условия непрерывности функции θ в точке r^2 (т.е. $\alpha r^2 + \beta = 1/(1+r^2)^2$) и отсутствия особенностей у функции $\Theta(s)$ при $s = 0$. Последнее условие обеспечивается равенством $\int_0^{R^2} \theta(x) dx = 0$. Действительно, интегрируя по частям выражение для $\Theta(s)$, в этом случае получаем

$$\Theta(s) = -\frac{1}{4\pi} \int_s^{R^2} \left(\frac{1}{x} \int_0^x \theta(t) dt \right) dx = \frac{1}{4\pi} \int_s^{R^2} \left(\frac{1}{x} \int_x^{R^2} \theta(t) dt \right) dx.$$

На интервале $(0, r^2)$ функция $\Theta(s)$ будет равна

$$-\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\alpha}{4} (r^4 - s^2) + \beta (r^2 - s) + \int_{r^2}^{R^2} \left(\frac{1}{x} \int_0^x \theta(t) dt \right) dx \right).$$

Функция $\Theta(s)$, ее первая производная $-(4\pi)^{-1} s^{-1} \int_s^{R^2} \theta(x) dx$ и вторая производная $(4\pi)^{-1} s^{-2} \int_s^{R^2} \theta(x) dx + (4\pi)^{-1} s^{-1} \theta(s)$ непрерывны на $[0, \infty)$ и удовлетворяют уравнению $s\Theta''(s) + \Theta'(s) = (4\pi)^{-1} \theta(s)$. Кроме того, на интервале $(0, R^2)$ сама функция положительна, а ее первая производная отрицательна. Минимальное значение m функции $\Theta(s)$ на отрезке $[0, r^2]$ равно

$$\Theta(r^2) = \frac{1}{4\pi} \int_{r^2}^{R^2} \left(\frac{1}{x} \int_x^{R^2} \theta(t) dt \right) dx$$

и при подходящем выборе ε может быть сделано сколь угодно близким к величине $\frac{1}{4\pi} \left(\frac{R^2}{1+R^2} \ln \frac{R^2}{r^2} - \ln \frac{1+R^2}{1+r^2} \right)$.

Покажем, что если функция $\psi(s)$ удовлетворяет неравенствам $\psi'(s) \geq 0$ и $s\psi''(s) + \psi'(s) \geq 0$, то форма $dd^c\psi(\|z-a\|^2)$ положительна. Действительно, эта форма равна

$$\psi''(\|z-a\|^2) d\|z-a\|^2 \wedge d^c\|z-a\|^2 + \psi'(\|z-a\|^2) dd^c\|z-a\|^2,$$

и, чтобы убедиться в ее положительности в точке $z^{(0)}$, достаточно выбрать систему координат так, чтобы все координаты точки $z^{(0)} - a$, кроме первой, равнялись нулю.

Нужными свойствами обладает функция $(4\pi)^{-1} \ln(1+s) - \Theta(s)$, а это означает, что

$$\begin{aligned} \int_{B(R,a)} \gamma_{w^{(0)}}(F(z)) dd^c \Theta(\|z - a\|^2) \wedge F^* \mu \\ \leq \frac{1}{4\pi} \int_{B(R,a)} \gamma_{w^{(0)}}(F(z)) dd^c \ln(1 + \|z - a\|^2) \wedge F^* \mu. \end{aligned}$$

Из приведенного в [1] явного вида функции $\gamma_w(y)$ следует, что вне геодезического шара радиуса ρ с центром в $w^{(0)}$ ее значения не превосходят величины $c\rho^{-2n+2}$, где константа c зависит только от размерности, и нам достаточно доказать, что

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}^n} dd^c \ln(1 + \|z - a\|^2) \wedge F^* \mu = \frac{\deg(F)}{d_F}.$$

Для этого воспользуемся леммой 4.2 работы [2]. Там рассматривается набор $\{F_k\}$ рациональных отображений пространства $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ в пространства $\mathbb{C}\mathbb{P}^{m_k}$, и для каждого такого отображения через I_k обозначается множество неопределенности, а через I — объединение $\bigcup_{i=1}^n I_k$. Через ω_k обозначена кэлерова форма, ассоциированная с нормированной метрикой Фубини—Штуди на соответствующем пространстве $\mathbb{C}\mathbb{P}^{m_k}$, а через $F_k^{-1}(H)$ для $H \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{m_k}$ обозначено множество $\pi_1(\pi_2^{-1}(H))$, где π_1 и π_2 — соответствующие проекции графика отображения F_k . Лемма утверждает, что интеграл $\int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus I} F_1^* \omega_1 \wedge \dots \wedge F_n^* \omega_n$ равен количеству точек множества $\bigcap_{i=1}^n F_k^{-1}(H_k) \setminus I$ для «общего» набора гиперплоскостей $\{H_k \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^{m_k}\}$.

Мы зададим отображение F_1 формулой $F_1(z) = z - a$, а в качестве отображений $F_2 = \dots = F_n$ возьмем изучаемое нами отображение F . Будем считать эти отображения продолженными до рациональных отображений $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Отображение F_1 голоморфно, а множество неопределенности отображения F является пересечением «бесконечно удаленной» гиперплоскости с множеством общих нулей однородных составляющих степени p полиномов, задающих это отображение. Здесь p — это наибольшая из степеней полиномов из рассматриваемой системы. В частности, если все полиномы имеют степень p , то для полиномиальных отображений общего вида множество I пусто. Подынтегральное выражение в цитируемой лемме совпадает с нужным нам, а область интегрирования отличается на множество меры нуль. Если гиперплоскость H задать соотношением $\alpha_0 w_0 + \dots + \alpha_n w_n = 0$, а отображение F в однородных координатах записать в виде $F(z_0, \dots, z_n) = (z_0^p : \tilde{f}_1 : \dots : \tilde{f}_n)$, то множество $F^{-1}(H)$ совпадает с множеством нетривиальных нулей полинома $\alpha_0 z_0^p + \alpha_1 \tilde{f}_1 + \dots + \alpha_n \tilde{f}_n$.

Предположим сначала, что все полиномы, образующие отображение F , имеют степень p . Поскольку F — полиномиальное отображение общего вида, у полиномов $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ нет нетривиальных общих корней в бесконечно удаленной гиперплоскости $\{z_0 = 0\}$, а множество нулей, расположенных в $\mathbb{C}^n$, будучи аналитическим множеством в компактной части этого пространства, конечно. Значит, по теореме Бертини для «общего» набора гиперплоскостей $\{H_k\}$ система уравнений, определяющих множество $\bigcap_{i=1}^n F_k^{-1}(H_k)$, имеет лишь изолированные решения первого порядка, а по теореме Безу количество точек в множестве решений равно произведению степеней этих уравнений, т. е. p^{n-1} (напомним, что степень уравнения, определяющего множество $F_1^{-1}(H_1)$, равна единице). А это, в свою очередь, равно $\deg(F)/d_F$.

Пусть теперь не все полиномы имеют степень p . Поскольку множество неопределенности содержится в гиперплоскости $\{z_0 = 0\}$, в цитируемой лемме необходимо подсчитать количество корней, для которых $z_0 \neq 0$. Положим для определенности $z_0 = 1$. Здесь опять применима теорема Бертини, и соответствующая система уравнений имеет лишь изолированные решения первого порядка. Будем считать, что полиномы пронумерованы так, что их степени не возрастают. Подвергая уравнения, соответствующие гиперплоскостям H_k для $k = 2, \dots, n$, преобразованиям Жордана–Гаусса, можно добиться, что они примут вид $f_{k-1} + \alpha_k f_n = \beta_k$ и получившаяся система (вместе с первым уравнением) будет по-прежнему иметь лишь изолированные решения первого порядка. Эти решения устойчивы в том смысле, что при малых изменениях коэффициентов они не исчезают, а лишь перемещаются на малое расстояние. Сколь угодно малым изменением коэффициентов без изменения степеней полиномов можно добиться того, что у получившейся системы будут отсутствовать «бесконечно удаленные» решения и, значит, можно будет применить теорему Безу. С учетом выбранной нумерации полиномов получаем нужное утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2 проводится точно так же, но вместо функций $\gamma_w(y)$ из [1] воспользуемся функцией $\psi(y) = (4\pi)^{-1} \ln(1 + \|y\|^2)$. Она также удовлетворяет нужному уравнению $dd^c(\psi(y)\mu) = \omega$, но вместо ее оценки вне геодезического шара радиуса ρ с центром в $w^{(0)}$ следует воспользоваться неравенством для ее значений внутри шара радиуса ρ_1 пространства $\mathbb{C}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Положим $R = r + \varepsilon$ и обозначим через ρ_k точную верхнюю грань радиусов тех геодезических шаров с центром в точке $w^{(0)}$, которые не пересекаются с $F_k(B(R, a))$. Если таких шаров нет, то положим ρ_k равным $1/k$. Таким образом, для каждого k в шаре $B(R, a)$ найдется такая точка $z^{(k)}$, что $F_k(z^{(k)})$ отстоит от точки $w^{(0)}$ не более, чем, например, на $2\rho_k$. С другой стороны, из условий теоремы, согласно лемме 1, следует, что последовательность $\{\rho_k\}$ стремится к нулю и потому последовательность $\{z^{(k)}\}$ является требуемой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Выберем на интервале $(0, 1)$ положительную функцию $R(x)$, полагая ее равной $(\ln(1/x))^{-1/3}$. Тогда при $x \rightarrow 0$ величина $R(x)$ стремится к нулю, в то время как функция $\frac{R(x)^2}{1+R(x)^2} \ln \frac{R(x)^2}{x^2} - \ln \frac{1+R(x)^2}{1+r(x)^2}$ стремится к бесконечности. Для каждого k положим $R_k = R(r_k)$. Далее так же, как и при доказательстве теоремы 1, но используя для каждого k свои R_k и r_k , построим последовательности $\{\rho_k\}$ и $\{z^{(k)}\}$. По построению последовательность $\{R_k\}$ стремится к нулю, а значит, $\{z^{(k)}\}$ стремится к a . Учитывая условия теоремы 2 и применяя лемму 1 к отображениям F_k и числам R_k и r_k , получаем, что $\{\rho_k\}$ стремится к нулю, т. е. $\{F_k(z^{(k)})\}$ сходится к $w^{(0)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. С очевидными изменениями все проведенные выше рассуждения проходят и для одномерного случая. Здесь даже не надо требовать полиномиальности отображений. Достаточно, чтобы они задавались функциями, мероморфными в круге радиуса $r + \varepsilon$. При этом величину $\text{relvol}(B(r, a), F) d_F$ следует заменить на площадь круга в индуцированной метрике. Однако в одномерном случае известны более сильные результаты. Если дополнение к объединению образов круга радиуса $r + \varepsilon$ содержит три различные точки, то семейство отображений будет нормальным. Применяя принадлежащий Ф. Марти критерий нормальности

(см., например, [3, с. 238]), получим противоречие с условиями, наложенными на последовательность отображений. Получается аналог теоремы Пикара, в то время как у нас — лишь аналог теоремы Вейерштрасса.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Естественно возникает вопрос: в какой мере полиномиальность отображений необходима в многомерном случае? Автору представляется, что ответ не должен получаться просто. Одним из препятствий является, например, следующий факт. Пусть $G = (g_1, g_2): \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ — голоморфное отображение, при котором дополнение к образу содержит открытое множество (см. примеры Фату–Бибераха). Тогда последовательность отображений $F_k = (g_1(z_1^k, z_2^k), g_2(z_1^k, z_2^k))$, казалось бы, всем хороша, однако при подходящем выборе отображения G дополнение к объединению образов может содержать бесконечное число областей, каждая из которых биголоморфно эквивалентна пространству $\mathbb{C}^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dektyarev I. M.* Multivariable value distribution theory. Application to holomorphic curves. *J. Math. Sci.*, **92**, No. 2, 3685–3711 (1998).
2. *Russakovskii A., Shiffman B.* Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics, *Indiana Univ. Math. J.*, **46**, No. 3, 897–932 (1997).
3. *Хейман У. К.* Мероморфные функции. Мир, М., 1966.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило в редакцию
29 мая 2000 г.