Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Рабинович, Устойчивость обратных операторов граничных задач в гладких расширяющихся областях, *Функци. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 4, 85–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa276>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 10:52:44

УДК 517.9

Устойчивость обратных операторов граничных задач в гладких расширяющихся областях*

© 2001. В. С. РАБИНОВИЧ

В работе рассматривается вопрос о равномерной ограниченности обратных операторов краевых задач в расширяющейся системе областей с гладкими границами при условии, что коэффициенты дифференциальных операторов краевой задачи принадлежат классу $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ ограниченных на $\mathbb{R}^n$ вместе со всеми производными функций. Таким образом, никаких условий стабилизации на бесконечности на коэффициенты не налагается. (Класс $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ содержит осциллирующие функции, например, равномерные почти периодические функции на $\mathbb{R}^n$.)

Устойчивость обратных операторов граничных задач является базой при исследовании связи между решениями граничных задач в ограниченных областях и во всем пространстве. Такая связь рассматривалась в монографии [1] при жестких условиях стабилизации коэффициентов дифференциальных операторов на бесконечности к константам и в работах [2, 3] при условии стабилизации коэффициентов к константам на бесконечности вдоль лучей в $\mathbb{R}^n$. Задачи с параметром в расширяющихся гладких областях рассматривались в [4, 5]. Предлагаемый здесь подход к проблеме существенно отличается от подходов цитируемых работ. К указанной задаче впервые применяется метод предельных операторов, развитый автором для исследования фредгольмовости граничных задач в работах [6, 7].

1. Постановка задачи. Пусть D есть ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, содержащая начало координат и имеющая гладкую границу. Положим

$$D_r = \{x \in \mathbb{R}^n : x/r \in D, r > 0\}.$$

Мы рассматриваем в области D_r граничную задачу

$$Au = f, \quad x \in D_r, \quad B_1 u = f_1, \dots, B_m u = f_m, \quad x \in \partial D_r, \quad (1)$$

где

$$A = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad B_j = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{aj}(x) D^\alpha, \quad j = 1, \dots, m,$$

— дифференциальные операторы с коэффициентами из пространства $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Сопоставим задаче (1) оператор

$$\mathfrak{A}_r : X_r = H^s(D_r) \rightarrow Y_r = H^{s-2m}(D_r) \bigoplus_{j=1}^m H^{s-m_j-1/2}(\partial D_r),$$

где $s > \max m_j + 1/2$.

Мы рассматриваем вопрос об устойчивости семейства $\mathfrak{A}_r : X_r \rightarrow Y_r$ при больших r , т.е. вопрос о существовании $r_0 > 0$, такого, что операторы $\mathfrak{A}_r : X_r \rightarrow Y_r$ обратимы, если $r \geq r_0$, и

$$\sup_{r \geq r_0} \|\mathfrak{A}_r^{-1}\|_{Y_r \rightarrow X_r} < \infty.$$

2. Формулировка основных результатов. Для формулировки основных результатов работы мы нуждаемся в некоторых определениях. Пусть $\omega \neq 0$. Обозначим через η_ω бесконечно удаленную точку, отвечающую лучу L_ω , выходя-

*Работа выполнена при поддержке проекта CONACYT 32424-E.

щему из начала координат и проходящему через ω . Мы определим окрестности бесконечно удаленной точки η_ω как множества

$$U_{R,W} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > R, x \in W\},$$

где W есть открытый конус с вершиной в начале координат, содержащий луч L_ω . Будем говорить, что последовательность $\{h_m\}$, $h_m \in \mathbb{Z}^n$, сходится к η_ω , если для каждой окрестности $U_{R,W}$ точки η_ω найдется m_0 , такое, что $h_m \in U_{R,W}$, если $m \geq m_0$. Пусть $a(x) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\{h_m\}$, $h_m \in \mathbb{Z}^n$, сходится к η_ω . Тогда найдется подпоследовательность $\{h_{m_k}\}$, сходящаяся к η_ω , такая, что существует предел в C^∞ -топологии $\lim_{k \rightarrow \infty} a(x + h_{m_k}) = a^h(x)$. Нетрудно проверить, что $a_h(x) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть последовательность $\{h_m\}$, сходящаяся к η_ω , такова, что существуют пределы

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_\alpha(x + h_m) = a_\alpha^h(x), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} b_{\alpha j}(x + h_m) = b_{\alpha j}^h(x), \quad j = 1, \dots, m,$$

в C^∞ -топологии. Обозначим через A^h , B_j^h дифференциальные операторы с коэффициентами $a_\alpha^h(x)$ и $b_{\alpha j}^h(x)$ соответственно и назовем эти операторы предельными.

Пусть $v \in \partial D$. Обозначим через $\mathbf{H}_v$ полупространство, ограниченное касательным пространством к ∂D в точке v и содержащее внутреннюю нормаль к ∂D в точке v . Положим $\mathbf{H}_v^0 = \mathbf{H}_v - v$.

ТЕОРЕМА 1. Семейство $\mathfrak{A}_r: X_r \rightarrow Y_r$ устойчиво при больших r тогда и только тогда, когда

1) оператор $A: H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s-2m}(\mathbb{R}^n)$ обратим;

2) для каждой точки $v \in \partial D$ и каждой последовательности $\{h_m\}$, сходящейся к η_v , такой, что предельные операторы A^h , B_j^h , $j = 1, \dots, m$, существуют, оператор граничной задачи в полупространстве

$$\mathfrak{A}_{\mathbf{H}_v^0}^h: H^s(\mathbf{H}_v^0) \rightarrow H^{s-2m}(\mathbf{H}_v^0) \bigoplus_{j=1}^m H^{s-m_j-1/2}(\partial \mathbf{H}_v^0),$$

определяемый внутренним оператором A^h и граничными операторами B_j^h , $j = 1, \dots, m$, обратим и нормы обратных операторов $(\mathfrak{A}_{\mathbf{H}_v^0}^h)^{-1}$ равномерно ограничены.

Рассмотрим теперь следующую граничную задачу:

$$Au_r = f_r, \quad x \in D_r, \quad B_j u_r = 0, \quad x \in \partial D_r, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

где A и B_j вводились раньше, а f_r есть ограничение функции $f \in H^{s-2m}(\mathbb{R}^n)$ на D_r . Теорема 1 имеет такое важное следствие:

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует $r_0 > 0$, такое, что при $r \geq r_0$ задача (2) имеет единственное решение u_r . Более того,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \|\hat{u}_r - u_r\|_{H^s(D_r)} = 0,$$

где $\hat{u}_r$ — ограничение на D_r единственного решения $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ уравнения

$$Au = f, \quad f \in H^{s-2m}(\mathbb{R}^n).$$

ПРИМЕР. Пусть $D(\ni 0)$ — область с гладкой границей ∂D . Рассмотрим задачу Дирихле для оператора Шрёдингера в области D_r

$$(-\Delta + q(x))u_r = f_r, \quad x \in D_r, \quad u_r|_{\partial D_r} = \varphi_r. \quad (3)$$

Обозначим через $\mathfrak{A}_r: H^s(D_r) \rightarrow H^{s-2}(D_r) \oplus H^{s-1/2}(\partial D_r)$, $s > 1/2$, оператор задачи (3). Предположим, что потенциал $q(x)$ медленно меняется на бесконечности, т.е. $q(x) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \partial_{x_j} q(x) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Можно показать, что в этом случае пределы $\lim_{k \rightarrow \infty} q(x + h_k)$, $h_k \rightarrow \infty$ (если они существуют), не зависят от x . Кроме этого, предположим, что

$$\inf_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Im} q(x) \geq 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{|x| > r} \operatorname{Im} q(x) > 0. \quad (4)$$

Применяя исчисление псевдодифференциальных операторов с медленно меняющимися символами [8], можно показать, что оператор $A = -\Delta + q(x): H^s \rightarrow H^{s-2}$ при условии (4) фредгольмов и имеет индекс нуль. Более того, из условия (4) и теоремы о единственности продолжения для решений эллиптических уравнений второго порядка (см., например, [9, с. 389]) получаем, что ядро оператора A тривиально. Следовательно, A обратим, т.е. условие 1) теоремы 1 выполнено.

Проверим условие 2) теоремы 1. В нашем случае операторы $\mathfrak{A}_{\mathbf{H}_v^0}^h: H^s(\mathbf{H}_v^0) \rightarrow H^{s-2}(\mathbf{H}_v^0) \oplus H^{s-1/2}(\partial \mathbf{H}_v^0)$ есть операторы задач Дирихле в полупространствах $\mathbf{H}_v^0$ для дифференциальных операторов $-\Delta + q_h$, где $q_h \in \mathbb{C}$ — частичные пределы $q(x)$ при x , стремящемся к бесконечно удаленной точке η_v . Из условия (4) следует, что $\operatorname{Im} q_h > 0$, и, используя теорию эллиптических операторов в полупространстве (см., например, [10]), получаем обратимость операторов $\mathfrak{A}_{\mathbf{H}_v^0}^h$. Более того, условие (10) влечет за собой равномерную ограниченность обратных операторов $(\mathfrak{A}_{\mathbf{H}_v^0}^h)^{-1}$.

Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены, и, следовательно, семейство

$$\mathfrak{A}_r: H^s(D) \rightarrow H^{s-2}(D_r) \oplus H^{s-1/2}(\partial D_r), \quad s > 1/2,$$

устойчиво.

Пусть $f \in H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$, $s > 1/2$, и f_r есть ограничение функции f на $\mathcal{D}_r$, $\varphi_r = 0$ для всех $r > 0$. Тогда, как следует из теоремы 2, существует r_0 , такое, что для $r \geq r_0$ задача (3) имеет единственное решение u_r . Более того,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \|\hat{u}_r - u_r\|_{H^s(D_r)} = 0,$$

где $\hat{u}_r$ — ограничение на D_r единственного решения $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ уравнения

$$(-\Delta + q(x))u = f, \quad f \in H^{s-2}(\mathbb{R}^n).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Maz'ya V. G., Nazarov S. A., Plamenevskii B. A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestorten Gebieten, V. 1. Akademie-Verlag, Berlin, 1991.
2. Докторский Л. Р. ДАН СССР, Сер. матем., **229**, №6, 1303–1305 (1976).
3. Докторский Л. Р. Сиб. матем. ж., **20**, №6, 1249–1260 (1979).
4. Шимон Л. Диф. уравнения, **9**, №8, 1482–1492 (1973).
5. Шимон Л. Матем. сб., **91**, №4, 488–500 (1973).
6. Рабинович В. С. Труды С.-Петербург. матем. об-ва, **5**, 349–379 (1998).
7. Рабинович В. С. ДАН СССР, сер. матем., **325**, №2, 237–241 (1992).
8. Грушин В. В. Функц. анализ и его прил., **4**, вып. 3, 37–50 (1970).
9. Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы. Мир, М., 1985.
10. Eskin G. I. Boundary Value Problems for Elliptic Pseudodifferential Equations. Transl. Math. Monogr., Amer. Math. Soc., Vol. 52, Providence, R.I., 1981.