Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Седых, Некоторые инварианты допустимых гомотопий пространственных кривых, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 4, 54–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 15:03:37

УДК 514.14+515.16

Некоторые инварианты допустимых гомотопий пространственных кривых*

© 2001. В. Д. СЕДЫХ

§1. Введение

Для каждой точки C^∞ -гладкой кривой в трехмерном вещественном проективном пространстве P^3 существует плоскость, пересекающая кривую в этой точке по меньшей мере три раза. Такая плоскость называется *соприкасающейся плоскостью* к кривой в данной точке. Точка кривой является ее *точкой уплощения*, если кратность пересечения кривой с соприкасающейся плоскостью в этой точке больше трех. Точка уплощения кривой, в которой соприкасающаяся плоскость не единственна, называется *точкой перегиба*.

Предположим, что для любых двух точек (взятых с учетом кратностей) гладкой замкнутой кривой в P^3 существует плоскость, которая проходит через эти точки и нигде более не пересекает кривую. Тогда эта кривая имеет не менее четырех геометрически различных точек уплощения [3].

Заметим, что кривая, удовлетворяющая указанному условию, не имеет точек перегиба, вложена и аффинна. Более того, такая кривая лежит на границе своей аффинной выпуклой оболочки. Оказывается (см. [6]), что любая гладкая замкнутая кривая, вложенная в аффинное трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$ без точек перегиба и лежащая на границе своей выпуклой оболочки, имеет не менее четырех геометрически различных точек уплощения.

Было бы интересно распространить теорему о четырех точках уплощения на более широкий класс пространственных кривых. Один из подходов к решению этой задачи предложен В. И. Арнольдом в [1]. Этот подход основан на методах контактной геометрии.

Рассмотрим замкнутый фронт общего положения в P^3 . Это особая поверхность с ребрами возврата, ласточкиными хвостами и трансверсальными самопересечениями. Объединение ребер возврата и вершин ласточкиных хвостов называется *линией возврата* фронта. Эта кривая не имеет самопересечений, но имеет точки возврата в вершинах ласточкиных хвостов.

Замыкание множества точек самопересечения фронта является объединением кривых, которые могут иметь лишь точки возврата, общие двойные или тройные самопересечения и концевые точки в вершинах ласточкиных хвостов. Эти кривые называются *двойными линиями* фронта. Вершины ласточкиных хвостов образуют *связанную пару*, если они являются концевыми точками некоторой двойной линии фронта.

Рассмотрим гладкую замкнутую кривую общего положения в P^3 . Множество касательных плоскостей к кривой представляет собой замкнутый фронт общего

*Работа частично поддержана грантами РФФИ 99-01-01109, EPSRC GR K99015 и NWO-RFBR 047-008-005.

положения в двойственном пространстве. Линия возврата этого фронта является *двойственной кривой* (множеством соприкасающихся плоскостей к исходной кривой). Точки уплощения кривой взаимно однозначно соответствуют вершинам ласточкиных хвостов фронта (т.е. точкам возврата двойственной кривой).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Две точки уплощения гладкой замкнутой кривой общего положения в P^3 образуют *связанную пару*, если соответствующие вершины ласточкиных хвостов фронта касательных плоскостей к этой кривой образуют связанную пару.

Ориентируем данную кривую и объемлющее пространство. Росток кривой в точке уплощения определяется формулами

$$x = t, \quad y = t^2 + \dots, \quad z = t^4 + \dots$$

в подходящей системе аффинных координат. Точка уплощения называется *положительной* (*отрицательной*), если эта система координат ориентирует объемлющее пространство положительно (отрицательно).

Число связанных пар точек уплощения, имеющих один и тот же знак, не зависит от выбора ориентаций. Это число называется *штурмовостью* кривой. Согласно [1], штурмовость является инвариантом так называемых допустимых гомотопий кривой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Регулярная гомотопия гладкой замкнутой кривой общего положения в P^3 называется *допустимой*, если она определяет общее однопараметрическое семейство кривых, в котором каждая кривая не имеет

- 1) самопересечений (т.е. ее фронт не имеет самокасаний);
- 2) точек перегиба (т.е. двойственная кривая неприводима);
- 3) касаний с гладкой частью развертки своих касательных (т.е. ребра возврата фронта не касаются его гладкой части);
- 4) касательных плоскостей, соприкасающихся с кривой в двух различных точках (т.е. двойственная кривая не имеет самопересечений).

Рис. 1

В процессе допустимых гомотопий число точек уплощения кривой не может стать меньше удвоенной штурмовости. Но штурмовость может быть равна нулю. Рассмотрим, например, кривую

$$\Gamma: x = \cos t, y = \sin t, z = \cos 3t, \quad t \bmod 2\pi.$$

Множество особых точек ее фронта (линия возврата и самопересечения) изображено на рис. 1 (детали см. в §6). Кривые общего положения, достаточно близкие к Γ (в C^∞ -топологии), имеют 6 точек уплощения. Некоторые из них имеют нулевую штурмовость. В. И. Арнольд поставил следующий вопрос (см. [2, задача 1998-6]): можно ли уничтожить допустимыми гомотопиями все 6 точек уплощения таких кривых?

Мы даем ниже отрицательный ответ на этот вопрос, а именно, мы показываем, что число точек уплощения любой кривой общего положения, достаточно близкой к Γ , не может обратиться в нуль в процессе допустимых гомотопий. Для доказательства мы определяем новый инвариант допустимых гомотопий пространственных кривых — число замкнутых двойных линий фронта. Кроме того, мы строим инвариант, обобщающий штурмовость кривой. Это хордовая диаграмма, в которой число хорд, пересекающих нечетное число других хорд, равно штурмовости кривой.

§2. Замкнутые двойные линии фронта

Пусть $\gamma: S^1 \rightarrow P^3$ — гладкая замкнутая кривая общего положения в P^3 и l — двойная линия ее фронта. Ориентируем двойственное пространство P^{3*} , двойственную кривую γ^* и линию l . Точка возврата c на l является *положительной* (*отрицательной*), если следующий набор трех векторов в $T_c P^{3*}$ положительно (*отрицательно*) ориентирован:

- 1) касательный вектор к γ^* ;
- 2) направляющий вектор односторонней полукасательной к l в c ;
- 3) вектор в касательной плоскости к гладкой части фронта γ в c , указывающий направление отклонения ветви l , выходящей из c , от прямой, касающейся l в c .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Абсолютная величина разности между числом положительных и числом отрицательных точек возврата на линии l называется *весом* этой линии.

Вес линии l не зависит от выбора ориентаций.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если линия l не является замкнутой и ее концы соответствуют точкам уплощения кривой γ противоположных знаков, то вес линии l может быть определен со знаком. Действительно, ориентации пространства P^{3*} и кривой γ^* индуцируют ориентации пространства P^3 и кривой γ и определяют естественную ориентацию линии l : из конца, отвечающего отрицательной точке уплощения кривой γ , в конец, отвечающий положительной точке уплощения. Если зафиксировать такую ориентацию линии l , то разность между числом положительных и числом отрицательных точек возврата на l не будет зависеть от выбора ориентаций пространства P^{3*} и кривой γ^* .

ТЕОРЕМА 2.3. *Набор (неупорядоченный) весов замкнутых двойных линий фронта гладкой замкнутой кривой общего положения в P^3 является инвариантом допустимых гомотопий. В частности, число этих линий не меняется при таких гомотопиях.*

Доказательство приведено в §4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Две гладкие замкнутые кривые, вложенные в P^3 , называются *изотопными*, если они гомотопны в пространстве вложенных кривых.

Допустимые гомотопии сохраняют изотопический класс кривой.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть гладкая замкнутая кривая общего положения в P^3 изотопна аффинной. Тогда ее фронт имеет двойные линии (т. е. существуют проективные плоскости в P^3 , касающиеся кривой в двух различных точках).

Если кривая аффинна, то это очевидно. Действительно, такая кривая имеет аффинные опорные плоскости, касающиеся ее в двух различных точках (см. [5]). Доказательство в общем случае дано в §5.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Если кривая в P^3 не изотопна аффинной, то ее фронт может не иметь двойных линий. Например, выпуклая кривая

$$(\cos t : \sin t : \cos 3t : \sin 3t), \quad t \bmod \pi,$$

пересекает любую плоскость не более, чем в трех точках (с учетом кратностей). Эта кривая нестягиваема. Кривая

$$(\cos t : \sin t : \cos 2t : \sin 2t), \quad t \bmod 2\pi,$$

стягиваема, но также не имеет двойных касательных плоскостей. Мы покажем в §5, что она не изотопна аффинной.

Из теорем 2.3 и 2.5 имеем

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Пусть гладкая замкнутая кривая общего положения в P^3 изотопна аффинной и ее фронт не имеет замкнутых двойных линий. Тогда эта кривая, как и любая другая кривая, полученная из нее допустимыми гомотопиями, имеет точки уплощения.

Рассмотрим кривую Γ из §1. Она аффинна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Фронт любой кривой общего положения, достаточно близкой к Γ , не имеет замкнутых двойных линий.

Доказательство приведено в §6. Из предложения 2.8 и следствия 2.7 получаем ответ на упомянутый выше вопрос Арнольда:

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Число точек уплощения любой кривой общего положения, достаточно близкой к Γ , не может обратиться в нуль в процессе допустимых гомотопий.

§3. Диаграмма главных уплощений кривой

Рассмотрим точки уплощения гладкой замкнутой кривой γ общего положения в P^3 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Весом связанной пары точек уплощения кривой γ называется вес двойной линии фронта кривой, которая связывает соответствующие вершины ласточкиных хвостов.

Две связанные пары точек уплощения *перемежаются*, если при обходе вокруг кривой точка уплощения одной связанной пары следует за точкой уплощения другой. Точки уплощения перемежающихся связанных пар называются *основными* точками уплощения рассматриваемой кривой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Связанная пара точек уплощения кривой называется *неглавной*, если ее вес равен 2 и точки этой пары разбивают кривую на две открытые

дуги, одна из которых не имеет основных точек уплощения. Все остальные связанные пары называются *главными*.

Кривая γ определяет весовую хордовую диаграмму D_γ неупорядоченных пар точек на S^1 , являющихся прообразами главных связанных пар точек уплощения и снабженных весами этих пар. Две такие диаграммы *эквивалентны*, если одна из них может быть переведена в другую диффеоморфизмом S^1 , сохраняющим ориентацию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Класс эквивалентности диаграммы D_γ называется *диаграммой главных уплощений* кривой γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Штурмовость кривой равна числу связанных пар точек уплощения, которые перемежаются с нечетным числом других связанных пар, т. е. числу хорд диаграммы главных уплощений, которые пересекают нечетное число других хорд. В частности, штурмовость кривой не превосходит числа всех хорд диаграммы главных уплощений, т. е. не превосходит числа главных связанных пар точек уплощения.

ТЕОРЕМА 3.5. *Диаграмма главных уплощений гладкой замкнутой кривой общего положения в P^3 является инвариантом допустимых гомотопий. В частности, число главных связанных пар точек уплощения кривой не меняется при таких гомотопиях.*

Доказательство приведено в §4.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. *В процессе допустимых гомотопий число точек уплощения гладкой замкнутой кривой общего положения в P^3 не может стать меньше удвоенного числа главных связанных пар точек уплощения исходной кривой.*

Рассмотрим кривую Γ из §1. Она находится не в общем положении (Γ имеет три пары точек, в которых соприкасающиеся плоскости совпадают).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. *Диаграмма главных уплощений любой кривой общего положения γ , достаточно близкой к Γ , имеет один из следующих двух типов:*

1) *пустая диаграмма (без хорд; кривая γ имеет три неглавные связанные пары точек уплощения; для каждой пары двойная линия фронта, связывающая соответствующие вершины ласточкиных хвостов, имеет две точки возврата одного и того же знака);*

2) *непустая диаграмма, имеющая две пересекающиеся хорды веса 0 (кривая γ имеет две перемежающиеся и одну неглавную связанные пары точек уплощения; двойная линия фронта, связывающая вершины ласточкиных хвостов, соответствующие неглавной паре, имеет две точки возврата одного и того же знака; двойная линия фронта, связывающая вершины ласточкиных хвостов, соответствующие любой главной паре, имеет две точки возврата противоположных знаков).*

Доказательство приведено в §6. Из предложения 3.7 и следствия 3.6 имеем

СЛЕДСТВИЕ 3.8. *Число точек уплощения любой кривой общего положения, достаточно близкой к Γ и имеющей непустую диаграмму главных уплощений, не может стать меньше 4 в процессе допустимых гомотопий.*

§4. Доказательство теорем 2.3 и 3.5

Рассмотрим допустимую гомотопию гладкой замкнутой кривой общего положения в P^3 . Она определяет деформацию фронта этой кривой. Перестройки фронта, которые могут происходить при такой деформации, перечислены в [1]. А именно:

A_4 : рождение или смерть связанной пары вершин ласточкиных хвостов на линии возврата фронта, которые близки друг к другу вдоль этой линии (двойная линия фронта, которая их связывает, имеет две точки возврата одного и того же знака);

$A_3 + A_1$: прохождение гладкой части фронта через вершину ласточкиного хвоста (на двойной линии фронта появляется или исчезает пара точек возврата противоположных знаков);

$A_2 + 2A_1$: прохождение ребра возврата через двойную линию фронта;

$4A_1$: прохождение гладкой части фронта через точку его тройного самопересечения;

$2A_1 \parallel A_1$: касание двойной линии фронта с гладкой частью фронта.

Перестройки $A_3 + A_1$, $A_2 + 2A_1$, $4A_1$ и $2A_1 \parallel A_1$ не меняют число двойных линий фронта, их типы (замкнутая или незамкнутая линия) и веса. Перестройка A_4 изменяет число двойных линий фронта, которые связывают вершины ласточкиных хвостов, соответствующие неглавным связанным парам точек уплощения кривой. Теоремы 2.3 и 3.5 доказаны.

§5. Доказательство теоремы 2.5

Сначала мы опишем изотопический инвариант стягиваемых кривых в трехмерном проективном пространстве. Построение этого инварианта осуществляется по стандартной схеме теории узлов, изложенной в [4].

Пусть Ω — пространство гладких замкнутых стягиваемых параметризованных кривых $\gamma: S^1 \rightarrow P^3$. Рассмотрим особую гиперповерхность $\Upsilon \subset \Omega$, образованную кривыми γ , для которых найдется пара точек $t_1, t_2 \in S^1$, $t_1 \neq t_2$, таких, что $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ и каждая из частей, на которые эти точки делят окружность, отображается в замкнутую нестягиваемую кривую в P^3 . Через Υ_0 обозначим гладкую часть гиперповерхности Υ .

Пусть две кривые $\gamma_0, \gamma_1 \in \Omega \setminus \Upsilon$ соединены путем γ_s , $s \in [0, 1]$, общего положения в пространстве Ω . Этот путь может пересекать гиперповерхность Υ только в точках из Υ_0 , причем трансверсальным образом. Такие пересечения мы будем называть *перестройками проективности* кривой в семействе γ_s . Каждой перестройке проективности можно сопоставить знак как обычной перестройке двойного самопересечения кривой в трехмерном пространстве.

А именно, зафиксируем ориентацию пространства P^3 и рассмотрим кривую $\gamma_{s_*} \in \Upsilon_0$ с точкой самопересечения $\gamma_{s_*}(t_1) = \gamma_{s_*}(t_2)$, $t_1 \neq t_2$. Выберем аффинную карту $\mathbb{R}^3 \subset P^3$, содержащую эту точку. Тогда для каждого $s \neq s_*$, достаточно близкого к s_* , определен базис B_s в $\mathbb{R}^3$, образованный касательными векторами $\gamma'_s(t_1)$, $\gamma'_s(t_2)$ к кривой γ_s и вектором с началом $\gamma_s(t_1)$ и концом $\gamma_s(t_2)$. Перестройка кривой γ_s в момент $s = s_*$ *положительна* (*отрицательна*), если базис B_s положительно (отрицательно) ориентирован при $s > s_*$.

Коориентируем гладкую часть Υ_0 гиперповерхности Υ ростками путей (γ_s, s^*) с положительной перестройкой проективности при $s = s^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Алгебраическое число перестроек проективности кривой γ общего положения при общем стягивании этой кривой в точку называется *коэффициентом проективности* кривой γ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Коэффициент проективности гладкой замкнутой стягиваемой кривой общего положения в P^3 не зависит от способа ее стягивания, т. е. является инвариантом кривой. В частности, коэффициент проективности не меняется при изотопиях кривой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что коэффициент проективности кривой γ не меняется при непрерывной деформации стягивающего пути.

Действительно, определенная выше коориентация гладкой части гиперповерхности Υ естественным образом продолжается до коориентации локально неприводимых компонент этой гиперповерхности в точках трансверсального самопересечения. Поэтому необходимо убедиться лишь в том, что коориентации гладких частей гиперповерхности Υ согласованы вблизи единственного страта коразмерности 1, не сводящегося к самопересечениям, — страта, отвечающего общему самокасанию кривой. Но последнее очевидно: любая достаточно малая петля общего положения, обходящая указанный страт в его двумерной трансверсали, пересекает Υ_0 ровно два раза, причем в противоположных направлениях.

Остается проверить, что алгебраическое число $I(\gamma_s)$ точек, в которых (произвольный) замкнутый путь γ_s общего положения в пространстве Ω пересекает гладкую часть гиперповерхности Υ , равно 0. Для этого рассмотрим путь $\tilde{\gamma}_s$, состоящий из одноточенных кривых

$$\tilde{\gamma}_s: S^1 \rightarrow P^3, \quad \tilde{\gamma}_s: t \mapsto \gamma_s(t_0),$$

определенных значениями кривых γ_s в фиксированной точке t_0 окружности S^1 . Так как никакая одноточенная кривая в P^3 не принадлежит гиперповерхности Υ , то $I(\tilde{\gamma}_s) = 0$. Следовательно, $I(\gamma_s) = I(\tilde{\gamma}_s) = 0$, поскольку пути γ_s и $\tilde{\gamma}_s$ гомотопны. Предложение 5.2 доказано.

Перейдем к доказательству теоремы 2.5. Оно основано на вычислении коэффициента проективности стягиваемой кривой без двойных касательных плоскостей (касающихся кривой в двух точках).

Пусть γ — гладкая замкнутая кривая общего положения в P^3 .

ЛЕММА 5.3. Предположим, что фронт кривой γ не имеет двойных линий. Тогда найдутся проективная прямая L в P^3 и натуральное число n , такие, что любая плоскость, проходящая через L , пересекает γ ровно в n геометрически различных точках.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную точку O кривой γ и касательную прямую l к γ в O . Кривая γ и множество плоскостей, проходящих через прямую l , компактны (последнее является проективной прямой в P^{3*}). По условию кривая γ не имеет двойных касательных плоскостей. Следовательно, для любой окрестности $U \subset \gamma$ точки O найдется окрестность V прямой l (в пространстве прямых в P^3), такая, что плоскости, проходящие через прямые из V , трансверсальны кривой γ вне U .

Покажем, что любая окрестность прямой l содержит такую прямую, что плоскости, проходящие через нее, трансверсальны кривой γ в любой заданной окрестности U . Для этого выберем аффинную систему координат (x, y, z) в P^3 с нача-

лом в точке O , такую, что росток кривой γ в O определяется формулами

$$x = t, \quad y = y(t) = t^2 + \dots, \quad z = z(t) = t^3 + \dots,$$

где $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Прямая l_δ , заданная уравнениями $y = \delta$, $z = 4\delta x$, близка к прямой $l = \{y = z = 0\}$, если δ близко к 0. Любая плоскость, проходящая через l_δ , определяется уравнением $a(z - 4\delta x) + b(y - \delta) = 0$ для некоторых a, b , таких, что $a^2 + b^2 \neq 0$. Эта плоскость касается кривой γ в точке t , если и только если

$$\det \begin{pmatrix} z(t) - 4\delta t & y(t) - \delta \\ z'(t) - 4\delta & y'(t) \end{pmatrix} = 0.$$

Но указанный определитель равен $-t^4 p(t) - \delta t^2 q(t) - 4\delta^2$, где

$$p(t) = 1 + \dots > 0, \quad q(t) = 1 + \dots > 0$$

для всех $t \in U = (-\varepsilon, \varepsilon)$, если ε достаточно мало. Следовательно, плоскости, проходящие через прямую l_δ , трансверсальны γ в окрестности U для любого $\delta > 0$. Лемма 5.3 доказана.

Если кривая γ стягиваема (нестягиваема), то число n в лемме 5.3 четно (нечетно соответственно).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Кривые в P^3 , фронт которых не имеет двойных линий, обобщают понятие выпуклой кривой. Действительно, для каждой такой кривой существует натуральное число N , такое, что кривая пересекает любую плоскость общего положения в N или $N + 2$ точках. Для выпуклых кривых $N = 1$.

ЛЕММА 5.5. Пусть кривая γ стягиваема и ее фронт не имеет двойных линий. Тогда коэффициент проективности кривой γ не равен 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим развертку T кривой γ (объединение всех ее касательных прямых). Эта поверхность является образом гладкого отображения двумерного тора в P^3 . Она не имеет самопересечений, но имеет особенности в точках кривой γ . А именно, кривая γ является ребром возврата развертки T .

Пусть $L \subset P^3$ — проективная прямая из леммы 5.3. Тогда существует натуральное число m , такое, что любая плоскость, проходящая через L , трансверсально пересекает кривую γ ровно в $2m$ точках. Пересечение такой плоскости с разверткой T является простой замкнутой кривой. Эта кривая аффинна (не пересекает прямую L) и имеет точки возврата в точках кривой γ .

Зафиксируем произвольную плоскость Π , проходящую через прямую L , и обозначим через ω кривую $\Pi \cap T$. Когда точка пересечения касательной прямой l к γ с плоскостью Π пробегает кривую ω , точка касания прямой l с кривой γ совершает $2m$ оборотов вокруг прямой L .

Следовательно, если в P^3 выбрать однородные координаты $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ так, что $\Pi = \{x_3 = 0\}$, $L = \{x_2 = x_3 = 0\}$, то развертка T будет гомеоморфна тору

$$\{(\cos \varphi : \sin \varphi : \cos \psi : \sin \psi), \varphi \bmod 2\pi, \psi \bmod \pi\},$$

а кривая γ изотопна его обмотке α_m , при которой каждому повороту вокруг прямой L на угол $\Delta\psi = \pi$ отвечает поворот на угол $\Delta\varphi = \pi + \pi/m$ вокруг прямой $x_0 = x_1 = 0$. Очевидно, что

$$\alpha_m = \{(\cos(m+1)t : \sin(m+1)t : \cos mt : \sin mt), t \bmod 2\pi\}$$

с точностью до проективного преобразования, сохраняющего Π и L .

Пусть A, B, C — любые три последовательные точки пересечения кривой α_m с плоскостью $x_3 = 0$ ($C = A$, если $m = 1$). Тогда кривая α_m гомотопна кривой β , полученной из α_m заменой ее дуги ABC дугой ABC окружности $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$, $x_3 = 0$. Такая гомотопия может быть осуществлена последовательностью $2m - 1$ перестроек простого двойного самопересечения, содержащей ровно m перестроек проективности одного и того же знака.

Заметим, что кривая β изотопна кривой α_{m-1} . Поэтому можно повторить указанную процедуру m раз и получить аффинную кривую α_0 . Эта гомотопия будет содержать ровно $m + (m-1) + \dots + 1 = m(m+1)/2$ перестроек проективности одного и того же знака. Следовательно, коэффициент проективности кривой γ равен $m(m+1)/2$, т. е. отличен от 0. Лемма 5.5 доказана.

Теорема 2.5 следует из леммы 5.5, предложения 5.2 и того факта, что коэффициент проективности аффинной кривой равен 0.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Из сказанного выше следует, что если гладкая замкнутая стягиваемая кривая общего положения в P^3 не имеет двойных касательных плоскостей, то она изотопна кривой α_m для некоторого натурального m . Кривые α_m , $m = 1, 2, \dots$, не изотопны аффинной и не имеют двойных касательных плоскостей. Кривые с различными числами m не изотопны.

§6. Доказательство предложений 2.8 и 3.7

Рассмотрим кривую Γ из §1. Она лежит в аффинном пространстве $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$ и имеет строго выпуклую проекцию на плоскость $z = 0$. Следовательно, любая плоскость, соприкасающаяся с Γ или касающаяся ее по меньшей мере в двух различных точках, трансверсальна прямой $x = y = 0$ и определяется уравнением $z = ax + by + c$.

Возьмем коэффициенты (a, b, c) в качестве аффинных координат в двойственном пространстве $\mathbb{R}^{3*}$ и проведем некоторые вычисления.

ЛЕММА 6.1. Для любых двух точек t_1 и t_2 кривой Γ

$$\det \begin{pmatrix} x'(t_1) & x'(t_2) & x(t_1) - x(t_2) \\ y'(t_1) & y'(t_2) & y(t_1) - y(t_2) \\ z'(t_1) & z'(t_2) & z(t_1) - z(t_2) \end{pmatrix} = 32 \left(\sin \frac{t_2 - t_1}{2} \right)^4 \cos \frac{t_2 - t_1}{2} \sin \frac{3}{2}(t_2 + t_1).$$

Из леммы 6.1 следует, что любые две точки t_1, t_2 (взятые с учетом кратностей), в которых кривая Γ имеет общую касательную плоскость, удовлетворяют одному из следующих четырех уравнений (mod 2π):

$$t_2 + t_1 = \frac{2\pi k}{3} \quad (k = 0, 1, 2) \quad \text{и} \quad t_2 - t_1 = \pi.$$

ЛЕММА 6.2. Множество плоскостей, касающихся кривой Γ по меньшей мере в двух точках (взятых с учетом кратностей), является объединением четырех кривых в $\mathbb{R}^{3*}$:

$$\xi_k : \begin{cases} a = 3(-1)^k \cos \frac{\pi k}{3} (4 \cos^2 t - 1), \\ b = 3(-1)^k \sin \frac{\pi k}{3} (4 \cos^2 t - 1), \\ c = -8(-1)^k \cos^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi], \quad k = 0, 1, 2;$$

$$\eta : \begin{cases} a = 2 \cos 2t - \cos 4t, \\ b = -2 \sin 2t - \sin 4t, \\ c = 0, \end{cases} \quad t \bmod \pi.$$

Кривые ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , η плоские. А именно, кривая ξ_k лежит в вертикальной плоскости $a \sin \frac{\pi k}{3} = b \cos \frac{\pi k}{3}$, а η лежит в горизонтальной плоскости $c = 0$.

Обозначим фронт кривой Γ через Σ .

ЛЕММА 6.3. *Каждая кривая ξ_k , $k = 0, 1, 2$, является частью полукубической параболы с точкой возврата*

$$C_k = \left(3(-1)^{k+1} \cos \frac{\pi k}{3}, 3(-1)^{k+1} \sin \frac{\pi k}{3}, 0 \right).$$

Ее концевые точки

$$V_k^m = \left(9(-1)^k \cos \frac{\pi k}{3}, 9(-1)^k \sin \frac{\pi k}{3}, 8(-1)^{m+1} \right), \quad m = 0, 1,$$

являются вершинами ласточкиных хвостов фронта Σ . Кривая η является гипоциклоидой с тремя точками возврата C_0 , C_1 , C_2 .

Заметим, что кривые ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 имеют две общие точки $T_0 = (0, 0, -1)$ и $T_1 = (0, 0, 1)$. Они являются точками тройного самопересечения фронта Σ . Объединение кривых ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , η изображено на рис. 2 (для простоты мы изображаем точки возврата углами).

Рис. 2

ЛЕММА 6.4. *Соприкасающаяся плоскость к кривой Γ в точке t имеет следующие координаты в $\mathbb{R}^{3*}$:*

$$a = 6 \cos 2t + 3 \cos 4t, \quad b = 3 \sin 4t - 6 \sin 2t, \quad c = -8 \cos 3t.$$

Формулы леммы 6.4 определяют параметризацию двойственной кривой Γ^* .

ЛЕММА 6.5. Кривая Γ^* является замкнутой кривой с шестью точками возврата V_k^m , $k \in \{0, 1, 2\}$, $m \in \{0, 1\}$, и тремя точками самопересечения C_0, C_1, C_2 . Каждая точка C_k является точкой пересечения двух ветвей кривой Γ^* , причем каждая ветвь трансверсально пересекает в этой точке плоскость $s = 0$ и соприкасающуюся плоскость к другой ветви.

Двойственная кривая Γ^* изображена на рис. 3. Мы будем предполагать, что она ориентирована порядком своих точек возврата:

$$V_0^0 \rightarrow V_1^1 \rightarrow V_2^0 \rightarrow V_0^1 \rightarrow V_1^0 \rightarrow V_2^1 \rightarrow V_0^0.$$

Рис. 3

ЗАМЕЧАНИЕ 6.6. Рис. 1 получен совмещением рис. 2 и рис. 3.

Рассмотрим ростки фронта Σ в точках C_0, C_1, C_2 . В силу лемм 6.2 и 6.5 они диффеоморфны ростку в 0 множества $\{y^2 = x^3\} \cup \{z^2 = x^3\}$ (росток фронта Σ в точке C_2 изображен на рис. 4). При малой общей деформации кривой Γ из каждой точки C_0, C_1, C_2 возникают две точки возврата двойных линий фронта кривой. При этом двойная линия, входящая в точку возврата вдоль кривой η , выходит из нее вдоль одной из кривых ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

Отсюда видно, что росток фронта Σ кривой Γ в любой точке C_k , $k = 0, 1, 2$, может быть продеформирован двумя разными способами. Следовательно, множество особых точек фронта любой кривой общего положения, достаточно близкой к Γ , может быть получено из множества $S_\Sigma = \xi_1 \cup \xi_2 \cup \xi_3 \cup \eta \cup \Gamma^*$ одной из 8 деформаций. Но множество S_Σ инвариантно относительно отражения $(a, b, c) \rightarrow (a, b, -c)$ и вращений вокруг прямой $a = b = 0$ на углы, кратные $2\pi/3$. Поэтому достаточно рассмотреть только две малые деформации фронта Σ (они реализуются малыми деформациями кривой Γ):

Θ_1 : точки пересечения ветвей $V_0^0V_1^1, V_2^0V_0^1, V_1^0V_2^1$ ($V_0^1V_1^0, V_2^1V_0^0, V_1^1V_2^0$) кривой Γ^* с плоскостью $s = 0$ выходят из треугольника $C_0C_1C_2$ (входят внутрь треугольника соответственно);

Θ_2 : точки пересечения ветвей $V_0^1 V_1^0$, $V_2^0 V_0^1$, $V_1^0 V_2^1$ ($V_0^0 V_1^1$, $V_2^1 V_0^0$, $V_1^1 V_2^0$) кривой Γ^* с плоскостью $c = 0$ выходят из треугольника $C_0 C_1 C_2$ (входят внутрь треугольника соответственно).

Рис. 4

Фронт, полученный из фронта Σ одной из этих двух деформаций, имеет следующие двойные линии:

$$\Theta_1: \begin{cases} V_0^0 \xrightarrow{\xi_0} C_0^- \xrightarrow{\eta} C_1^- \xrightarrow{\xi_1} V_1^1, \\ V_1^0 \xrightarrow{\xi_1} \tilde{C}_1^- \xrightarrow{\eta} C_2^- \xrightarrow{\xi_2} V_2^1, \\ V_2^0 \xrightarrow{\xi_2} \tilde{C}_2^- \xrightarrow{\eta} \tilde{C}_0^- \xrightarrow{\xi_0} V_0^1; \end{cases} \quad \Theta_2: \begin{cases} V_0^0 \xrightarrow{\xi_0} C_0^- \xrightarrow{\eta} C_1^- \xrightarrow{\xi_1} V_1^1, \\ V_1^0 \xrightarrow{\xi_1} \tilde{C}_1^- \xrightarrow{\eta} C_2^+ \xrightarrow{\xi_2} V_2^0, \\ V_2^1 \xrightarrow{\xi_2} \tilde{C}_2^+ \xrightarrow{\eta} \tilde{C}_0^- \xrightarrow{\xi_0} V_0^1. \end{cases}$$

Здесь мы обозначаем близкие вершины ласточкиных хвостов исходного и продеформированного фронтов одними и теми же буквами; стрелка означает, что двойная линия идет вдоль кривой, указанной над этой стрелкой; точки возврата двойных линий, появившиеся из данной точки C_k , обозначаются через $C_k^\pm$ и $\tilde{C}_k^\pm$, причем знак $+$ ($-$) означает, что данная точка возврата положительна (отрицательна) относительно ориентации двойной линии, указанной стрелками (ориентация пространства $\mathbb{R}^{3*}$ задается координатами (a, b, c)).

Легко видеть, что

1) фронты, полученные из фронта Σ деформациями Θ_1 , Θ_2 , не имеют замкнутых двойных линий; это доказывает предложение 2.8;

2) диаграммы главных уплощений кривых в $\mathbb{R}^3$ с фронтами, полученными из фронта Σ деформациями Θ_1 и Θ_2 , являются диаграммами, описанными в пп. 1) и 2) предложения 3.7 соответственно; таким образом, это предложение также доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.7. Допустимые гомотопии кривой сохраняют гомотопический тип двойственной кривой (в пространстве замкнутых кривых в P^{3*} без самопересе-

чений, но с точками возврата). Если кривая общего положения γ , полученная допустимой гомотопией из кривой, достаточно близкой к Γ , имеет непустую диаграмму главных уплощений, то ее двойственная кривая незаузлена. Если же кривая γ имеет пустую диаграмму главных уплощений, то ее двойственная кривая изотопна трилистнику.

Автор благодарен В. А. Васильеву, В. В. Горюнову, М. Э. Казаряну и рецензенту за полезные обсуждения и замечания. Я хотел бы также выразить благодарность Ньютоновскому институту математики в Кембридже, где эта работа была частично написана, за гостеприимство и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. К лежандровой теории Штурма пространственных кривых. Функц. анализ и его прил., **32**, вып. 2, 1–7 (1998).
2. Арнольд В. И. Задачи Арнольда. Фазис, М., 2000.
3. Barner M. Über die Mindestanzahl stationärer Schmiegebene bei geschlossenen streng-konvexen Raumkurven. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **20**, 196–215 (1956).
4. Васильев В. А. Топология дополнений к дискриминантам. Фазис, М., 1997.
5. Седых В. Д. Строение выпуклой оболочки пространственной кривой. Труды семинара Петровского, **6**, 239–256 (1981).
6. Седых В. Д. Теорема о четырех вершинах выпуклой пространственной кривой. Функц. анализ и его прил., **26**, вып. 1, 35–41 (1992).

Российский государственный университет
нефти и газа им. И. М. Губкина

Поступило в редакцию
20 марта 2000 г.