Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, Признаки вполне неопределенности якобиевых матриц с матричными элементами, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 4, 32–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa271>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 10:32:16

УДК 517.94+517.929

Признаки вполне неопределенности яковиевых матриц с матричными элементами*

© 2001. А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев

1. Пусть $\mathbb{C}^p$ ($p \geq 1$) есть p -мерное пространство векторов-столбцов со стандартным скалярным произведением $y^*x = \sum_{j=1}^p x_j \bar{y}_j$, где комплексные числа x_j, y_j ($j = 1, \dots, p$) — координаты векторов x и y соответственно, а звездочка означает комплексно-сопряженную матрицу. Обозначим через l_p^2 гильбертово пространство бесконечных последовательностей векторов $u = (u_0, u_1, \dots)$, $u_j \in \mathbb{C}^p$, со скалярным произведением $(u, v) = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j^* u_j$. Пусть, далее, A_j, B_j ($j = 0, 1, \dots$) — квадратные матрицы порядка p , элементы которых являются комплексными числами, причем A_j — самосопряженная матрица и B_j^{-1} ($j = 0, 1, \dots$) существует. Бесконечную матрицу

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 & O & O & \dots \\ B_0^* & A_1 & B_1 & O & \dots \\ O & B_1^* & A_2 & B_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где O — нулевая матрица порядка p , назовем яковиевой матрицей с матричными элементами. Матрица $\mathbb{J}$ посредством операции

$$(lu)_j = B_j u_{j+1} + A_j u_j + B_{j-1}^* u_{j-1}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

где $u_{-1} = 0, u_0, u_1, \dots \in \mathbb{C}^p$, определяет на многообразии всех финитных векторов (т.е. векторов с конечным числом ненулевых векторов-координат) пространства l_p^2 незамкнутый симметрический оператор, замыкание которого мы обозначим через L . Известно, что L — минимальный замкнутый симметрический оператор, порожденный выражением l и граничным условием $u_{-1} = 0$ в пространстве l_p^2 — вообще говоря, не самосопряжен и дефектные числа n_+ и n_- этого оператора удовлетворяют неравенствам $0 \leq n_+, n_- \leq p$, причем $n_+ = p$ в том и только том случае, когда $n_- = p$ (см. [1–3]).

Согласно М. Г. Крейну [1, 2], матричная проблема моментов, порождаемая матрицей $\mathbb{J}$, называется вполне неопределенной, если $n_+ = n_- = p$. Несколько упрощая терминологию, мы будем говорить, что для матрицы $\mathbb{J}$ (для выражения l , для оператора L) имеет место вполне неопределенный случай.

Обозначим через $P_j(\lambda)$ ($j = 0, 1, \dots, \lambda \in \mathbb{C}$) решение матричного уравнения

$$B_j U_{j+1} + B_{j-1}^* U_{j-1} = (\lambda I - A_j) U_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №99-01-01079 и №00-15-96100).

удовлетворяющее начальным условиям $P_0(\lambda) := I$ и $P_1(\lambda) := B_0^{-1}(\lambda I - A_0)$, где I — единичная матрица размера $p \times p$. Известно (см. [3–7]), что для матрицы $\mathbb{J}$ тогда и только тогда имеет место вполне неопределенный случай, когда существует такое $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \lambda \neq 0$, что

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \|P_j(\lambda)\|^2 < +\infty. \quad (2)$$

В данной работе получены новые признаки вполне неопределенности для оператора L в терминах элементов матрицы $\mathbb{J}$.

Отметим, что задача об определении дефектных чисел оператора L и, в частности, признаки вполне неопределенности якобиевых матриц $\mathbb{J}$ обсуждались также в работах [3–7].

2. Матрицы $P_k(\lambda)$ представим в виде

$$P_k(\lambda) = C_k \mathcal{X}_k(\lambda), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где последовательность матриц C_k подобрана так, чтобы выполнялись условия

$$B_k C_{k+1} = -B_{k-1}^* C_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

и $C_0 := B_0^{-1}$, $C_1 := I$. Очевидно, что из этих условий матрицы C_k определяются однозначно:

$$C_k = \begin{cases} (-1)^j B_{2j-1}^{-1} B_{2j-2}^* \cdots B_2^* B_1^{-1}, & \text{если } k = 2j, \\ (-1)^j B_{2j}^{-1} B_{2j-1}^* \cdots B_2^{-1} B_1^*, & \text{если } k = 2j+1, j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5)$$

Подставим теперь в (1) выражение (3) для $P_k(\lambda)$ и умножим обе части полученного уравнения на $(B_j C_{j+1})^{-1}$ слева. Применяя затем соотношение (4), находим, что последовательность матриц $\mathcal{X}_j$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\mathcal{X}_{j+1}(\lambda) - \mathcal{X}_{j-1}(\lambda) = R_j(\lambda) \mathcal{X}_j(\lambda), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где

$$R_j(\lambda) := (B_j C_{j+1})^{-1} (\lambda I - A_j) C_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Теперь покажем, что

$$(B_k C_{k+1})^{-1} = (-1)^k C_k^*, \quad k = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Пусть $k = 2j$. Применяя равенство (5), получаем

$$\begin{aligned} (B_k C_{k+1})^{-1} &= ((-1)^j B_{2j} B_{2j-1}^{-1} B_{2j-2}^* \cdots B_2^{-1} B_1^*)^{-1} = (-1)^j B_1^{*-1} B_2 \cdots B_{2j-2} B_{2j-1}^{*-1} \\ &= ((-1)^j B_{2j-1}^{-1} B_{2j-2}^* \cdots B_2^* B_1^{-1})^* = C_k^*. \end{aligned}$$

Случай $k = 2j+1$ рассматривается аналогично.

В силу равенства (7)

$$R_j(\lambda) = (-1)^j C_j^* (\lambda I - A_j) C_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Теперь заметим, что в силу начальных условий для $P_j(\lambda)$ и C_j ($j = 0, 1$) элементы $\mathcal{X}_0(\lambda)$ и $\mathcal{X}_1(\lambda)$ определяются равенствами

$$\mathcal{X}_0(\lambda) = B_0^*, \quad \mathcal{X}_1(\lambda) = B_0^{-1}(\lambda I - A_0).$$

Кроме того, при любом $i = 0, 1, \dots$ справедливы тождества

$$\mathcal{X}_{i+2j}(\lambda) = \mathcal{X}_i(\lambda) + \sum_{k=1}^j R_{i+2k-1}(\lambda) \mathcal{X}_{i+2k-1}(\lambda), \quad j = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Они очевидным образом следуют из соотношения (6).

3. Начальными данными и рекуррентными соотношениями (1) последовательность $P_k(\lambda)$, конечно, определяется однозначно. Однако формулы (3) и (9) удобны тем, что они в некоторых случаях позволяют, применив принцип сжимающих отображений, установить характер поведения последовательности $P_k(\lambda)$ при $k \rightarrow +\infty$. В частности, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть элементы матрицы $\mathbb{J}$ таковы, что

$$(a) \sum_{k=1}^{+\infty} \|C_k\|^2 < +\infty,$$

$$(b) \sum_{k=1}^{+\infty} \|C_k^* A_k C_k\| < +\infty,$$

где последовательность C_k определяется равенством (5). Тогда для этой матрицы имеет место вполне неопределенный случай.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M — пространство ограниченных последовательностей матриц $\mathbb{U} = (U_0, U_1, \dots)$ размера $p \times p$ с нормой $\|\mathbb{U}\|_1 = \sup \|U_j\|$, а l — натуральное число. Определим отображение $\mathcal{F}_l: \mathbb{U} \rightarrow \mathcal{F}_l \mathbb{U}$ и последовательность матриц $\mathbb{U}^{(0)} = (U_0^{(0)}, U_1^{(0)}, \dots)$, полагая соответственно

$$(\mathcal{F}_l \mathbb{U})_j = O, \quad U_j^{(0)} = \mathcal{X}_j(\lambda), \quad j = 0, 1, \dots, l+1,$$

$$(\mathcal{F}_l \mathbb{U})_{i+2j} = \sum_{k=1}^j R_{i+2k-1}(\lambda) U_{i+2k-1}, \quad U_{i+2j}^{(0)} = \mathcal{X}_i(\lambda), \quad i = l, l+1, j = 1, 2, \dots$$

Таким образом, $\mathbb{U}^{(0)} \in M$. Кроме того, из определения оператора $\mathcal{F}_l$ и тождеств (9) вытекает, что последовательность $(\mathcal{X}_0(\lambda), \mathcal{X}_1(\lambda), \dots)$ является неподвижной точкой отображения $\mathbb{U} \rightarrow \mathcal{F}_l \mathbb{U} + \mathbb{U}^{(0)}$. С другой стороны, число l можно выбрать таким, чтобы отображение $\mathcal{F}_l$ было сжимающим. Действительно, если $|\lambda| \leq 1$, то

$$\|(\mathcal{F}_l \mathbb{U})_{i+2j} - (\mathcal{F}_l \mathbb{V})_{i+2j}\| \leq \|\mathbb{U} - \mathbb{V}\|_1 \sum_{k=1}^j (\|C_{i+2k-1}\|^2 + \|C_{i+2k-1}^* A_{i+2k-1} C_{i+2k-1}\|),$$

$$i = l, l+1, j = 1, 2, \dots$$

Эти неравенства следуют из свойств матричной нормы, определения отображения $\mathcal{F}_l$ и равенств (8). Зафиксируем теперь число $0 < \rho < 1$. Из приведенных неравенств и условий теоремы, очевидно, следует, что число l можно взять столь большим, чтобы при всех $\lambda \in \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$ выполнялось неравенство

$$\|\mathcal{F}_l \mathbb{U} - \mathcal{F}_l \mathbb{V}\|_1 \leq \rho \|\mathbb{U} - \mathbb{V}\|_1,$$

что и требовалось. Итак, в силу принципа сжимающих отображений элемент $(\mathcal{X}_0(\lambda), \mathcal{X}_1(\lambda), \dots)$ принадлежит пространству M . Далее, из этого факта, равенств (3) и условия (а) теоремы 1 видно, что выполняется условие (2). Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Известно, что если $A_j = O$ ($j = 0, 1, \dots$), то условие (а) является необходимым и достаточным условием для вполне неопределенности матрицы $\mathbb{J}$ (см. [7]). Поэтому теорему 1 можно трактовать как теорему о допустимых возмущениях в общей ситуации.

Бесконечные системы линейных уравнений, допускающие метод исследования, примененный при доказательстве теоремы 1, разумеется, хорошо изучены (см., например, [8, гл. V, §5, п. 5.4]); их называют вполне регулярными системами. В настоящей работе этот подход использован и ниже, при доказательстве теоремы 2. Но сначала остановимся на одном следствии теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть элементы матрицы $\mathbb{J}$ таковы, что

$$1) \|B_{k-1}\| \cdot \|B_{k+1}\| \leq \|B_k^{-1}\|^{-2}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$2) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\|B_k\|} < +\infty,$$

$$3) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\|A_k\|}{\|B_k\|} < +\infty.$$

Тогда для этой матрицы имеет место вполне неопределенный случай.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что

$$\|C_{2j}\|^2 \leq \frac{1}{\|B_{2j}\| \cdot \|B_0\|}, \quad \|C_{2j+1}\|^2 \leq \frac{\|B_1\|}{\|B_{2j+1}\|}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Действительно, из формулы (5) и условия 1) следует, что, например

$$\begin{aligned} \|C_{2j}\|^2 &\leq (\|B_{2j-1}^{-1}\| \cdots \|B_{2j-3}^{-1}\| \cdots \|B_1^{-1}\|)^2 (\|B_{2j-2}\| \cdot \|B_{2j-4}\| \cdots \|B_2\|)^2 \\ &\leq \frac{1}{\|B_{2j}\| \cdot \|B_0\|}. \end{aligned}$$

Применяя теперь неравенства (10), получаем, что выполняется условие (а) теоремы 1, так как

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \|C_k\|^2 \leq \frac{1}{\|B_0\|} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\|B_{2j}\|} + \|B_1\| \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\|B_{2j+1}\|} < +\infty$$

в силу условия 2), и выполняется условие (b) теоремы 1, так как

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \|C_k^* A_k C_k\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \|C_k\|^2 \|A_k\| \leq \frac{1}{\|B_0\|} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\|A_{2j}\|}{\|B_{2j}\|} + \|B_1\| \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\|A_{2j+1}\|}{\|B_{2j+1}\|} < +\infty$$

в силу условия 3). Следовательно, если элементы матрицы $\mathbb{J}$ удовлетворяют условиям 1)–3), то справедливо утверждение теоремы 1. Следствие 1 доказано.

Следствие 1 является обобщением одной теоремы Ю. М. Березанского о неопределенности якобиевых матриц с числовыми элементами (см. [4, гл. VIII, §1, п. 2, теорема 1.5]).

4. Теперь докажем, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть элементы матрицы $\mathbb{J}$ таковы, что

$$(A) \sum_{k=1}^{+\infty} k \|C_k\|^2 < +\infty,$$

$$(B) \lim_{k \rightarrow \infty} k \|C_{2k+i}^* A_{2k+i} C_{2k+i}\| < \frac{1}{2} \quad (i = 0, 1).$$

Тогда для этой матрицы имеет место вполне неопределенный случай.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 1, тождества (9) запишем в виде $U_k = \mathcal{X}_k(\lambda)$ ($k = 0, 1, \dots, l+1$) и

$$U_{i+2j} = \mathcal{X}_i + \sum_{k=1}^j R_{i+2k-1}(\lambda) U_{i+2k-1}, \quad i = l, l+1, j = 1, 2, \dots,$$

где l — некоторое натуральное число. Полагая здесь $U_0 = \tilde{U}_0$ и $U_j = \sqrt{j} \tilde{U}_j$ ($j = 1, 2, \dots$), получаем, что $\tilde{U}_0 = \mathcal{X}_0(\lambda)$, $\tilde{U}_k = \mathcal{X}_k(\lambda)/\sqrt{k}$ ($k = 1, 2, \dots, l+1$) и

$$\tilde{U}_{i+2j} = \frac{\mathcal{X}_i}{\sqrt{i+2j}} + \frac{1}{\sqrt{i+2j}} \sum_{k=1}^j \sqrt{i+2k-1} R_{i+2k-1}(\lambda) \tilde{U}_{i+2k-1}, \quad (11)$$

$$i = l, l+1, j = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что элемент $\mathbb{U}^{(0)}$, координаты которого определяются равенствами

$$U_0^{(0)} = \mathcal{X}_0(\lambda), \quad U_k^{(0)} = \frac{\mathcal{X}_k(\lambda)}{\sqrt{k}}, \quad k = 1, 2, \dots, l+1,$$

$$U_{i+2j}^{(0)} = \frac{\mathcal{X}_i(\lambda)}{\sqrt{i+2j}}, \quad i = l, l+1, j = 1, 2, \dots,$$

принадлежит пространству M при каждом l . Покажем, что число l можно выбрать таким, чтобы система (11) оказалась вполне регулярной. Для этого достаточно, чтобы имело место неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{i+2j}} \sum_{k=1}^j \sqrt{i+2k-1} \|R_{i+2k-1}(\lambda)\| \leq \rho, \quad i = l, l+1, j = 1, 2, \dots,$$

при некотором $\rho < 1$.

Левая часть последнего неравенства в силу равенства (8) не превосходит величины

$$\frac{|\lambda|}{\sqrt{i+2j}} \sum_{k=1}^j \sqrt{i+2k-1} \|C_{i-2k-1}\|^2 + \frac{1}{\sqrt{i+2j}} \sum_{k=1}^j \sqrt{i+2k-1} \|C_{i+2k-1}^* A_{i+2k-1} C_{i+2k-1}\|.$$

Предел при $j \rightarrow +\infty$ первого слагаемого в этой сумме равен нулю в силу условия (A), а предел второго слагаемого меньше единицы в силу условия (B) теоремы 2. Итак, система (11) является вполне регулярной. Поэтому существует постоянная c , такая, что $\|\tilde{U}_j\| \leq c$ ($j = 0, 1, \dots$). С другой стороны, $U_j = \sqrt{j} \tilde{U}_j$ и

$U_j = \mathcal{X}_j(\lambda)$. Таким образом, $\|\mathcal{X}_j(\lambda)\| \leq \sqrt{j} c$ ($j = 1, 2, \dots$). Учитывая полученное неравенство, из (3) получаем, что

$$\|P_j(\lambda)\| \leq \sqrt{j} \|C_j\| \cdot c \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Из этого неравенства и условия (А) теоремы следует, что при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняется условие (2). Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Все результаты данной работы без существенных изменений переносятся на случай, когда пространство $\mathbb{C}^p$ заменяется на сепарабельное гильбертово пространство H , а матрицы A_j , B_j ($j = 1, 2, \dots$) — на линейные ограниченные операторы в нем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. Бесконечные J -матрицы и матричная проблема моментов. ДАН СССР, **69**, № 3, 125–128 (1949).
2. Крейн М. Г. Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) . Укр. матем. ж., **2**, 3–66 (1949).
3. Коган В. И. Об операторах, порожденных l_p -матрицами в случае максимальных индексов дефекта. Теория функций, функц. анализ и их прим. (Харьков), **11**, 103–107 (1970).
4. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Наукова думка, Киев, 1965.
5. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. Физматлит, М., 1961.
6. Костюченко А. Г., Мирзоев К. А. Трехчленные рекуррентные соотношения с матричными коэффициентами. Вполне неопределенный случай. Матем. заметки, **63**, № 5, 709–716 (1998).
7. Костюченко А. Г., Мирзоев К. А. Обобщенные якобиевы матрицы и индексы дефекта обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами. Функц. анализ и его прил., **33**, вып. 1, 30–45 (1999).
8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. Наука, М., 1977.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет

Поступило в редакцию
18 августа 2001 г.