Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Березанский, Д. А. Мержеевский, Хаотическое разложение для гамма-поля, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 4, 81–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa275>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 18:27:12

Хаотическое разложение для гамма-поля*

© 2001. Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ, Д. А. МЕРЖЕЕВСКИЙ

Хаотическое представление, т.е. представление квадратично интегрируемой случайной величины в виде ортогональной суммы кратных стохастических интегралов, порожденных случайным процессом, хорошо известно в случае броуновского движения и (компенсированного) пуассоновского процесса. В случае других процессов Леви прямое обобщение такого представления невозможно [1]; в работах [2, 3] устанавливались иные обобщения хаотического представления, пригодные для этих процессов, в частности, для так называемого гамма-процесса (см. [4, 3]).

Вместе с тем параллельно развивалась теория якобиевых полей операторов в фоковском пространстве [5–11], которая давала возможность подойти к этому вопросу с иной стороны, основанной на спектральной теореме. В работах [12, 13] было показано, что гамма-процесс также связан с якобиевым полем (гамма-полем), однако действующим в более широком, чем фоковское, пространстве. В этой заметке мы показываем, что изучение такого гамма-поля приводит к совершенно естественному обобщению хаотического представления для гамма-процесса.

1. Остановимся прежде всего на схеме, связанной с «обычным» якобиевым полем. Пусть H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство, а H_c — его комплексификация. Рассмотрим в симметрическом пространстве Фока

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}, \quad \mathcal{F}^{(0)} = \mathbb{C}^1, \quad \mathcal{F}^{(n)} = H_c^{\hat{\otimes} n} \quad (1)$$

$$(\mathcal{F} \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty}, f_n \in \mathcal{F}^{(n)})$$

семейство J операторов $(J(\varphi))_{\varphi \in H}$, имеющих якобиеву (т.е. трехдиагональную) структуру относительно ортогональной суммы в (1) и определенных на $\mathcal{F}_{\text{fin}}$ (финитных векторах из $\mathcal{F}$). Будем предполагать, что операторы $J(\varphi)$ существенно самосопряжены, сильно коммутируют и линейно зависят (в слабом смысле) от параметра $\varphi \in H$. Такое семейство называется якобиевым полем [5–11], если дополнительно выполняются условия невырожденности (для любого $n \in \mathbb{N}$ непрерывный оператор в $\mathcal{F}^{(n)}$, определяющийся равенством $\varphi_1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} \varphi_n \mapsto (J(\varphi)_1 \dots J(\varphi_n) \Omega)_n$, $\varphi_j \in H$, $\Omega = (1, 0, 0, \dots)$, обратим) и гладкости (существует квазиядерное оснащение $H_- \supset H \supset H_+$, такое, что сказанное выше верно с заменой H на H_+ ; операторы $J(\varphi)$, $\varphi \in H_+$, по-прежнему действуют в $\mathcal{F}(H)$ и там существенно самосопряжены и коммутируют).

При помощи проекционной спектральной теоремы [14], примененной к семейству J , доказывается существование преобразования Фурье по обобщенным совместным собственным векторам этого семейства:

$$\mathcal{F}_{\text{fin}}(H_+) \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (If)(\omega) = \hat{f}(\omega)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, P_n(\omega) \rangle \in L^2(H_-, d\rho(\omega)) =: (L^2). \quad (2)$$

*Работа частично поддержана DFG, проект 436 UKR 113/39/0, и CRDF, проект UM1-2090.

Здесь $P(\omega) = (P_n(\omega))_{n=0}^\infty$, $P_n(\omega) \in H_{-,c}^{\otimes n}$ — обобщенный собственный вектор семейства J , отвечающий собственному значению $\omega \in H_-$, спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle$ берется относительно пространства $H_c^{\otimes n}$, $d\rho(\omega)$ — спектральная мера семейства J , определенная на борелевской σ -алгебре $\mathcal{B}(H_-)$, и $\rho(H_-) = 1$. После замыкания по непрерывности оператор I превращается в унитарный, переводящий $\mathcal{F}$ в (L^2) .

Ниже будет рассматриваться случай, когда роль H играет пространство $L_{\text{Re}}^2(\mathbb{R}^1, d\mu(t))$, построенное по вероятностной борелевской мере $d\mu(t)$, которая сосредоточена на $[0, \infty)$, абсолютно непрерывна относительно лебеговой меры dt и имеет ограниченную производную $d\mu(t)/dt$. В этом случае

$$Z(t; \omega) = (I(0, \varkappa_{[0,t]}(\cdot), 0, 0, \dots))(\omega), \quad t \in [0, \infty) \quad (3)$$

($\varkappa_\Delta$ — индикатор множества Δ), является стохастическим процессом на вероятностном пространстве $(H_-, \mathcal{B}(H_-), d\rho(\omega))$, а унитарный оператор (2) и ортогональное разложение (1) порождают ортогональное («хаотическое») разложение соответствующего пространства $(L^2) = L^2(H_-, d\rho(\omega))$:

$$(L^2) = \bigoplus_{n=0}^\infty (L_n^2), \quad (L_n^2) = L_n^2(H_-, d\rho(\omega)) := I\mathcal{F}_n. \quad (4)$$

В классических случаях полей J , когда роль процесса (3) играет броуновское движение или пуассонов процесс, компоненты $\hat{f}_n = If_n$ в разложении (4) подсчитываются при помощи кратного стохастического интеграла, порожденного процессом (3):

$$(\hat{f}_n)(\omega) = c_n \int_{[0, \infty)^n} f_n(t_1, \dots, t_n) dZ(t_1; \omega) \cdots dZ(t_n; \omega), \quad \omega \in H_-, \quad n \in \mathbb{N} \quad (5)$$

($c_n > 0$ — некоторые нормировочные константы). В общем случае якобиева поля в формуле (5) фигурирует не кратный стохастический интеграл, а интеграл по некоторой n -мерной стохастической мере.

2. Цель этой заметки — выяснить, как выглядят равенства (1)–(5) в том случае, когда (3) — так называемый гамма-процесс [4, 12, 3]. Из [12, 13] следует, что тогда операторы соответствующего якобиева поля действуют не в классическом фоковском пространстве $\mathcal{F}$, а в более широком «расширенном» пространстве $\mathcal{F}_{\text{ext}}$, определяющемся как пополнение по некоторому скалярному произведению финитных последовательностей $f = (f_n)_{n=0}^\infty$, где f_n — симметрическая функция $(\in \mathcal{S}^{\otimes n})$ из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}^{\otimes n}$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$.

В статье [15] установлено, что $\mathcal{F}_{\text{ext}}$ имеет следующую структуру. Пусть $H = L_{\text{Re}}^2(\mathbb{R}^1, d\mu(t))$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \{1, \dots, n\}$ и $q = (q_1, \dots, q_m)$, $q_j \in \mathbb{N}$, $|q| = q_1 + \dots + q_m = n$. Назовем эквивалентными такие q , которые отличаются лишь порядком чисел $q_1, \dots, q_m$. Выберем по одному q из каждого такого класса эквивалентности, и пусть Q_n — множество выбранных q . Обозначим через $\mathcal{F}_q^{(n)}$ замыкание в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m, d\mu(t_1) \cdots d\mu(t_m))$ множества функций вида

$$f_q^{(n)}(x_1, \dots, x_m) = f(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{q_1 \text{ раз}}, \dots, \underbrace{x_m, \dots, x_m}_{q_m \text{ раз}}), \quad (6)$$

где $f(x_1, \dots, x_n)$ — симметрическая функция n переменных из $\mathcal{S}^{\otimes n}$, т.е. $f \in \mathcal{S}^{\widehat{\otimes} n}$. Тогда

$$\mathcal{F}_{\text{ext}} = \mathcal{F}_{\text{ext}}(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{\text{ext}}^{(n)}, \quad \mathcal{F}_{\text{ext}}^{(n)} = \bigoplus_{q \in Q_n} \mathcal{F}_q^{(n)} l_q^{(n)}, \quad (7)$$

где $l_q^{(n)}$ — некоторые заданные положительные числа. Отметим, что $\mathcal{F}_{(1, \dots, 1)}^{(n)}$ совпадает с классическим пространством $\mathcal{F}^{(n)}$; поэтому $\mathcal{F}_{\text{ext}}$ — более широкое пространство, чем $\mathcal{F}$.

В пространстве (7) задается некоторое якобиево поле $J = (J(\varphi))_{\varphi \in \mathcal{S}_{\text{Re}}}$, обладающее свойствами типа упомянутых в разд. 1, но связанное с ортогональным разложением в (7), а не в (1), и с заменой $\mathcal{F}^{(n)}$ на $\mathcal{F}_{\text{ext}}^{(n)}$. Для него справедлива спектральная теорема и имеет место преобразование Фурье (2), где роль пространства H_- играет пространство обобщенных функций $\mathcal{S}'_{\text{Re}}$.

В частности, гамма-поле, связанное с гамма-процессом, будет полем такого типа. Мы не будем выписывать операторы этого поля (они найдены в [13]), отметим лишь, что каждая якобиева матрица поля состоит из стандартного оператора рождения, сопряженного к нему в $\mathcal{F}_{\text{ext}}$ «гамма-оператора уничтожения» и диагонального оператора того же типа, что и фигурирующий в пуассоновом поле. Для этого поля, разумеется, строится [13] преобразование Фурье, имеющее сейчас вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{fin}}(\mathcal{S}) \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} &\mapsto (I_G f)(\omega) = \hat{f}(\omega) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, P_n(\omega) \rangle \in L^2(\mathcal{S}'_{\text{Re}}, d\rho_G(\omega)) =: (L^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Подчеркнем, что здесь $f_n \in \mathcal{S}^{\widehat{\otimes} n}$ и спаривание, как и в (2), берется относительно $d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_n)$, однако оператор I_G (после замыкания по непрерывности) является унитарным оператором между пространствами $\mathcal{F}_{\text{ext}}$ и $L^2(\mathcal{S}'_{\text{Re}}, d\rho_G(\omega))$. Спектральная мера этого поля задается своим преобразованием Лапласа:

$$\int_{\mathcal{S}'_{\text{Re}}} e^{\langle \omega, \varphi \rangle} d\rho_G(\omega) = \exp \left(- \int_{\mathbb{R}^1} \log(1 - \varphi(t)) d\mu(t) \right), \quad \varphi \in \mathcal{S}_{\text{Re}}, \varphi < 1. \quad (9)$$

Применение оператора I_G к разложению (7) приводит (подобно случаю (1)) к ортогональному хаотическому разложению пространства $(L^2) = L^2(\mathcal{S}'_{\text{Re}}, d\rho_G(\omega))$:

$$(L^2) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{q \in Q_n} (L_{n,q}^2), \quad (L_{n,q}^2) = L_{n,q}^2(\mathcal{S}'_{\text{Re}}, d\rho_G(\omega)) := I_G(\mathcal{F}_q^{(n)} l_q^{(n)}). \quad (10)$$

Наша цель — получение формулы типа (5) для компонент разложения (10). В дальнейшем под гамма-полем мы будем понимать описанное семейство операторов $J(\varphi)$, сдвинутых на кратный единичному оператор $\int_{\mathbb{R}^1} \varphi(t) d\mu(t) \mathbf{1}$, $\varphi \in \mathcal{S}_{\text{Re}}$.

Обозначим через $Z_G(t; \omega)$, $t \in [0, \infty)$, $\omega \in \mathcal{S}'_{\text{Re}}$, гамма-процесс, определенный формулой (3) с $I = I_G$ по гамма-полю (или непосредственно [4, 12, 13, 3]).

ТЕОРЕМА. Пусть $f_q^{(n)} \in \mathcal{F}_q^{(n)}$ — функция вида (6), где $f \in \mathcal{S}^{\widehat{\otimes} n}$, а $\hat{f}_q^{(n)} = I_G f_q^{(n)}$ — отвечающая ей компонента хаотического разложения (10). Тогда

справедливо следующее представление этой компоненты:

$$(\hat{f}_q^{(n)})(\omega) = c_q^{(n)} \int_{[0, \infty)^m} f_q^{(n)}(x) dZ_{G,q}^{(n)}(x; \omega), \quad (11)$$

$$\omega \in \mathcal{S}'_{\text{Re}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad q = (q_1, \dots, q_m), \quad |q| = n,$$

где $Z_{G,q}^{(n)}$ есть m -мерный гамма-мартингал, строящийся определенным образом по гамма-полю, а $c_q^{(n)} > 0$ — некоторые нормировочные константы.

В случае $q_1 = \dots = q_m$ этот мартингал приобретает вид обычной m -кратной стохастической меры

$$dZ_{G,q}^{(n)}(x; \omega) = \sqrt{m!} dZ_G(x_1; \omega) \cdots dZ_G(x_m; \omega)$$

и интеграл (11) превращается в m -кратный стохастический интеграл, построенный по $Z_G(t; \omega)$.

Путем предельного перехода формула (11) распространяется и на произвольные функции $f_q^{(n)}$ из подпространства $\mathcal{F}_q^{(n)} \subset \mathcal{F}_{\text{ext}}^{(n)}$.

Доказательство этой теоремы следует изложенному в [10] доказательству для случая обычного якобиева поля. Наибольшую трудность представляет построение по инициальному разложению единицы $(E(\Delta)f)(t) = \varkappa_\Delta(t)f(t)$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^1, d\mu(t))$ соответствующего разложения единицы $E_q^{(n)}(\alpha)$ (α — борелевское множество из $\mathbb{R}^m$) в пространстве $\mathcal{F}_q^{(n)}$ (в случае обычного поля роль $E_q^{(n)}$ играет симметрическое разложение единицы $E \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} E$ (n раз), суженное на симметрические функции). Мартингал $Z_{G,q}^{(n)}(\alpha; \omega)$ равен $(I_G(E_q^{(n)}(\alpha)1))(\omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dermoune A. Ann. Inst. Henri Poincaré, **26**, No. 1, 101–119 (1990).
2. Nualart D., Schoutens W. Stochastic Processes and Applications (в печати).
3. Schoutens W. Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials. Springer-Verlag, New York, etc., 2000.
4. Takács L. Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes. John Wiley & Sons, New York, 1967.
5. Berezansky Yu. M. In: Proc. of Symp. “Dynamics of Complex and Irregular Systems,” 16–20 December, 1991, Germany. Bielefeld Encount. Math. Phys., VIII, World Scientific, Singapore–New Jersey–London–Hong Kong, 1993, pp. 131–140.
6. Berezansky Yu. M., Livinsky V. O., Lytvynov E. W. Methods Funct. Anal. Topology, **1**, No. 1, 28–55 (1995).
7. Lytvynov E. W. Methods Funct. Anal. Topology, **1**, No. 1, 61–85 (1995).
8. Berezansky Yu. M. Integral Equations Operator Theory, **30**, No. 2, 163–190 (1998).
9. Березанский Ю. М. Алгебра и анализ, **9**, № 6, 38–61 (1997).
10. Berezansky Yu. M. Methods Funct. Anal. Topology, **4**, No. 1, 1–31 (1998).
11. Berezansky Yu. M. Fields Inst. Commun., **25**, 211–224 (2000).
12. Kondratiev Yu. G., Da Silva J. L., Streit L., Us G. F. Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., **1**, No. 1, 91–117 (1998).
13. Kondratiev Yu. G., Lytvynov E. W. Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., **3**, No. 3, 303–335 (2000).
14. Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г. Спектральные методы в бесконечномерном анализе. Наукова думка, Киев, 1988.
15. Berezansky Yu. M., Mierzejewski D. A. Methods Funct. Anal. Topology, **6**, No. 4, 1–13 (2000).

Институт математики НАНУ, Киев, Украина
e-mail: berezan@mathber.carrier.kiev.ua

Институт математики НАНУ, Киев, Украина
e-mail: mierzaje@imath.kiev.ua

Поступило в редакцию
25 мая 2001 г.