Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Туровский, В. С. Шульман, Радикалы в банаховых алгебрах и некоторые задачи теории радикальных банаховых алгебр, *Функц. анализ и его прил.*, 2001, том 35, выпуск 4, 88–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa277>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:45:52

УДК 517.4

Радикалы в банаховых алгебрах и некоторые задачи теории радикальных банаховых алгебр

© 2001. Ю. В. Туровский, В. С. Шульман

1. Введение. Основы теории топологических радикалов заложены Диксоном [1]. Рассмотрим ее приложения к некоторым проблемам теории радикальных банаховых алгебр. Класс банаховых алгебр обозначим через $\{BA\}$, его подкласс радикальных алгебр (т.е. таких алгебр A , которые совпадают со своим радикалом Джекобсона $\text{rad } A$) — через $\{РБА\}$. Банахова алгебра A называется *рассеянной*, если все ее элементы имеют (не более чем) счетные спектры, и *компактной*, если все ее элементы компактны (т.е. компактны все операторы $x \rightarrow axa$ на A). Образ подмножества $M \subset A$ в факторалгебре A/I по идеалу I обозначим через M/I . Через $\rho(M)$ обозначается спектральный радиус ограниченного подмножества $M \subset A$, т.е. $\lim \|M^n\|^{1/n}$, где M^n — совокупность всех произведений по n элементов из M , а норма множества определяется как супремум норм его элементов. Для семейства элементов из A , т.е. отображения $E: \Lambda \rightarrow A$, где Λ — произвольное «индексное» множество, определяется также l^1 -норма $\|E\|_1 = \sum_{\alpha \in \Lambda} \|E(\alpha)\|$ (если она конечна, то семейство E называется *суммируемым*) и степени $E^n: \Lambda^n \rightarrow A$, $E^n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = E(\alpha_1) \cdots E(\alpha_n)$, после чего l^1 -спектральный радиус $\rho_1(E)$ вводится аналогично «обычному»: $\rho_1(E) = \lim \|E^n\|_1^{1/n}$. Разумеется, множество можно рассматривать как семейство, индексированное его же элементами, и вычислять $\rho_1(M)$ для суммируемых множеств $M \subset A$. Алгебра A называется *конечно (компактно) квазинильпотентной*, если $\rho(M) = 0$ для любого конечного (соответственно предкомпактного) множества $M \subset A$. Если $\rho_1(M) = 0$ для всех суммируемых множеств M , то алгебру A назовем *1-квазинильпотентной*. Определим также $r(M)$ равенством $r(M) = \limsup_n (\sup\{\rho(a) : a \in M^n\})^{1/n}$.

Одной из наиболее известных нерешенных задач теории алгебр из $\{РБА\}$ является проблема существования нетривиального замкнутого идеала. Сильный результат здесь получен Войтыньским [2], который показал, что компактные радикальные алгебры имеют идеалы. В теореме 8 приведены дальнейшие утверждения о структуре идеалов таких алгебр.

Не решен и вопрос о радикальности проективного тензорного произведения алгебры из $\{РБА\}$ на произвольную алгебру из $\{BA\}$. В случае когда одна из алгебр коммутативна, решение дано в [3]. Связанный с этой задачей радикал строится в разд. 2; из результатов разд. 4 следует, что ответ положителен, если одна из алгебр компактна.

Неизвестно, является ли всякая алгебра из $\{РБА\}$ компактно (или хотя бы конечно) квазинильпотентной. Соответствующий радикал строится в разд. 2, а решение для компактного случая дается в разд. 4.

Еще недавно не было известно, является ли всякая алгебра из $\{РБА\}$ топологически радикальной, т.е. не имеющей топологически неприводимых представлений в банаховых пространствах. Отрицательный ответ фактически получен

Ридом в [4], где построен квазинильпотентный оператор без инвариантных подпространств. В теореме 8 утверждается, что и в классе компактных банаховых алгебр ответ отрицателен.

Топологическим радикалом [1] называется отображение $A \rightarrow R(A)$, сопоставляющее любой банаховой алгебре ее замкнутый идеал и удовлетворяющее следующим условиям: 1) $R(R(A)) = R(A)$; 2) $R(A/R(A)) = 0$; 3) $f(R(A)) \subset R(B)$, если $f: A \rightarrow B$ — непрерывный эпиморфизм; 4) если I — замкнутый идеал в A , то $R(I)$ — идеал в A , содержащийся в $R(A)$ (если $R(I) = R(A) \cap I$, то R называется *наследственным*). Алгебру A называют *R -радикальной*, если $R(A) = A$, и *R -коммутативной*, если $A/R(A)$ коммутативна.

2. ρ -радикалы. В этом разделе вводятся радикалы, реализующие «препятствия» в двух из перечисленных выше задач. Положим

$$R_{cq}(A) = \{a \in A : \rho(aM) = 0 \text{ для любого предкомпактного } M \subset A\},$$

$R_{sum}(A) = \{a \in A : \rho_1(aM) = 0 \text{ для любого суммируемого } M \subset A\}$ (здесь aM рассматривается как семейство, индексированное семейством M). Нетрудно проверить, что $R_{cq}(A) \subset R_{sum}(A)$.

ТЕОРЕМА 1. (1) $R_{cq}(A)$ — наибольший компактно квазинильпотентный идеал, $R_{sum}(A)$ — наибольший 1-квазинильпотентный идеал.

(2) отображения $A \rightarrow R_{cq}(A)$ и $A \rightarrow R_{sum}(A)$ — наследственные топологические радикалы.

(3) $\rho(M/R_{cq}(A)) = \rho(M)$ для любого предкомпактного множества $M \subset A$, $\rho_1(M/R_{sum}(A)) = \rho_1(M)$ для любого суммируемого множества $M \subset A$.

Ясно, что алгебра A компактно квазинильпотентна тогда и только тогда, когда $R_{cq}(A) = A$. Итак, R_{cq} прямо связан с проблемой компактной квазинильпотентности радикальных алгебр. Сформулированная ниже теорема 2 связывает радикал R_{sum} с задачей о радикальности тензорного произведения.

ТЕОРЕМА 2. $R_{sum}(A) = \{a \in A : a \otimes B \subset \text{rad}(A \hat{\otimes} B), B \in \{BA\}\}$.

Алгебра A называется *совершенно радикальной*, если $A \hat{\otimes} B$ радикальна для всех $B \in \{BA\}$, и *совершенной*, если $A \hat{\otimes} B$ радикальна для всех $B \in \{PBA\}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. (1) Алгебра A совершенно радикальна тогда и только тогда, когда она 1-квазинильпотентна.

(2) Любая компактно квазинильпотентная алгебра совершенно радикальна, а любая совершенно радикальная алгебра конечно квазинильпотентна.

3. Рассеянный радикал.

ТЕОРЕМА 4. (1) Любая банахова алгебра A имеет наибольший рассеянный идеал $R_{scat}(A)$.

(2) $R_{scat}(A) = \{a \in A : \text{спектр } \sigma(ab) \text{ не более чем счетен для любого } b \in A\}$.

(3) Отображение $A \rightarrow R_{scat}(A)$ — наследственный топологический радикал.

В частности, если $A \in \{BA\}$ и J — замкнутый идеал алгебры A , такой, что J и A/J рассеяны, то и A рассеяна.

ТЕОРЕМА 5. Пространство примитивных идеалов (с топологией Джекобсона) сепарабельной рассеянной алгебры дискретно.

4. Гипокомпактный радикал. Напомним, что $a \in A$ компактен, если оператор $x \rightarrow axa$ компактен. Компактные элементы алгебры $B(X)$ всех операторов, действующих в банаховом пространстве X , — это компактные операторы [5].

Будем называть алгебру *гипокомпактной*, если в любой ее ненулевой факторалгебре есть ненулевые компактные элементы. Примеры — расширения компактных алгебр посредством компактных (в том числе присоединение единицы к компактной алгебре).

ТЕОРЕМА 6. (1) *Любая банахова алгебра A имеет наибольший гипокомпактный идеал $R_{\text{com}}(A)$.*

(2) *Отображение $A \rightarrow R_{\text{com}}(A)$ — наследственный топологический радикал.*

(3) $\rho(M) = \max\{\rho(M/R_{\text{com}}(A)), r(M)\}$ для любого предкомпактного множества $M \subset A$.

(4) $R_{\text{com}}(A) \subset R_{\text{scat}}(A)$.

Пункт (3) теоремы 6 обобщает результат из [6] о равенстве $\rho(M)$ и $r(M)$ для ограниченных множеств операторов в конечномерном пространстве.

ТЕОРЕМА 7. (1) *Всякая радикальная гипокомпактная алгебра компактно квазинильпотентна и как следствие совершенно радикальна.*

(2) *Всякая гипокомпактная алгебра совершенна.*

Итак, на гипокомпактных алгебрах радикалы R_{cq} , R_{sum} и rad совпадают. Но радикал R_{TI} [1], равный пересечению ядер топологически неприводимых представлений, может быть уже (п. (2)(i) теоремы 8).

ТЕОРЕМА 8. (1) *Всякая бесконечномерная компактная радикальная алгебра имеет бесконечную цепь замкнутых идеалов.*

(2) *Существуют компактные алгебры $A_1, A_2, A_3 \in \{\text{РБА}\}$, такие, что*

(i) A_1 *коммутативна, но не топологически радикальна,*

(ii) A_2 *не имеет максимальной (как цепь подпространств) цепи замкнутых идеалов,*

(iii) A_3 *имеет бесконечномерный минимальный замкнутый идеал.*

5. Ослабленная коммутативность. Коммутативные алгебры доставляют еще один пример класса алгебр, где радикалы R_{cq} и R_{sum} совпадают с радикалом Джекобсона. Это вытекает из следующих формул:

(1) $\rho(M) = \sup\{\rho(a) : a \in M\}$ (M предкомпактно),

(2) $\rho_1(M) \leq \sum_{i \in \Lambda} \rho(a_i)$ ($M = (a_i)_{i \in \Lambda}$ суммируемо).

Эти свойства сохраняются для алгебр, выделяемых условиями ослабленной коммутативности в терминах теории алгебр Ли. Всякая ассоциативная алгебра — алгебра Ли с коммутатором $[a, b] = ab - ba$; в этом смысле мы будем говорить о подалгебрах Ли банаховых алгебр.

ТЕОРЕМА 9. *Если банахова алгебра A порождена нильпотентной или конечномерной разрешимой подалгеброй Ли, то она R_{cq} -коммутативна, $R_{\text{cq}}(A) = R_{\text{sum}}(A) = \text{rad}(A)$ и для любого предкомпактного (суммируемого) подмножества $M \subset A$ имеет место формула (1) (соответственно (2)).*

Для приложений в теории спектра Тейлора [7] важен такой **вопрос**: является ли энгелевой банахова алгебра, порожденная нильпотентной (или, более общо, энгелевой) подалгеброй Ли? Мы называем нормированную алгебру Ли *энгелевой*, если на ней все операторы присоединенного представления $\text{ad } a : x \rightarrow [a, x]$ квазинильпотентны. Так же определяются энгелевы нормированные алгебры.

ТЕОРЕМА 10. *Банахова алгебра A rad -коммутативна тогда и только тогда, когда операторы $\text{ad}[a, b]$ квазинильпотентны для всех $a, b \in A$. В частности, всякая энгелева банахова алгебра rad -коммутативна.*

Следующие результаты частично отвечают на поставленный вопрос.

ТЕОРЕМА 11. (1) *Рассеянная банахова алгебра, порожденная нильпотентной подалгеброй Ли, энгелева.*

(2) *Гипокомпактная банахова алгебра, порожденная энгелевой подалгеброй Ли, энгелева.*

ЛИТЕРАТУРА

- 1.** *Dixon P.* Proc. London Math. Soc. (3), **74**, 174–200 (1997). **2.** *Wojtyński W.* Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. math. astr. et phys., **26**, No. 2, 109–113 (1978). **3.** *Aupetit B.* Propriétés spectrales des algèbres de Banach. Lect. Notes Math., Vol. 735, Springer-Verlag, Berlin, 1979. **4.** *Read C. J.* J. London Math. Soc. (2), **56**, 595–606 (1997). **5.** *Vala K.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A, I, **351**, 1–8 (1964). **6.** *Berger M. A., Wang Y.* Linear Algebra Appl., **166**, 21–27 (1992). **7.** *Fainshtein A. S.* J. Operator Theory, **29**, 3–27 (1993).

Институт математики и механики АН Азербайджана
e-mail: info@sinam.net

Поступило в редакцию
27 октября 2000 г.

Вологодский политехнический институт, кафедра математики
e-mail: victor@vstu.edu.ru